ся условием той же динамической устойчивости. Неустойчивая перемычка быстро теряет все звезды и тогда остается лишь ядро, окруженное звездной короной, вокруг которого закручиваются два конца бывшей перемычки, в которой уже нет звезд, а остающаяся материя удерживается оставшимся магнитным полем. Так образуются большие нормальные спирали, в которых процесс звездообразования продолжается за счет материи в спиральных ветвях и который снабжает молодыми звездами плоскую составляющую звездного населения.

Под «односторонними» галактиками я понимаю спиральные галактики с одной ветвью, или галактики без ветвей, грушевидной формы. Хотя таких объектов не так много, но они имеются. Теория показывает, что помимо вытянутых, веретенообразных фигур равновесия типа эллипсоидов Якоби, звездные системы могут быть несимметричными вдоль своей большой оси, то-есть существуют грушевидные фигуры равновесия. Если такая продольная асимметрия достаточно велика, то тонкий конец будет иметь радиус жирации значительно больше, чем толстый конец. Поэтому центробежная сила вращения будет гораздо больше на тонком конце, чем на толстом и зона неустойчивости с отрывом звезд появится лишь на тонком конце. Такова теоретическая интерпретация «односторонних» галактик.

ДОКЛАД Г. Г. КУЗМИНА и С. А. КУТУЗОВА (ТАРТУ)

МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНЫХ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Большинство звездных систем можно, по-видимому, рассматривать в хорошем приближении как стационарные и самогравитирующие. Поэтому построение моделей стационарных самогравитирующих звездных систем является важной задачей звездной динамики.

До сих пор в основном изучались только модели сферических систем, более же общий случай системы с осевой симметрией оставался мало исследованным.

В докладываемой работе сделана попытка построить модели и для этого более общего случая.

У стационарной звездной системы фазовая плотность зависит от фазы (т. е. координат и скоростей) только посредством консервативных изолирующих (однозначных) интегралов движения. Если же система к тому же и самогравитирующая, то конфигурационная плотность (плотность в обычном пространстве), будучи интегралом фазовой плотности по пространству скоростей, удовлетворяет совместно с гравитационным потенциалом уравнению Пуассона. Для построения модели стационарной самогравитирующей системы нужно найти фазовую плотность как функцию фазы и гравитационный потенциал как функцию координат так, чтобы оба условия выполнялись.

В случае стационарности и осевой симметрии существуют, вообще говоря, два консервативных изолирующих интеграла движения — интеграл энергии и интеграл площадей.

Но если на потенциал наложить еще некоторое дополнительное ограничение, то, как известно, существует еще третий интеграл требуемого типа, в виде квадратичного относительно скоростей интеграла [1]. При наличии трех интегралов возможно трехосное распределение скоростей.

При построении сферических моделей обычно исходили из фазовой плотности как функции интегралов и искали потенциал. Но еще Эддингтон [2] предложил использовать противоположный способ, в котором задается потенциал, или связанная с ним однозначно конфигурационная плотность, и ищется фазовая плотность как функция интегралов, а затем и фазы. Способ Эддингтона является более целесообразным, и мы применили его для построения моделей в общем случае осевой симметрии.

Для получения модели, более или менее соответствующей реальной Галактике, желательно было исходить из формы потенциала, допускающей существование третьего интеграла с тем, чтобы получить трехосное распределение скоростей. Однако, отыскание решений для фазовой плотности как функции трех интегралов представляет некоторые трудности. Поэтому нам пришлось в настоящей работе ограничиться решениями, являющимися функциями только интегралов энергии и площадей и примириться пока с двухосностью распределения скоростей в модели.

Если фазовая плотность зависит только от интегралов энергии и площадей, то конфигурационная плотность выражается через нее следующим образом:

$$\rho=\frac{2\pi}{R}\iint\limits_{v^2\geq 0}\Psi(E,I)\,dE\,dI, \tag{1}$$

причем

$$E=\Phi-\frac{1}{2}(v^2+w^2),\quad I=Rw. \tag{2}$$

Здесь ρ —конфигурационная плотность, Ψ —фазовая плотность, R— расстояние от оси симметрии, Φ —потенциал, v —скорость в меридианной плоскости, w —скорость перпендикулярная ей, E —интеграл энергии (в форме несколько отличающейся от обычной) и I —интеграл площадей.

В формуле (1) ρ выражается как функция Φ и R:

$$\rho=\rho(\Phi,R). \tag{3}$$

Чтобы найти фазовую плотность, мы должны представить ρ в таком виде. Тогда фазовая плотность получается по формуле (1) как решение интегрального уравнения. Физический смысл может иметь, конечно, только неотрицательное решение. При этом нельзя получить однозначного решения, так как нечетная относительно интеграла площадей часть фазовой плотности не вносит вклада в конфигурационную плотность и может выбираться произвольно при выполнении лишь условия, чтобы полная фазовая плотность не сделалась отрицательной. Четная же часть фазовой плотности может быть получена однозначно. Она должна быть неотрицательной.

Решения для четной части фазовой плотности могут быть получены в форме различных рядов. Полагая при малых Φ конфигурационную плотность ρ изменяющейся как $\Phi^{\varkappa}$, имеем следующие ряды для конфигурационной плотности и четной части фазовой плотности:

$$\rho=\Phi^{\varkappa}\sum_{k\geq 0}P_k(\Phi R^2)\Phi^k,$$

$$\Psi=E^{\varkappa-3/2}\sum_{k\geq 0}Q_k(I^2)E^k, \tag{4}$$

где P_k и Q_k полиномы степени k относительно их аргументов. Коэффициенты полиномов Q_k могут быть вычислены по коэффициентам полиномов P_k по формулам, найденным Фрике [3]. Кроме того, можно пользоваться рядами ρ по положительным или отрицательным степеням R и соответствующими рядами для четной части Ψ по положительным и отрицательным степеням I.

Если ρ быстро возрастает с Φ и может считаться стремящимся к бесконечности с приближением к некоторой кривой на плоскости Φ, R как $\Delta\Phi^{-\nu}$, где $\Delta\Phi$ расстояние от кривой по Φ, то можно использовать еще ряды

$$\rho=\Delta\Phi^{-\nu}\sum_{k>0}\eta_k(R)\Delta\Phi^k,$$

$$\Psi=\Delta E^{-\nu-3/2}\sum_{k>0}\vartheta_l(I)\Delta E^l. \qquad (5)$$

Здесь ΔE—расстояние по E от кривой на плоскости E, I, где фазовая плотность становится бесконечной. Эту кривую можно найти, зная кривую бесконечной плотности на плоскости Φ, R. Функции же δ_e могут быть найдены по функциям η_k с $k>l$.

Применение рядов (5) дает решение, которое не является четной функцией интеграла площадей и которое может быть использовано как решение для полной фазовой плотности. Но при надобности может быть, конечно, получена и четная часть решения.

Кроме самой фазовой плотности, представляет интерес получить решения для ее проекций на координатные оси и плоскости в пространстве скоростей, а также для дисперсий скоростей. Эти функции уместно назвать функциями частичного кинематического описания модели, в отличие от фазовой плотности, полностью описывающей модель. Из функций частичного описания легко могут быть получены в виде квадратур проекция фазовой плотности на ось в меридианной плоскости, и соответствующая дисперсия скорости. Для них получаем соответственно

$$F(U,R)=\frac{1}{\pi}\int_0^U\frac{\partial\rho}{\partial\Phi}\frac{d\Phi}{\sqrt{(2U-\Phi)}}, \qquad (6)$$

где

$$U=\Phi-\frac{1}{2}u^2$$

и

$$\sigma_u^2=\frac{1}{\rho}\int_0^\Phi\rho\,d\Phi. \qquad (7)$$

В формуле (6) u — один из компонентов меридианной скорости. Если его взять в z-направлении, то формулы (6) и (7) дают функцию распределения и дисперсию z-компонентов скорости, которые, кстати говоря, у сплющенных моделей слабо зависят от степени трехосности распределения скоростей.

Конкретно в данной работе были применены потенциал и конфигурационная плотность для семейства моделей $n=3$ Кузмина [4]. Эти модели допускают существование третьего интеграла, каковым мы, однако, не смогли пока воспользоваться. Но, кроме того, рассматриваемое семейство моделей обладает и другим замечательным

свойством: при надлежащем выборе единиц оказывается возможным получить $\rho(\Phi,R)$, а следовательно и четную часть фазовой плотности, в виде единых функций для всего семейства. При этом функция $\rho(\Phi,R)$ выражается в конечном виде, а именно:

$$\rho=\Phi\,\frac{2-R^2\Phi^2-\Phi\sqrt{1-R^2\Phi^2}}{(\sqrt{1-R^2\Phi^2}-\Phi)^3} \qquad (8)$$

Согласно формуле (8) ρ возрастает с ростом Φ от нуля, когда $\Phi=0$, до бесконечности, когда знаменатель обращается в нуль. Для показателей $\varkappa$ и ν, характеризующих рост ρ при малых Φ и $\Delta\Phi$, имеем

$$\varkappa=4,\ \nu=3.$$

На основании рядов (4) оказывается возможным заключить, что четная часть фазовой плотности должна быть в данном случае неотрицательной, так что решение для нее имеет физический смысл.

Для получения решения мы воспользовались всеми указанными выше рядами. Они позволили вычислить четную часть фазовой плотности для малых E, малых и больших I и малых ΔE. В промежуточной области значений E, I ряды плохо сходятся или даже вовсе непригодны. Но здесь искомую функцию можно было найти довольно уверенно путем интерполирования. Затем был выполнен переход от четной части фазовой плотности к полной фазовой плотности. Для малых ΔE решение было уже известно, для остальных же областей E,I решение можно было получить с той или иной степенью произвола, полагая фазовую плотность плавно возрастающей с I.

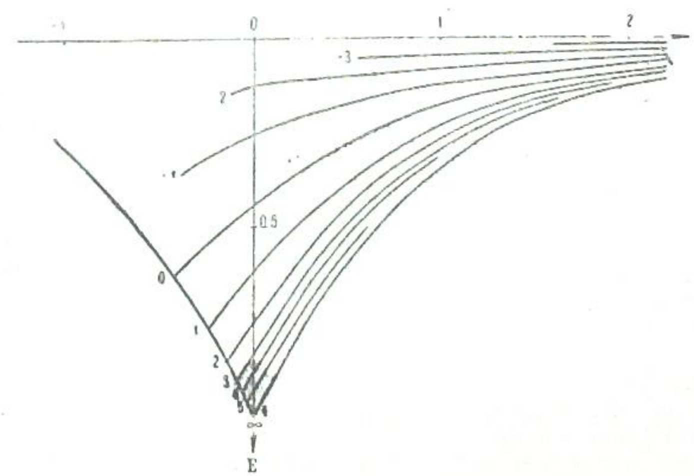

Рис. 1

Результаты вычислений представлены графически на рис. 1 в виде изолиний логарифма фазовой плотности. Диаграмма представляет собой диаграмму Линдблада для рассматриваемого семейства моделей. При помощи диаграммы можно получить распределение скоростей для любой модели семейства в любой точке пространства. При этом используем выражения для интегралов движения и выражения для потенциала через координаты для интересующей нас конкретной модели.

Из рассматриваемого семейства более подробно изучалась модель, соответствующая Галактике. Для выбора параметров этой модели использовались данные о вращении Галактики и о градиенте ускорения в z-направлении в окрестностях Солнца, которые сравнивались с теоретическими выражениями для моделей $n=3$.

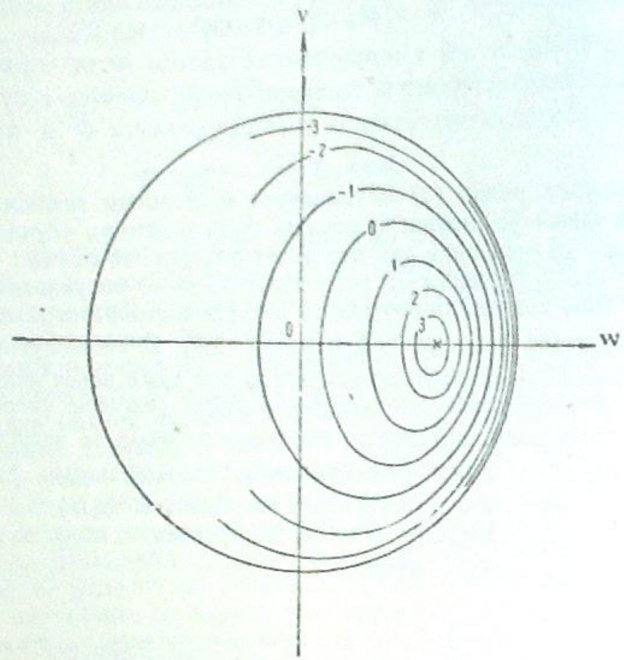

Рис. 2

В полученной модели круговая скорость для окрестностей Солнца равна 190 км/сек, отношение $A/\omega=0{,}64$, а дисперсия компонента меридианной скорости 23 км/сек. Приближенный расчет суммарной дисперсии z-скорости звезд с учетом всех составляющих Галактики дает сходное значение. Однако, чтобы не получилась слишком преуменьшенная дисперсия в R-направлении вследствие двуосности распределения скоростей в модели, мы утолщили модель, соответственно чему дисперсия компонента меридианной скорости увеличилась до 31 км/сек и стала средней между действительными дисперсиями в R и z-направлениях.

На рис. 2 изображены изолинии логарифма фазовой плотности на плоскости $u=0$ в пространстве скоростей, как они получились для окрестностей Солнца в вышеупомянутой «утолщенной» модели. Крестиком показано положение круговой скорости. Как видим, теоретическое распределение скоростей имеет значительное сходство с наблюдаемым суммарным распределением у всех составляющих Галактики вместе взятых. На общую эллипсоидальность распределения накладывается заметная асимметрия. Кроме того, имеет место весьма заметная «усеченность» распределения со стороны больших скоростей. Скорость, начиная с которой плотность становится ничтожно малой, меньше скорости освобождения и грубо соответствует пределу Оорта (круговая скорость +65 км/сек). Интересно отметить, что усеченность распределения скоростей получается хорошо выраженной несмотря на то, что

плотность модели в конфигурационном пространстве убывает с расстоянием от центра модели довольно медленно, так что модель имеет крайне расплывчатые границы.

На рис. 3 изображена кривая распределения компонента меридианной скорости в окрестностях Солнца. Распределение заметно отличается от гауссова и грубо соответствует наблюдаемому суммарному распределению R или z-компонентов скорости.

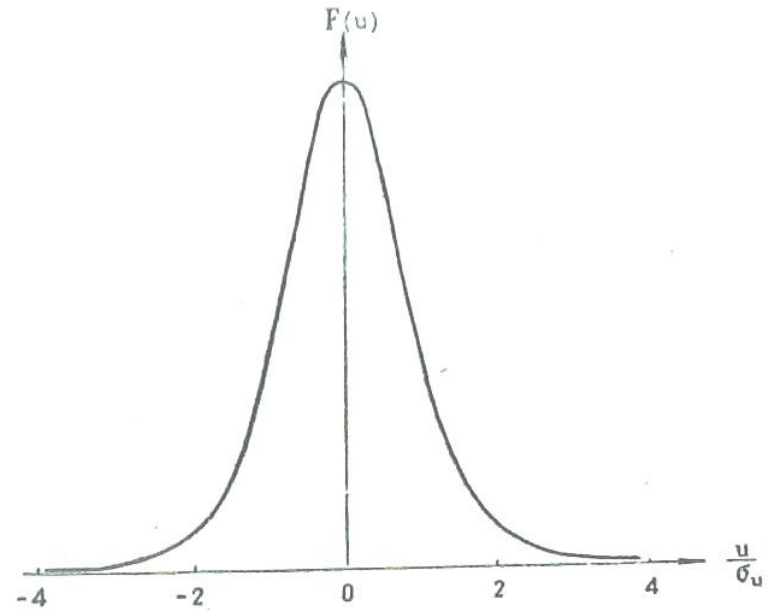

Рис. 3

Следует, однако, подчеркнуть, что несмотря на общее сходство теоретического распределения скоростей с наблюдаемым, имеется все же заметное расхождение. Асимметрия, усеченность и эксцесс теоретического распределения получаются недостаточно большими. Другими словами, в теоретическом распределении плоская и сферическая составляющие Галактики представлены недостаточно, а промежуточные—избыточно. Лучшее согласие можно ожидать получить для моделей с $n<3$. Дальнейшей задачей является поэтому исследование таких моделей. Кроме того, желательно было бы получить решения для фазовой плотности в виде функции трех интегралов.

Нами рассмотрен еще предельный случай модели $n=3$, когда она становится сферической, а Ψ начинает фигурировать как функция только E. Полученная сферическая модель оказалась тождественной с «изохронной» моделью, которую изучил недавно Хенон [5]. В центральных частях модели распределение скоростей получается довольно близким к максвелловскому. Можно думать, что эта модель соответствует реальным сферическим звездным системам значительно лучше, чем хорошо известная модель, основанная на шустеровском законе плотности.

Литература

1. Кузмин Г. Г. Публ. Тартуск. астр. обс. 1953. **32**, 332.
2. Eddington A. S. Mon. Not. 1916, **76**, 572.
3. Fricke W. Astr. Nachr. 1952. **280**, 193.
4. Кузмин Г. Г., Астрон. ж. 1956, **33**, 27.
5. Henon M. Ann. d'astroph. 1959, **22**, 126; 1960, **23**, 476.

ДОКЛАД Г. М. ИДЛИСА (АЛМА-АТА)
ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДИНАМИКИ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ И ИХ ЭРГОДИЧНОСТЬ В СТАЦИОНАРНОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

(Тезисы)

1. Вопреки обычной интерпретации теоремы Джинса, существуют не 6, а 3 и только 3 общего вида фундаментальных независимых первых интеграла движения отдельной звезды, входящие в качестве независимых аргументов в общее выражение для фазовой плотности самогравитирующих звездных систем:

$$\psi=\psi(J_1^*, J_2^*, J_3^*). \qquad (1)$$

2. Эти фундаментальные интегралы должны быть независимы по обобщенным импульсам и по декартовым компонентам скорости.

3. Скобки Пуассона для любой пары фундаментальных интегралов должны тождественно обращаться в нуль.

4. Каждой конкретной функциональной форме этих фундаментальных интегралов соответствует однозначно определенный градиент потенциала, декартовы компоненты которого находятся в результате решения системы линейных алгебраических кинетических уравнений с отличным от нуля определителем, и определенная фазовая плотность, входящая в качестве искомой подинтегральной функции в трехмерное интегральное уравнение Пуассона с определенным свободным членом и с определенным отличным от нуля — ядром.

5. Для любой самогравитирующей звездной системы с данным потенциалом фундаментальные интегралы сами могут рассматриваться в качестве соответствующих новых обобщенных импульсов, сопряженные которым новые обобщенные координаты не входят в новую функцию Гамильтона, т. е. являются циклическими. Поэтому искомые фундаментальные интегралы, в силу их единственности, в принципе всегда могут быть найдены с помощью известного в теоретической механике общего метода преобразования исходных канонических переменных к новым, чтобы все новые обобщенные координаты (и время) были циклическими.

6. Рассматриваемые фундаментальные интегралы являются зависимыми по обобщенным и декартовым координатам.

7. Обязательное существование трех фундаментальных интегралов означает, что наблюдаемая трехосность распределения пекулярных скоростей звезд в Галактике должна быть общим правилом, а не результатом каких бы то ни было особенностей в строении или эволюции нашей звездной системы.

8. В стационарном осесимметричном случае один фундаментальный интеграл движения отдельной звезды является интегралом энергии и связан со стационарностью системы, второй — интеграл кинетического момента, соответствующий симметрии относительно некоторой оси, а третий для своего существования, вопреки общераспространенным, утверждениям, не требует каких бы то ни было специальных ограничений стационарного осесимметричного потенциала самогравитирующих звездных систем, но его конкретная функциональная форма зависит от характера потенциала, всегда соответствуя зеркальной симметрии этих систем относительно экваториальной плоскости.

9. Стационарные осесимметричные самогравитирующие звездные системы с произвольным потенциалом могут, вопреки широко распространенным утверждениям, рассматриваться как эргодические тогда и только тогда, когда принимают во внимание наряду с интегралом энергии не только интеграл кинетического момента относительно оси симметрии, но и соответствующий всегда существующий и единственный третий независимый стационарный осесимметричный однозначный фундаментальный интеграл движения отдельной звезды. Эти три интеграла определяют область, заполняемую орбитой рассматриваемой звезды в текущей меридианальной плоскости и имеющую вид криволинейного прямоугольника, вписанного в овальный контур нулевой меридианальной скорости. Контопулос нашел соответствующие вершины такого четырехугольника эмпирически в результате непосредственного приближенного вычисления двух галактических орбит (Солнца и другой звезды) на электронной счетной машине, но координаты этих вершин определяются с точностью до 1% аналитически путем замены точного третьего фундаментального интеграла квадратичным квазиинтегралом.

ДОКЛАД Г. Г. КУЗМИНА (ТАРТУ)
К ТЕОРИИ ТРЕТЬЕГО ИНТЕГРАЛА ДВИЖЕНИЯ ЗВЕЗД

При стационарном осесимметричном потенциале имеются два кон-
серватившых изолирующих (однозначных) интеграла движения звезд —
интеграл энергии и интеграл площадей. Если же наложить на потен-
циал некоторое дополнительное ограничение, то можно получить, как
известно, еще третий интеграл такого типа [1]. Интеграл квадратичен
относительно скоростей, но отличается от интеграла энергии.

Однако, третий интеграл удается получить и в общем случае осевой
симметрии в форме ряда по степеням координат и скоростей.

Если зафиксировать значения интеграла площадей I то задача о
движении звезды сводится к двумерной, причем роль потенциала играет

$$\Phi'=\Phi-\frac{1}{2}\ \frac{I^2}{R^2},$$

где R —расстояние от оси симметрии и Φ —потенциал в обычном
смысле.

Чтобы получить разложение для третьего интеграла, представляем
Φ' в виде

$$\Phi'=\Phi'_0+\Phi'_1, \qquad (2)$$

где Φ'_0—потенциал, для которого третий интеграл известен. Этот по-
тенциал и соответствующее движение уместно назвать невозмущенны-
ми. Из условия неизменности значения интеграла движения получаем
тогда для искомого интеграла L ряд