

Цитированная литература

1. Киладзе Р.И. Об одном классе орбит в ограниченной задаче трех тел. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1965, 32, 209.
2. Киладзе Р.И. К вопросу о суточном вращении планет. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1965, 32, 223.
3. Steffensen I.P. On the restricted problem of three bodies. Kongel. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd. 1956, 30, N.18.

К ВОПРОСУ О СУТОЧНОМ ВРАЩЕНИИ ПЛАНЕТ. III.

Р.И.КИЛАДЗЕ

Введение. В предыдущих работах [1], [2], [3], автором рассмотрен процесс приобретения вращательного момента планетой при столкновении её с частицами, движущимися по квазикруговым орбитам (в ограниченной задаче трех тел). Был сделан вывод, что такие частицы передают планете отрицательный момент вращения, т.е. планета, сформированная из частиц, движущихся по квазикруговым орбитам, должна обладать обратным вращением.

В настоящей работе проведено аналогичное исследование для случая частиц, движущихся по эллиптическим орбитам с небольшим эксцентриситетом.

Недавно в литературе появились подобные работе, выполненные для малых значений массы планеты [4], [5]. При этом автор для вычисления начальных данных пользуется другими принципами, по сравнению с изложенным ниже. Тем не менее, результаты этих работ качественно совпадают с результатами наших вычислений, что и следовало ожидать.

Определение начальных данных. Строго говоря, понятие большой полуоси, эксцентриситета и других элементов орбиты имеет смысл только в случае двух тел. В более сложных задачах появляется некоторый произвол, связанный с проблемой выбора системы координат.

В целях преодоления указанной трудности будем придерживаться принципов, аналогичных изложенным в [1].

Как и в [1], рассмотрим движение тела исчезающе малой массы во вращающейся системе координат, относительно которой Солнце имеет координаты (0,0), а координаты планеты суть (-1, 0) в течение всего времени. Предполагается, что планета движется по круговой орбите. За единицу массы выберем сумму масс Солнца и планеты. Массу планеты обозначим через μ .

При этих условиях интегралу Якоби можно придать следующий вид:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1-\mu)\left(R^2 + \frac{z^2}{R}\right) + \mu\left(z^2 + \frac{z}{R}\right) - C, \quad (1)$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2)$$

$$z = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

Рассмотрим движение частицы в некоторый момент, когда $y = 0$ и $x > 0$.

В этом случае интеграл Якоби принимает вид:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1-\mu)\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) + \mu\left[(x+1)^2 + \frac{2}{x+1}\right] - C. \quad (3)$$

Функция, стоящая в правой части (3), имеет один минимум в интервале $(0, \infty)$. Соответствующая координата A , очевидно, должна являться корнем уравнения:

$$(1-\mu)\left(A - \frac{1}{A^2}\right) + \mu\left[A+1 - \frac{1}{(A+1)^2}\right] = 0, \quad (4)$$

Откуда

$$A = 1 - \frac{7}{12}\mu - \frac{1127}{20736}\mu^3 + \dots \quad (5)$$

В дальнейшем удобнее будет пользоваться интегралом Якоби в форме:

$$C_1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (x-A)^2 \left[1 + \frac{2(1-\mu)}{A^2 x} + \frac{2\mu}{(A+1)^2(x+1)}\right], \quad (6)$$

где

$$C_1 = C - (1-\mu)\left(A^2 + \frac{2}{A}\right) - \mu\left[(A+1)^2 + \frac{2}{A+1}\right]. \quad (7)$$

Чтобы выразить величины x , $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ через элементы орбиты a, e, E , поступим следующим образом.

Рассмотрим предельный случай, когда $\mu \rightarrow 0$. При этом длина радиус-вектора ρ , радиальная составляющая скорости $\frac{d\rho}{dt}$ и её тангенциальная составляющая V_t связаны с элементами орбиты следующими соотношениями:

$$\rho = a \cdot (1 - e \cdot \cos E), \quad (8)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\sqrt{a} \cdot e \cdot \sin E}{\rho}, \quad (9)$$

$$V_t = \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\rho} \cdot \rho. \quad (10)$$

В случае круговых орбит вместо (10) имеем:

$$V_c = \frac{1}{\sqrt{a}} - a. \quad (11)$$

Формулы (8), (9), (10) и (11) легко получаются путем рассмотрения задачи двух тел.

Аналогичные зависимости будем искать для более общего случая, когда $\mu \neq 0$.

Для этого воспользуемся интегралом Якоби для случая двух тел:

$$C_1 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + V_t^2 = \rho^2 + \frac{2}{\rho}, \quad (12)$$

который получается из (6) при $\mu = 0$ и заменой величин x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, на ρ , $\frac{d\rho}{dt}$ и V_t , соответственно. При установлении зависимости величин x , $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ от величин ρ , $\frac{d\rho}{dt}$, V_t (или a, e, E) мы будем руководствоваться следующими принципами.

1. Существует взаимнооднозначная зависимость между величинами x и ρ в интервале $(0, \infty)$; причем, когда $\mu \rightarrow 0$, то $x \rightarrow \rho$.

2. В рассматриваемом нами частном случае (когда $y = 0$) $\frac{dx}{dt}$ соответствует радиальной составляющей скорости, а $\frac{dy}{dt}$ - её тангенциальной составляющей.

3. Если в задаче двух тел при некотором положении малого тела тангенциальная составляющая её скорости численно равна круговой скорости для данной точки пространства, то в соответствующей задаче трех тел величина $\frac{dy}{dt}$ также равна скорости движения по квазикруговой орбите, проходящей через данную точку.

4. Постоянная Якоби C_1 является функцией от величин μ, a, e , но не зависит от E .

Для установления зависимости между величинами x и ρ приравняем правые части (6) и (12):

$$(x-A)^2 \left[1 + \frac{2(1-\mu)}{A^2 x} + \frac{2}{(A+1)^2(x+1)}\right] = (\rho-1)^2 \left(1 + \frac{2}{\rho}\right). \quad (13)$$

Легко видеть, что принцип I удовлетворяется теми решениями уравнения (13), для которых выполняются условия:

$$\begin{cases} x > A, & \text{когда } \rho > 1 \text{ и} \\ x < A, & \text{когда } \rho < 1. \end{cases} \quad (14)$$

Величину ρ , определенную таким образом, назовем приведенной величиной радиуса-вектора.

Для нахождения величины $\frac{dx}{dt}$ дифференцируем равенство (13):

$$\left\{(1-\mu)\left(x - \frac{1}{x^2}\right) + \mu\left[x+1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\right\} \frac{dx}{dt} = (\rho - \frac{1}{\rho^2}) \frac{d\rho}{dt}; \quad (15)$$

при этом мы воспользовались принципом 2.

Подставляя (9) в (15), находим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1 - \frac{1}{\rho^2}) \sqrt{a} \cdot e \cdot \sin E}{(1-\mu)\left(x - \frac{1}{x^2}\right) + \mu\left[x+1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right]} \quad (16)$$

Величина $\frac{dy}{dt}$ получается подстановкой (13) в (6):

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{(\rho-1)^2 \left(1 + \frac{2}{\rho}\right) - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - C_1. \quad (17)$$

Для определения величины C_1 воспользуемся принципом 3. Применяя данный принцип к (10) и (11), находим:

$$\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\rho_0} - \rho_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} - \rho_0, \quad (18)$$

откуда

$$\rho_0 = a(1 - e^2). \quad (19)$$

Подстановка (19) в (8) дает:

$$\cos E_0 = e. \quad (20)$$

Здесь, как и в дальнейшем, нулевым индексом отмечены величины, относящиеся к точке орбиты, где тангенциальная составляющая скорости равна круговой скорости.

Для установления зависимости $\frac{dy}{dt}$ от ρ в случае квазикруговых орбит воспользуемся (14) и (22) из [1], которые в случае, когда $y = 0$, принимают вид:

$$v^2 \frac{dz}{du} = x(1 + 2v)^2 + \mu - \frac{1 - \mu}{x^2} - \frac{\mu}{(x+1)^2}, \quad (21)$$

$$v \frac{dx}{du} = -\frac{7}{2}\mu + \frac{7}{2}\mu^2 - \frac{4655}{384}\mu^3 + \mu v \left(\frac{15}{4} - \frac{2471}{48}\mu \right) + \mu v^2 \left(-\frac{107}{6} + \frac{19319}{36}\mu \right) + \frac{883}{12}\mu v^3 - \frac{42335}{162}\mu v^4, \quad (22)$$

где

$$v = \frac{1}{2x} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (23)$$

Исключив из (21) и (22) $\frac{dx}{du}$ и используя (13) и (23), получаем формулу, аналогичную (II):

$$\frac{dy}{dt} = \left(1 - \frac{7}{12}\mu + \frac{371}{1152}\mu^2 \right) P + \left(\frac{479}{864}\mu - \frac{25193}{3456}\mu^2 \right) P^2 - \frac{1229}{1296}\mu P^3 + \frac{38627}{31104}\mu P^4 - \frac{2545}{2392}\mu P^5 + \dots \quad (24)$$

Здесь введено обозначение:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\rho}} - \rho. \quad (25)$$

Формула (24), очевидно, устанавливает также зависимость между $\frac{dy}{dt}$ и ρ_0 .

Подставляя значения величин ρ_0 , $\frac{dx_0}{dt}$ и $\frac{dy_0}{dt}$, — определяемых с помощью (13), (16), (19), (20) и (24), — в (17), получим величину C_I .

После этого, воспользовавшись принципом 4, с помощью формулы (17) можно найти величину $\frac{dy}{dt}$ для различных значений E .

Практически, когда ρ мало отличается от единицы, вместо (13) удобнее пользоваться приближенным равенством, являющимся решением (13) относительно x :

$$x = A + m \left(1 - \frac{7}{24}\mu - \frac{7}{1152}\mu^2 - \frac{49}{27648}\mu^3 \right) + m^2 \left(\frac{25}{144}\mu + \frac{7}{3456}\mu^2 \right) + m^3 \left(-\frac{25}{288}\mu + \frac{185}{4472}\mu^2 \right) + \frac{59}{1728}\mu m^4 - \frac{1}{128}\mu m^5. \quad (26)$$

Здесь введено обозначение:

$$m = \rho - 1. \quad (27)$$

Аналогично, вместо (16) можно приближенно считать:

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ 1 - \frac{7}{24}\mu - \frac{7}{1152}\mu^2 - \frac{49}{27648}\mu^3 + \left(\frac{25}{72}\mu + \frac{7\mu^2}{1728} \right) m + \left(-\frac{25}{96}\mu + \frac{185}{13824}\mu^2 \right) m^2 + \frac{59}{432}\mu m^3 - \frac{5}{128}\mu m^4 \right\} \frac{\sqrt{ae} \sin E}{\rho}. \quad (28)$$

И, наконец, подставляя (19), (24) и (28) в (17), — с учетом (25), — получим:

$$C_I = \frac{1}{a} + 2\sqrt{\rho_0} - 3 + \mu \rho_0^2 \left[\left(\frac{7}{6} - \frac{63}{64}\mu \right) + \left(-\frac{479}{432} + \frac{19733}{1296}\mu \right) \rho_0 + \frac{1229}{648}\rho_0^2 - \frac{38627}{15552}\rho_0^3 + \frac{2548}{1290}\rho_0^4 \right] + \mu \frac{e^2}{\rho_0} \left[\left(\frac{7}{12} - \frac{7}{96}\mu \right) + \left(-\frac{25}{36} + \frac{7}{36}\mu \right) m_0 + \left(\frac{25}{48} - \frac{1235}{6912}\mu \right) m_0^2 - \frac{59}{216}m_0^3 + \frac{5}{64}m_0^4 \right]. \quad (29)$$

Следовательно, начальные данные находятся в следующем порядке: формула (8) дает величину ρ , посредством которой получаем x и $\frac{dx}{dt}$ с помощью (26) и (16) или (28); далее, из (19) получаем ρ_0 , а с помощью (29) вычисляем C_I , после чего из (17) получается $\frac{dy}{dt}$.

В ы б о р о р б и т. Как было показано в работах [2], [3], [4], частицы, движущиеся по квазикруговым орбитам, встречают планету в виде нескольких потоков. В каждом потоке можно выделить одну орбиту, двигающуюся по которой, частица приносит планете нулевой момент; в конечном же счете частицы, приносящие отрицательный момент, оказываются в большинстве.

Посмотрим, как обстоит дело с частицами, движущимися по эллиптическим орбитам с небольшим эксцентриситетом.

В настоящей работе будут рассмотрены лишь орбиты, имеющие большие полуоси, равные приведенному радиусу квазикруговой орбиты, двигающейся по которой, частица имеет нулевой момент относительно планеты при встрече с ней. Из результатов работ [2], [3] для каждого значения массы (с помощью интерполирования) можно получить по два значения начальной координаты X_i , соответствующих подобным орбитам. Переход к соответствующему значению a можно осуществить с помощью формулы (13), предварительно заменив в ней ρ на a .

Значения величин a , полученных таким путем для различных μ , даны в табл. I.

μ	Таблица I			
	x_1	x_2	a_1	a_2
10 ⁻³				
10 ⁻⁴	0.884 351 0	I.122 575 0	0.884 898 4	I.123 191 8
10 ⁻⁵	0.939 382 1	I.063 380 4	0.939 438 6	I.063 440 5
10 ⁻⁶	0.970 271 7	I.030 443 2	0.970 277 4	I.030 449 1
	0.985 853 7	I.014 317 3	0.985 854 3	I.014 317 9

Рассмотрим в задаче двух тел совокупность частиц, движущихся по орбитам, имеющим равные большие полуоси и эксцентриситеты.

Легко видеть, что во вращающейся системе координат соответствующее семейство орбит можно получить путем поворота какой-нибудь орбиты на некоторый угол α_0 относительно начала координат (сдвигом орбиты по азимуту).

При повороте на некоторый угол (обозначим его через $\Delta\alpha_0$), траектория частицы вновь совпадет сама с собой. Нетрудно видеть, что

$$\Delta\alpha_0 = 2\pi(1 - a^{3/2}). \quad (30)$$

Совокупность орбит, для которых величина α_0 меняется от 0 до $\Delta\alpha_0$, очевидно, охватит все орбиты, имеющие заданные значения a и e . При этом, если большие полуоси этих орбит ориентированы в пространстве случайным образом и если моменты прохождения частиц через перигелий являются случайными величинами, то функция распределения орбит по α_0 должна быть постоянной величиной.

Если удастся построить функцию зависимости величины кинетического момента частицы в точке наибольшей близости к планете от α_0 (при постоянном a и e):

$$q_m = f(\alpha_0), \quad (31)$$

то средний момент, приносимый всеми частицами данного потока, будет:

$$\bar{q}_m = \frac{1}{\Delta\alpha_0} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \Delta\alpha_0} f(\alpha_0) d\alpha_0, \quad (32)$$

где $\Delta\alpha_0$ определяется из (30).

Полный момент, приносимый частицами данного потока в единицу времени, будет равен (с точностью до постоянного множителя, зависящего от плотности вещества в пространстве) произведению выражения (32) на среднюю относительную скорость частиц \bar{V} :

$$Q = \bar{V} \cdot \bar{q}_m \quad (33)$$

Величину \bar{V} можно вычислить по формуле:

$$\bar{V} = \ell \left(\frac{1}{a^{3/2}} - 1 \right), \quad (34)$$

где

$$\ell = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (35)$$

является длиной эллиптической орбиты.

Подставляя (30), (32), (34) в (33), получаем:

$$Q = \frac{1}{2\pi \sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \Delta\alpha_0} f(\alpha_0) d\alpha_0 = \frac{1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4}{\sqrt{a}} \int_0^{\Delta\alpha_0} f(\alpha_0) d\alpha_0 \quad (36)$$

Практически, при построении орбит, вместо зависимости (31) получаем зависимость величины q_m от эксцентрической аномалии E . Чтобы получить зависимость вида (31), необходимо установить зависимость α_0 от E .

Рассмотрим с этой целью изменение угла d между большой полуосью орбиты и осью X с изменением времени t в задаче двух тел. Для определенности будем отсчитывать время с момента прохождения частицы через перигелий; это означает, что $\alpha_0 = 0$ для частицы, которая пересекает ось X при прохождении через перигелий. Так как среднее движение планеты считаем равным единице, то искомой зависимостью будет:

$$d = \alpha_0 + t. \quad (37)$$

Уравнение Кеплера при этом принимает вид:

$$E - e \cdot \sin E = a^{-3/2} t. \quad (38)$$

Очевидно, в момент пересечения частицей оси X величина α_0 будет равна величине истинной аномалии ν :

$$\alpha_0 = \nu. \quad (39)$$

Исключая из (37), (38) и (39) величины d и t , получим:

$$\alpha_0 = \nu - a^{3/2} (E - e \cdot \sin E). \quad (40)$$

Величину ν можно определить с помощью формулы, известной из теоретической астрономии:

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (41)$$

Формулы (40) и (41) устанавливают искомую зависимость α_0 от E . В случае небольших e вместо (41) удобнее пользоваться формулой:

$$\operatorname{tg} \frac{\nu - E}{2} = \frac{e \cdot \sin E}{1 + \sqrt{1 - e^2} - e \cdot \cos E} = \frac{\delta \sin E}{1 - \delta \cos E}, \quad (42)$$

где

$$\delta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}. \quad (43)$$

Руководствуясь принципами, изложенными в предыдущей главе, формулы (40), (41), (42) и (43) можно распространить также и на задачу трех тел.

В таблице 2 приведено несколько значений величин α_0 и q_m для $\mu = 0.001$, $e = 0.05$ и двух значений величины a , взятых из табл. I. Аналогичные расчеты проведены также для значений эксцентриситета: $e = 0.03, 0.01$ и 0.003 (при фиксированном значении величины большой полуоси). Всего рассчитано 125 орбит по данной программе.

Таблица 2

E	$a = 0.884\ 898\ 4$		$a = 1.123\ 191\ 8$	
	α_0	$q_m \cdot 10^4$	α_0	$q_m \cdot 10^4$
-3.141 593	-0.526 483	- 17	+0.598 055	+ 60
-2.390 323	-0.464 895	+ 19	+0.378 509	+239
-1.620 734	-0.363 075	+101	+0.199 194	- 37
-0.822 024	-0.205 526	+161	+0.075 608	+ 26
0.000 000	0.000 000	- 36	0.000 000	+143
+0.822 024	+0.205 526	+118	-0.075 608	+190
+1.620 734	+0.363 075	- 1	-0.199 194	+109
+2.390 323	+0.464 895	- 30	-0.378 509	- 28
+3.141 593	+0.526 483	- 17	-0.598 055	+ 60

На рис. 1 приведены графики зависимости величины $\frac{q_m}{e}$ от α_0 для семейства орбит $a=0.8848984$ при различных значениях e . Как видно из рис. 1, при малых эксцентриситетах график представляет собой кривую, похожую на синусоиду, имеющую один максимум и один минимум в интервале $[-\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\alpha_0}{2}]$. При увеличении эксцентриситета орбит, на месте минимума начинает появляться вторичный максимум, который уже при умеренном значении эксцентриситета (в данном случае 0.03), сильно меняет вид функции $q_m(\alpha_0)$ вплоть до того, что при $e=0.05$ значение $q_m=0$ достигается для четырех значений α_0 .

Аналогичная картина наблюдается для семейства орбит, соответствующих $a=1.123\ 191\ 8$ (рис. 2).

Как видно из рис. 1 и рис. 2, при сравнительно небольших значениях эксцентриситета, количество частиц, имеющих положительный кинетический момент при приближении к планете, существенно больше количества частиц с отрицательным кинетическим моментом. Данный эффект вызван следующим обстоятельством.

Как было отмечено в [1], движение частицы во вращающейся системе координат можно представить в виде суммы двух слагаемых: поступательного движения некоторой фиктивной точки, вокруг которой частица совершает вращательное движение по некоторому овалу (в первом приближении его можно изобразить эллипсом с отношением осей 1:2). Размер овала зависит от эксцентриситета орбиты, а направление движения (вращения) частицы — обратное относительно направления движения вокруг Солнца. По этой причине частицы, движущиеся по орбитам с достаточно большим эксцентриситетом, во вращающейся системе координат описывают кривые с петлями.

Для определенности рассмотрим частицы, в начальный момент движущиеся по орбитам с $a < 1$ и, следовательно, догоняющие планету во

время движения. При этом вблизи планеты из-за возмущений, (производимых планетой) эксцентриситеты орбит растут и частицы начинают описывать петли.

Из-за этого те частицы, которые при невозмущенном движении, имея большой отрицательный момент, прошли бы далеко от планеты, в её окрестности меняют направление движения на обратное, одновременно приближаясь к ней и, в результате, вблизи планеты оказываются обладателями положительного кинетического момента (например, частица соответствующая $\alpha_0 = +0.205\ 526$ на рис. 3).

Что же касается частиц, имеющих при приближении к планете положительный момент (например, частица, соответствующая $\alpha_0 = -0.205\ 526$ на рис. 3), то при изменении направления движения они начинают удаляться от планеты и поэтому вблизи неё будут иметь опять-таки положительный кинетический момент.

Для частиц, движущихся по орбитам, имеющим $a > 1$, наблюдается аналогичное явление, в результате чего частицы, соответствующие $\alpha_0 = -0.3 \div +0.1$ в окрестности планеты также меняют знак кинетического момента с отрицательного на положительный.

Соответствующие траектории имеют вид, симметричный с картиной, изображенной на рис. 3 и мы их здесь не приводим.

Очевидно, если произвести вычисления по (36), в результате получится положительная величина для Q . Однако, формулу (36) можно применять только для чрезвычайно малых значений эксцентриситета, когда можно считать, что все частицы данного роя сталкиваются с планетой.

В большинстве случаев, конечно, с планетой сталкиваются не все частицы, а только те из них, которые при своем движении приблизятся к ней на расстояние меньше, чем радиус планеты r_0 .

В [2] было показано, что кинетический момент таких частиц заключен в пределах:

$$r_0^2 - \beta \leq q_m \leq r_0^2 + \beta, \quad (44)$$

где введено обозначение:

$$\beta = \sqrt{2\mu r_0 + (3 - 4\mu + \mu^2 - C_1) r_0^2 + r_0^4} \quad (45)$$

здесь μ обозначает массу планеты, а C_1 является постоянной Якоби. В таком случае интегрирование по $d\alpha_0$ в (36) следует выполнять в тех интервалах α_0 , которым соответствуют значения q_m , определенные неравенствами (44). Формулы (32) и (36) при этом можно преобразовать следующим образом.

Допустим, нами установлена зависимость вида:

$$q_m = r_0^2 + B(\alpha_0 - \alpha_0) + C(\alpha_0 - \alpha_0)^2 + D(\alpha_0 - \alpha_0)^3. \quad (46)$$

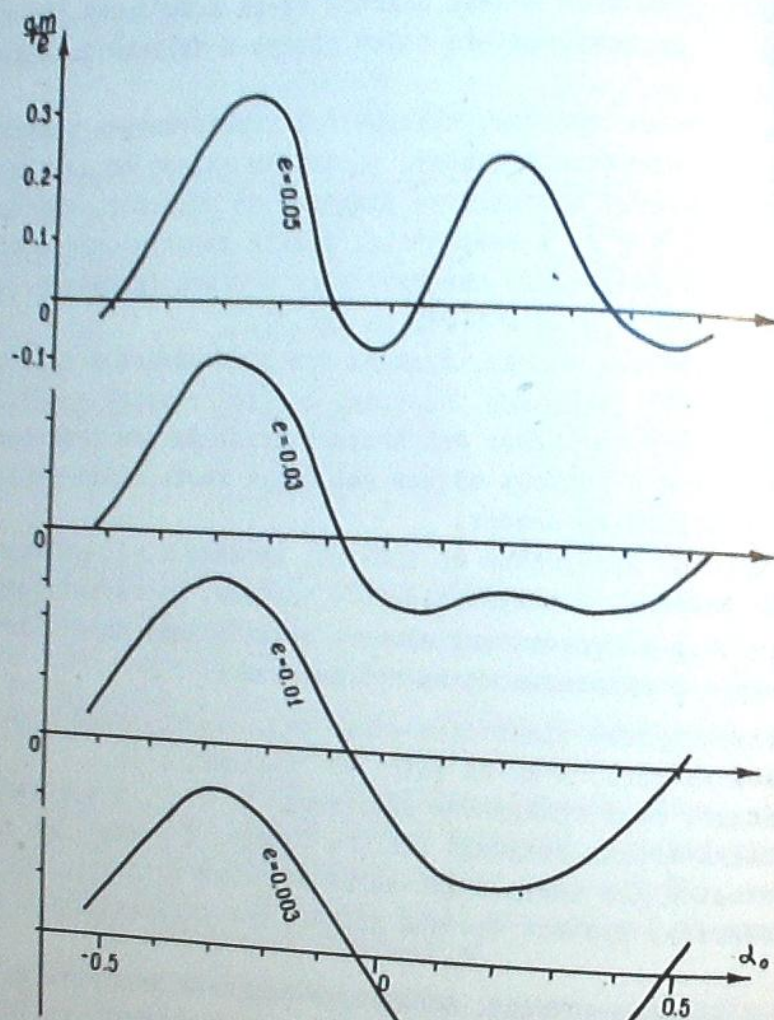


Рис.1

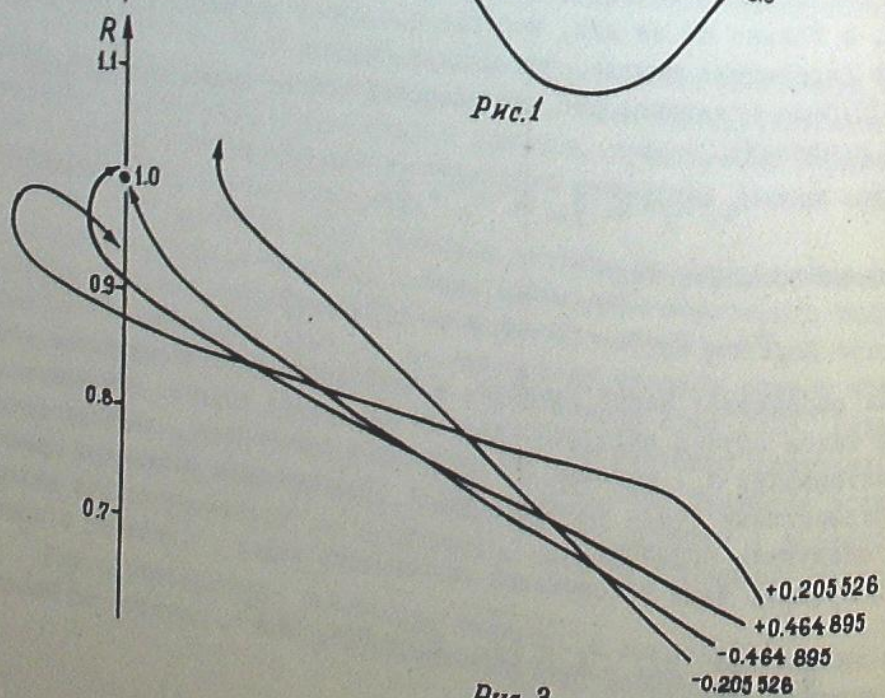


Рис.3

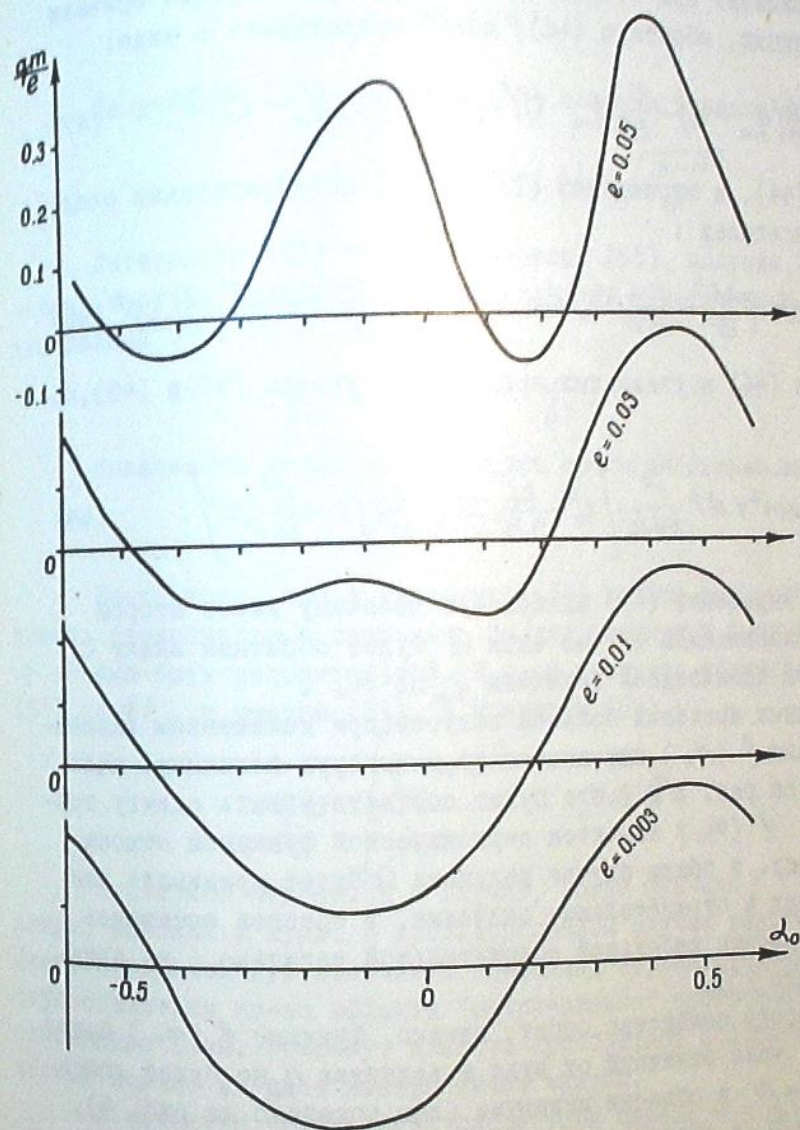


Рис.2

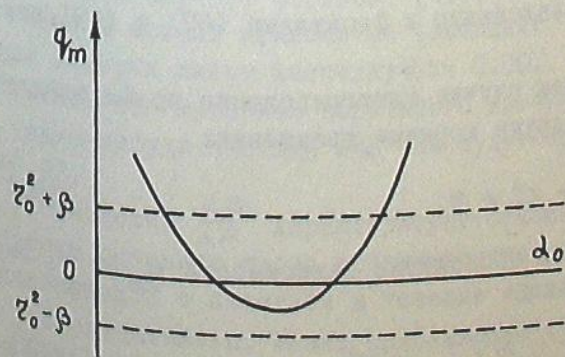


Рис.4

для значений α_0 , мало отличающихся от величины A_0 .

Если коэффициент при втором члене, $-B$, — достаточно большая величина, то функцию, обратную (46), можно представить в виде:

$$\alpha_0 = A_0 + \frac{1}{B}(q_m - \tau_0^2) - \frac{C}{B^2}(q_m - \tau_0^2)^2 + \left(\frac{2C^2}{B^3} - \frac{D}{B^2}\right)(q_m - \tau_0^2)^3 + \dots \quad (47)$$

Согласно (44), в выражениях (32) и (36) интегрирование следует выполнять в пределах:

$$A_0 - \frac{1}{B}\beta - \frac{C}{B^2}\beta^2 - \left(\frac{2C^2}{B^3} - \frac{D}{B^2}\right)\beta^3 \leq \alpha_0 \leq A_0 + \frac{1}{B}\beta - \frac{C}{B^2}\beta^2 + \left(\frac{2C^2}{B^3} - \frac{D}{B^2}\right)\beta^3 \quad (48)$$

Интегрируя (46) в указанных пределах, с учетом (47) и (48), получим:

$$Q = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \frac{\beta}{|B| \sqrt{a}} \left[\tau_0^2 - \frac{2C}{3B^2}\beta^2 + \frac{4C}{B^3} \left(D - \frac{C^2}{B}\right) \beta^4 \right]. \quad (49)$$

Так как в выражении (49) наибольшую величину имеет второй член, то в рассматриваемом случае знак Q будет обратным знаку C , т.е. знаку второй производной величины q_m по α_0 .

Для различных значений большой полуоси (при неизменном эксцентриситете) функция $f(\alpha_0)$ изменяется на некоторую величину, мало зависящую от α_0 (на рис. 1 и 2 это будет соответствовать сдвигу графика по оси Y). $f(\alpha_0)$ является периодической функцией относительно α_0 ; поэтому, в общем случае величина Q будет принимать как положительные, так и отрицательные значения, в среднем оставаясь равной нулю или весьма небольшой положительной величине (за счет члена, содержащего τ_0^2).

Для некоторого семейства орбит, однако, функция $f(\alpha_0)$ будет иметь экстремум, мало отличный от нуля и величина q_m не будет достигать значения $\tau_0^2 - \beta$ в области минимума (как показано на рис. 4), или значения $\tau_0^2 + \beta$ в области максимума.

В таком случае коэффициент B в выражении (46) будет малым по сравнению с другими членами разложения и формулами (47) и (49) нельзя пользоваться.

Легко видеть, что в таком случае интегрирование по $d\alpha_0$ следует выполнять в промежутке между двумя корнями уравнения:

$$f(\alpha_0) = \tau_0^2 + \beta. \quad (50)$$

Будем считать, что в этом промежутке зависимость q_m от α_0 выражается параболой:

$$q_m = \tau_0^2 + F + G(\alpha_0 - H)^2. \quad (51)$$

Величина F будет при этом заключена в интервале:

$$-\beta \leq F < \beta \quad (52)$$

Из условия (50) с учетом (51) получим пределы интегрирования:

$$H - \sqrt{\frac{\beta - F}{G}} \leq \alpha_0 \leq H + \sqrt{\frac{\beta - F}{G}}. \quad (53)$$

Интегрируя (51) по $d\alpha_0$ в пределах (53), получим, что рассматриваемые частицы приносят планете удельный кинетический момент, в среднем равный:

$$\bar{q}_m = \tau_0^2 + \frac{2}{3}F + \frac{1}{3}\beta. \quad (54)$$

Количество таких частиц будет пропорционально величине:

$$N = \sqrt{\frac{\beta - F}{G}}. \quad (55)$$

Из-за того, что в выражении (54) только величина F может принимать отрицательные значения, то для различных α суммарная величина q должна быть положительной. В этом нетрудно убедиться, интегрируя (54) по dF , с учетом (55), в пределах (52):

$$\bar{q} = \frac{\int_{-\beta}^{\beta} \bar{q}_m N dF}{\int_{-\beta}^{\beta} N dF} = \tau_0^2 + \frac{\beta}{5}. \quad (56)$$

Сказанное относится к случаю, когда функция $f(\alpha_0)$ имеет минимум, близкий к нулю. В противоположном случае величина \bar{q} будет иметь отрицательную величину. Последний вариант, однако, будет редко осуществляться из-за эффекта "закручивания" орбит вблизи планеты, описанного выше. Поэтому, планета приобретает положительный кинетический момент за счет именно таких частиц.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай $\mu = 0.001$, $e = 0.05$, $\tau_0 = 0.0001$ (приблизительно такие значения μ и τ_0 имеет Юпитер).

В этом случае, согласно (45), $\beta = 0.0005$, откуда $\bar{q} = 10^{-4}$. Такой момент приносится частицами, интервал возможных значений для которых имеет величину $2\beta = 0.001$. С другой стороны, из рис. 1 и 2 видно, что интервал возможного изменения величины F (при условии, что какие-нибудь частицы все еще будут сталкиваться с планетой равен $\Delta F = 0.02$).

Отношение $\frac{2\beta}{\Delta F}$ характеризует отношение массы частиц, приносящих к планете основную часть кинетического момента, к массе всех частиц, сталкивающихся с планетой в течение единицы времени.

Следовательно, можно приближенно считать, что производная полного кинетического момента по массе равна:

$$\frac{dQ}{d\mu} = \bar{q} \frac{2\beta}{\Delta F} = 5 \cdot 10^{-6}. \quad (57)$$

Подобные рассуждения, конечно, имеют довольно грубый характер и величина $\frac{dQ}{d\mu}$ из (57) может быть верной только по порядку величины. Тем не менее, она находится в удовлетворительном согласии с величиной $\frac{Q}{\mu}$ для Юпитера, равной $2 \cdot 10^{-5}$.

Вопрос о количественном согласии наших расчетов с наблюдениями будет подробнее рассмотрен в очередной статье.

Январь, 1969.

ՅԼՆՏՅԱԾԱՆ ԲՐԱՆԱԾՅԱԿԱՆ ԳՐԱԾՆՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ . . . III.

Բ. Կիլաձե
(ըզմոլումը)

Շնչվողովում շրջանաձև շարժումը մոտակա մարմնի մասով մշտնջ ճանաչվող մոտակա մասնա բաժնի 10^{-3} -մասով մշտնջ շրջանաձև շարժումը ճանաչվողովում շրջանաձև շարժումը մոտակա մասով մշտնջ շրջանաձև շարժումը մոտակա մասով $e \leq 0.05$.

ON THE AXIAL ROTATION OF PLANETS. III.

R. I. KILADZE
(Summary)

The motion of a particle having small mass on the elliptic orbits in the Sun's and planet's gravitation field is studied, if the mass of the planet is equal to 10^{-3} .

The derivative of the planet's kinetic moment with respect to the mass is computed for the small values of eccentricity ($e \leq 0.05$).

Կ ի տ Ր Վ Ա Ն Ա Ն Ա լ ի տ է Ր Ա Տ Ա Ր Ա

1. Կիլաձե Ք.Ի. Երկու կարգի օրբիտներում օրբիտալ շարժման ճանաչումը. Բյւլլ. Աբաստում. Աստրոֆիզիկ. օբս. 1965, 32, 209.
2. Կիլաձե Ք.Ի. Կ վոպրոսու օ սյուտոչնոմ վրաճումնի քլանետ. Բյւլլ. Աբաստում. Աստրոֆիզ. օբս. 1965, 32, 223.
3. Կիլաձե Ք.Ի. Կ վոպրոսու օ սյուտոչնոմ վրաճումնի քլանետ. II. Բյւլլ. Աբաստում. Աստրոֆիզ. օբս. 1970, 39, 99.
4. Giulì R.T. On the rotation of the Earth produced by gravitational accretion of particles. Icarus. 1968, 8, N.2, 301.
5. Giulì R.T. Gravitational accretion of small masses attracted from large distances as a mechanism for planetary rotation. Icarus. 1968, 2, N.1, 186.

ՏՄՈՒՇՈՒ ՏՔԵՏՐ ՏՎԵՇԵՆԻԱ ՆՈՇՆՈՒ ԱՅԻՆ ԱՎԻԴՄՈՒ ՕԲԼԱՍՏԻ

Լ. Մ. ՓԻՏԿՈՎԱ

I. Վ Վ Ե Ն Ի Ե

В спектре свечения ночного неба, кроме эмиссионных линий и полос, имеется слабый непрерывный фон. Он был обнаружен еще в 1923 г. Рэлеем в синей и фиолетовой областях спектра [1]. Снимая при помощи спектрографа с малой дисперсией и низкой разрешающей способностью (весь спектр умещался в пределах 2 мм), он получил помимо эмиссионных полос слабый сплошной спектр, на котором проступали фраунгоферовы линии H и K ионизованного кальция. То же самое наблюдал Дюфа [2]. В 1937 г. П.П.Добронравин и И.А.Хвостиков [3] фотографировали спектры свечения ночного неба в Симеизе(Крым) при помощи светосильного спектрографа. Они показали, что распределение интенсивности в спектре свечения ночного неба в области 3000-4000 ангстрем отличается от распределения в спектрах сумеречного и дневного неба; в спектре ночного неба в этом участке имеется избыток свечения. Основываясь на работах Рэлея и Дюфа, обнаруживших фраунгоферовы линии в фиолетовой области спектра свечения ночного неба, П.П.Добронравин и И.А.Хвостиков отнесли наблюдаемый спектр к рассеянному свету, а избыток свечения в ближней ультрафиолетовой области предложили объяснить особенностью рассеяния ультрафиолетового солнечного света в верхних слоях атмосферы, где даже в полночь может присутствовать рассеянный солнечный свет в результате как многократного рассеяния в области тени, так и в результате селективной рефракции для отдельных длин волн.

Однако дисперсия и разрешающая способность использованных в те годы спектрографов были столь низкими, что не представлялось возможным выявить и тем более разделить на непрерывном фоне отдельные эмиссионные полосы. Результаты получались противоречивыми. Например, Эльви и др. [4], а также Барбье [5] в 40-ых годах уже не обнаружили точного совпадения полос поглощения в ультрафиолетовом спектре свечения ночного неба с фраунгоферовыми линиями. В 50-ых годах в результате наблюдений при помощи спектрографов с большей разрешающей способностью было установлено, что наличие фраунгоферовых линий является кажущимся и объясняется сочетанием большого числа эмиссионных полос. Эти полосы были отождествлены как полосы