

Червячное колесо 2 (см. схему) ставится на выходной валок 1, который должен быть изготовлен запово. Червячное колесо 2 свободно вращается на валу и сцепляется с ним через два фрикционных фланца 4 и 5, один из которых 4 жестко закрепляется на валу посредством штифта, а второй фланец 5 своей ступицей свободно перемещается по валу и сцепляется с ним посредством скользящей шпонки. Сила фрикционного сцепления между червячным колесом и фланцами осуществляется нажимной пружиной 7, поджатие которой достигается упорной гайкой 10, которая перемещаясь по резьбе валика 1 может регулировать

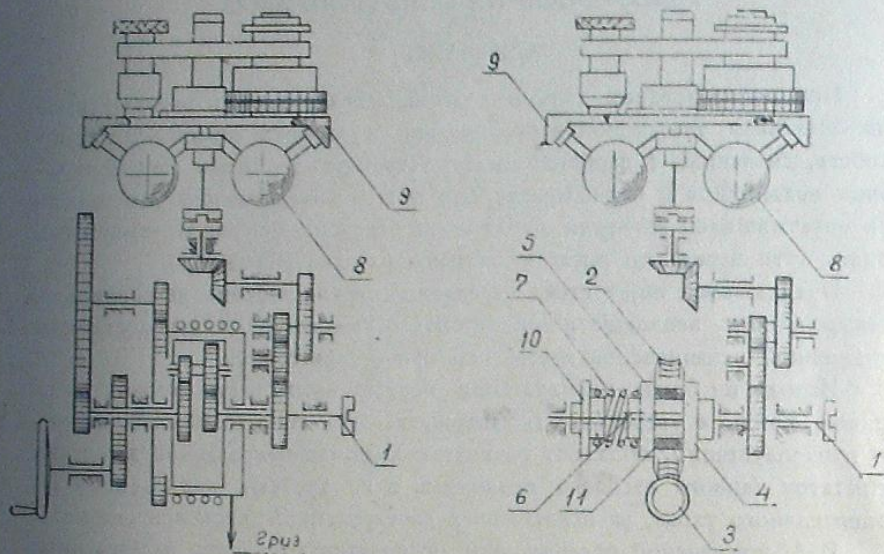


Рис. 1

усилие сжатия пружины. Пружина 7 давит на червячное колесо 2 через подвижный фланец 5, колесо же в свою очередь упирается в неподвижный фланец 4.

Таким образом возникает избыточное тяговое усилие, излишек которого гасится статическим регулятором часового механизма, через центробежные грузы 8 и тормозное кольцо 9, вызывая проскальзывание червячного колеса 2 относительно фланцев 4 и 5.

Для уменьшения износа и шума передачи, червячное колесо изготовляется из текстолита, вследствие чего не требуется никаких фрикционных прокладок между фланцами и червячным колесом. В теле червячного колеса имеются четыре отверстия, в которые заложены фетровые фитили 11, пропитанные маслом, обеспечивающие постоянство смазки трущихся поверхностей фрикциона.

Февраль, 1964.

ON THE TRANSFER OF WEIGHT-DRIVEN CLOCKS OF TELESCOPES TO ELECTRIC DRIVE

A. K. MAYER

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОРБИТ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Р. И. КИЛАДЗЕ

С точки зрения планетной космогонии значительный интерес представляют траектории тел малой массы, близкие к орбите второго тела (планеты), порождающей орбитой которых являются круговые. Такие орбиты будем называть квазикруговыми.

Для их построения рассмотрим движение тела исчезающе малой массы во вращающейся системе координат, относительно которой Солнце имеет координаты (0,0), а координаты планеты суть (-1,0) в течение всего времени. Предполагается, что планета движется по круговой орбите. За единицу массы выберем сумму масс Солнца и планеты. Массу планеты обозначим через μ .

При этих условиях уравнения движения третьего тела в плоскости орбиты планеты имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}; \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2} [(x + \mu)^2 + y^2] + \frac{1 - \mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}}. \quad (2)$$

Интеграл Якоби, как известно, имеет вид:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 2\Omega - c. \quad (3)$$

Переходя к полярной системе координат, получим:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{R} &= R(1 + \dot{\varphi})^2 + \mu \cos \varphi - \frac{1 - \mu}{R^2} - \frac{\mu(R + \cos \varphi)}{(R^2 + 2R \cos \varphi + 1)^{3/2}}, \\ R \ddot{\varphi} &= -2 \dot{R}(\dot{\varphi} + \mu \sin \varphi) \left[1 - \frac{1}{(R^2 + 2R \cos \varphi + 1)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Проследим движение частицы, начиная от положения $\varphi = 0$ (когда частица находится вблизи точки либрации L_3), где возмущающее влияние планеты наименьшее.

Введем обозначение:

$$\rho_1 = R - R_0,$$

где R_0 — расстояние точки L_3 от начала координат. Тогда вблизи точки L_3 можно разложить правые части выражений (4) по степеням φ и ρ_1 .

Ограничившись членами первого порядка, будем иметь приближенные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho}_1 &\approx 3\rho_1 + 2\dot{\varphi}; \\ \ddot{\varphi} &\approx -2\dot{\rho}_1 - \frac{7}{8}\mu\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Общее решение данной системы следующее:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= A \operatorname{sh} \lambda_1 t + B \operatorname{ch} \lambda_1 t + C \sin \lambda_2 t + D \cos \lambda_2 t, \\ \varphi &= A' \operatorname{sh} \lambda_1 t + B' \operatorname{ch} \lambda_1 t + C' \sin \lambda_2 t + D' \cos \lambda_2 t; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{21}{8}\mu} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 1.$$

Учитывая члены высших степеней относительно μ , можно получить общее решение системы (4) в виде рядов:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh} n \lambda_1 t + B_n \operatorname{ch} n \lambda_1 t + C_n \sin n \lambda_2 t + D_n \cos n \lambda_2 t), \\ \varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \operatorname{sh} n \lambda_1 t + B'_n \operatorname{ch} n \lambda_1 t + C'_n \sin n \lambda_2 t + D'_n \cos n \lambda_2 t). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Разумеется, среди коэффициентов A_n, B_n, \dots только четыре являются независимыми.

Из выражений (7) видно, что вблизи точки либрации L_3 движение частицы складывается из двух компонент; первая из них — аperiodическое движение некоторой воображаемой точки, вблизи которой частица совершает колебание с периодом, близким к периоду обращения планеты вокруг Солнца.

Допустим теперь, что $\mu \rightarrow 0$, т. е. вернемся к рассмотрению задачи двух тел (Солнце-частица) во вращающейся системе координат.

Уравнения (7) в этом случае принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n t^n + B_n + C_n \sin nt + D_n \cos nt), \\ \varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n t^n + B'_n + C'_n \sin nt + D'_n \cos nt). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если частица движется по круговой орбите, то очевидно:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \text{const}, \\ \varphi &= a + bt. \end{aligned}$$

Следовательно, во вращающейся системе координат для круговой орбиты имеем критерий:

$$C_n = D_n = C'_n = D'_n = 0. \quad (9)$$

С другой стороны, движение частицы по эллипсу можно рассматривать как колебание вокруг воображаемой точки, которая движется по кругу со скоростью, равной средней скорости движения частицы. Поэтому, неравенство нулю хотя бы одного из коэффициентов C_n, D_n, \dots означает движение частицы по эллипсу.

Критерием (9) мы воспользуемся также для построения квазикруговых орбит; однако запишем данный критерий в иной форме.

Для этого возьмем m -ую производную выражений (7):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^m \rho_1}{d t^m} &= \sum_{n=1}^{\infty} (n \lambda_1)^m A_n \operatorname{sh} n \lambda_1 t + (n \lambda_1)^m B_n \operatorname{ch} n \lambda_1 t + \\ &+ (-1)^{m/2} (n \lambda_2)^m C_n \sin n \lambda_2 t + (-1)^{m/2} (n \lambda_2)^m D_n \cos n \lambda_2 t, \\ \frac{d^m \varphi}{d t^m} &= \sum_{n=1}^{\infty} (n \lambda_1)^m A'_n \operatorname{sh} n \lambda_1 t + (n \lambda_1)^m B'_n \operatorname{ch} n \lambda_1 t + \\ &+ (-1)^{m/2} (n \lambda_2)^m C'_n \sin n \lambda_2 t + (-1)^{m/2} (n \lambda_2)^m D'_n \cos n \lambda_2 t; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

если m четное число, или, при нечетном m :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^m \rho_1}{d t^m} &= \sum_{n=1}^{\infty} (n \lambda_1)^m A_n \operatorname{ch} n \lambda_1 t + (n \lambda_1)^m B_n \operatorname{sh} n \lambda_1 t + \\ &+ (-1)^{(m-1)/2} (n \lambda_2)^m C_n \cos n \lambda_2 t + (-1)^{(m+1)/2} (n \lambda_2)^m D_n \sin n \lambda_2 t, \\ \frac{d^m \varphi}{d t^m} &= \sum_{n=1}^{\infty} (n \lambda_1)^m A'_n \operatorname{ch} n \lambda_1 t + (n \lambda_1)^m B'_n \operatorname{sh} n \lambda_1 t + \\ &+ (-1)^{(m-1)/2} (n \lambda_2)^m C'_n \cos n \lambda_2 t + (-1)^{(m+1)/2} (n \lambda_2)^m D'_n \sin n \lambda_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

Так как

$$\lambda_1 \sim \sqrt{\mu} \ll 1, \quad \text{а} \quad \lambda_2 \approx 1,$$

то при дифференцировании аperiodические члены по порядку величины уменьшаются в $\mu^{m/2}$ раз, в то время как на порядке величины периодических членов дифференцирование не сказывается.

Если коэффициенты перед периодическими членами равны нулю, то очевидно, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^m \rho_1}{d t^m} &\sim \mu^{m/2} \rho_1, \\ \frac{d^m \varphi}{d t^m} &\sim \mu^{m/2} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

или, с использованием (6):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^m \rho_1}{dt^m} &\sim \mu^{m+1/2} \\ \frac{d^m \varphi}{dt^m} &\sim \mu^{m/2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Выражения (12) и являются критерием квазикругового характера орбит в ограниченной круговой задаче трёх тел.

Броуном [2] были исследованы некоторые свойства периодических орбит, которые удовлетворяют условиям, аналогичным (12).

При рассуждениях мы исходим из предположения, что $\mu \ll 1$, что, конечно, справедливо для планет.

Решение системы дифференциальных уравнений движения

Вернёмся к уравнениям (4).

Вводя обозначения:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \\ u &= -\cos \frac{\varphi}{2}, \\ \rho &= R - r, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

можно уравнениям (4) придать следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} (1-u^2)v^2 \frac{d^2 \rho}{du^2} + (1-u^2)v \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{d\rho}{du} - uv^2 \frac{d\rho}{du} &= (1+\rho) \times \\ \times (1+2v)^2 + 2\mu u^2 - \mu - \frac{1-\mu}{(1+\rho)^2} - \frac{\mu(\rho-1+2u^2)}{[\rho^2+4(1+\rho)u^2]^{3/2}}, \\ (1+\rho)v \frac{dv}{du} + v(1+2v) \frac{d\rho}{du} &= -\mu u \left\{ 1 - \frac{1}{[\rho^2+4(1+\rho)u^2]^{3/2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

При новых обозначениях условия квазикругового характера (12) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^m \rho}{du^m} &\sim V \sqrt{\mu}, \\ \frac{d^m v}{du^m} &\sim V \sqrt{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Если частица находится не очень близко к планете, то

$$|u| > |\rho|. \quad (16)$$

При этом условии разложим правые части выражений (14) следующим образом:

$$v \left(1 - u^2 \right) \frac{d}{du} \left(v \frac{d\rho}{du} \right) - uv^2 \frac{d\rho}{du} = 4v + 3\rho + 4v^2 + 4v\rho - 3\rho^2 + 2\mu u^2 +$$

$$\left. \begin{aligned} &+ 4v^3\rho + 4\rho^3 - 2\mu\rho - 5\rho^4 + 3\mu\rho^2 + 6\rho^5 - 4\mu\rho^3 + \frac{\mu}{4u} \left[1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2u^2} \right) \times \right. \\ &\times \rho + \left(\frac{15}{8} - \frac{9}{8u^2} \right) \rho^2 - \left(\frac{35}{16} - \frac{15}{8u^2} + \frac{3}{16u^4} \right) \rho^3 + \dots \\ &v \frac{dv}{du} + v \frac{d\rho}{du} + \rho v \frac{dv}{du} + 2v^2 \frac{d\rho}{du} = \mu u + \frac{\mu}{8u^2} \left[1 - \frac{3}{2}\rho + \right. \\ &+ \left(\frac{15}{8} - \frac{3}{8u^2} \right) \rho^2 - \left(\frac{35}{16} - \frac{35}{16u^2} \right) \rho^3 + \left(\frac{315}{128} - \frac{105}{64u^2} + \frac{15}{128u^4} \right) \rho^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

С использованием (15) для первого приближения получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 4v + 3\rho &= 0, \\ v \frac{dv}{du} + v \frac{d\rho}{du} &= \mu u + \frac{\mu}{8u^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Решение этой системы находится сразу:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= -\frac{4}{3}v, \\ v^2 &= C_1 - 3\mu u^2 + \frac{3\mu}{4u}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

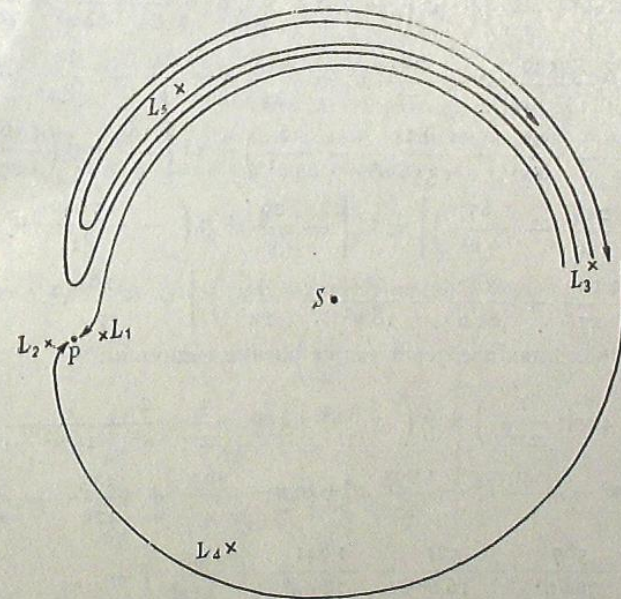


Рис. 1

На рис. 1 показано семейство соответствующих кривых для значения $\mu=0.001$. Они весьма похожи на «подковообразные» орбиты, исследованные Броуном [2] и Рабе [3].

Нами получено пятое приближение, имеющее следующий вид:

$$\rho = \mu \left(-\frac{2}{3} u^2 - \frac{1}{12u} \right) + \mu^2 \left(-\frac{32}{9} u^4 + \frac{32}{9} u^3 - \frac{13}{18} u + \frac{13}{18u} - \frac{5}{144u^2} + \frac{5}{144u^4} \right) + v \left[-\frac{4}{3} + \mu \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3u} - \frac{5}{18u^3} \right) + \mu^2 \left(\frac{1312}{27} u^4 - \frac{1312}{27} u^3 + \frac{169}{27} u + \frac{44}{27} - \frac{343}{27u} + \frac{217}{432u^2} + \frac{367}{54u^3} - \frac{745}{432u^4} + \frac{67}{54u^6} \right) \right] + v^2 \left[\frac{20}{9} + \mu \left(\frac{16}{3} u^2 - \frac{92}{27} - \frac{13}{12u} + \frac{73}{54u^3} \right) \right] + v^3 \left[-\frac{320}{81} + \mu \left(-32u^2 + \frac{4208}{243} + \frac{10}{3u} - \frac{3799}{486u^3} + \frac{101}{27u^5} \right) \right] + \frac{1760}{243} v^4. \quad (20)$$

$$v^2 \left[1 + \mu \left(8u^2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{u} + \frac{11}{6u^3} \right) + \mu^2 \left(-\frac{5036}{27} u^4 + \frac{2240}{9} u^2 - \frac{715}{54} u - \frac{44}{9} + \frac{437}{18u} - \frac{4295}{1728u^2} - \frac{164}{9u^3} + \frac{4365}{576u^4} - \frac{731}{144u^6} \right) \right] = C_1 + \mu \left(-3u^2 + \frac{3}{4u} \right) + \mu^2 \left(-9u^4 - \frac{15}{4} u + \frac{6}{u} - \frac{3}{64u^2} + \frac{3}{16u^4} \right) + \mu^3 \left(\frac{1712}{27} u^6 - \frac{548}{3} u^4 - \frac{283}{72} u^3 + \frac{643}{24} u + \frac{21}{u} + \frac{155}{48u^2} - \frac{4273}{13824u^2} - \frac{21}{8u^4} + \frac{815}{1536u^5} - \frac{15}{64u^7} \right) + v^3 \left[\frac{16}{9} + \mu \left(\frac{1168}{27} u^2 - \frac{152}{9} - \frac{215}{54u} + \frac{65}{9u^2} \right) \right] + v^4 \left[-\frac{26}{9} + \mu \left(-\frac{15040}{81} u^2 + \frac{2126}{27} + \frac{997}{81u} - \frac{725}{18u^3} + \frac{45}{2u^5} \right) \right] + \frac{128}{27} v^5. \quad (21)$$

При вычислениях требуется также знание величины:

$$v \cdot \frac{d\rho}{du} = \mu \left(4u + \frac{1}{2u^2} \right) + \mu^2 \left(-8u^3 + 4u + \frac{3}{2} - \frac{2}{u^2} + \frac{5}{16u^3} - \frac{5}{16u^5} \right) + \mu^3 \left(\frac{1232}{3} u^5 - \frac{1240}{3} u^3 + \frac{1093}{12} u^2 + 20u - \frac{569}{4} + \frac{133}{12u} + \frac{57}{u^2} - \frac{61}{2u^3} + \frac{587}{768u^4} + \frac{321}{16u^6} - \frac{1841}{786u^8} + \frac{53}{32u^8} \right) + \mu v \left[-4u - \frac{1}{4u^2} + \mu \left(\frac{400}{3} u^3 - \frac{200}{3} u + 6 + \frac{61}{6u^2} - \frac{67}{48u^3} + \frac{19}{8u^5} \right) \right] + \mu v^2 \left[16u + \frac{1}{u^2} - \frac{17}{6u^4} + \mu \left(-\frac{10336}{9} u^3 + \frac{5168}{9} u - \right) \right] \quad (22)$$

$$- \frac{166}{3} - \frac{2459}{18u^2} + \frac{1117}{144u^3} + \frac{2857}{18u^4} - \frac{5833}{144u^5} + \frac{334}{9u^7} \left] + \mu v^3 \left(-64u - \frac{13}{4u^2} + \frac{77}{6u^4} \right) + \mu v^4 \left(256u + \frac{10}{u^2} - \frac{11603}{162u^4} + \frac{1520}{27u^6} \right) + \dots$$

Формулы (20) и (21) позволяют с большой точностью построить орбиту частицы вдали от планеты, пока можно считать, что $|u| \gg \sqrt{\mu}$.

Когда $u \rightarrow 0$, то нарушается условие (16), формулы (20) и (21) неприменимы и траекторию частицы можно дальше проследить только с помощью численных методов.

В таком случае вычисления велось с помощью формул:

$$\frac{dp}{du} = \frac{4\mu u R}{2v} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\frac{dR}{du} = 2 \sqrt{\frac{R^2 + 2\mu(2u^2 - 1)R + \frac{2(1-\mu)}{R} + \frac{2\mu}{r} + \mu^2 - C}{2v(1-u^2)} - \frac{R^2}{1-u^2}}; \quad (23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p &= R^2(1 + 2v), \\ r &= \sqrt{(R-1)^2 + 4u^2 R}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Формулы (23) и (24) легко получаются из (3), (4) и (13).

В некоторых случаях удобнее пользоваться следующим методом.

Обозначим через q удельный момент количества движения частицы относительно планеты; введем также обозначение:

$$d\zeta = \frac{\sqrt{1-u^2}}{r} dt. \quad (25)$$

Тогда уравнения движения можно привести к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{d\zeta} &= 2ur(1-\mu) \left(\frac{1}{R^2} - R \right), \\ \frac{du}{d\zeta} &= \frac{ab - 2uc}{2R}, \\ \frac{dR}{d\zeta} &= \frac{ac}{1-u^2} + 2ub, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 - 2u^2 - R, \\ b &= r - \frac{q}{r}, \\ c &= \sqrt{(1-u^2) \left[R^2 + 2\mu(2u^2 - 1)R + \frac{2(1-\mu)}{R} + \frac{2\mu}{r} + \mu^2 - C - b^2 \right]} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Система уравнений (26) удобна тем, что даёт возможность непосредственно вычислить величину момента количества движения относительно планеты.

Заметим ещё, что существует зависимость:

$$q = (P - R) \left(1 - \frac{1}{R} \right) + 4u^2 R(1+v) - 2uv(1-u^2) \frac{dR}{du}. \quad (28)$$

Вычисление начальных условий

Исследуем величины начальных данных v_0 и R_0 , которые соответствуют орбитам, пересекающим поверхность планеты или, по крайней мере, проходящим вблизи неё.

Вычислив из (21) v , как функцию от u для различных значений константы, и построив соответствующий график, можно увидеть, что вблизи значения $u \approx -\sqrt[3]{\mu}$ величина v имеет экстремум.

С уменьшением значения константы величина $|v_{ext}|$ уменьшается, становится равной нулю и далее принимает комплексные значения (рис. 2). Последнее означает, что соответствующая орбита не проходит вблизи планеты: частица, описав петлю, возвращается к точке L_3 (рис. 1).

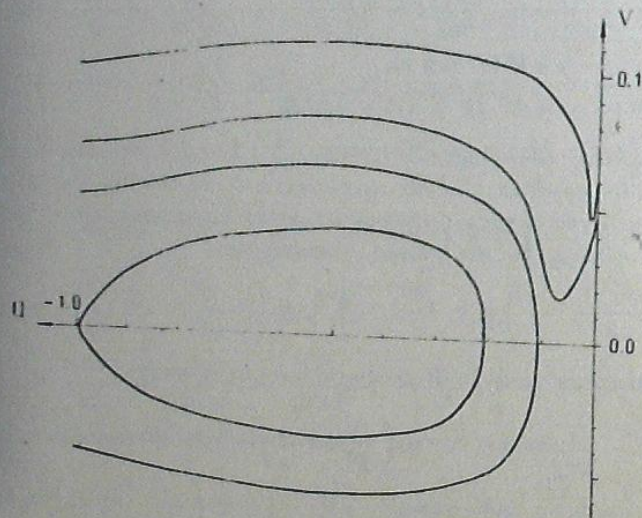


Рис. 2

С другой стороны, орбиты, имеющие экстремальные значения сильно отличные от нуля, пройдут далеко от планеты без заметного искажения круговой формы.

Следовательно, для орбит, близко проходящих около планеты, должны выполняться условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{du} &= 0, \\ v &\approx 0 \end{aligned} \right\}. \quad (29)$$

Дифференцируя (21) и деля результат на $6\mu u + \frac{3\mu}{4u^2}$, с учётом (29) получаем:

$$1 + \mu \left(6u^2 - \frac{1}{8u} + \frac{1}{u^3} \right) + \mu^2 \left(-\frac{1712}{27} u^4 + \frac{1096}{9} u^2 + \frac{1273}{432} u - \frac{315}{16u} - \frac{4273}{3456u^2} + \frac{7}{2u^3} + \frac{4075}{1152u^4} - \frac{35}{16u^6} \right) = 0. \quad (30)$$

Так как в точке экстремума u является достаточно малой величиной (порядка $\sqrt[3]{\mu}$), то вместо (30) можно писать приближенно:

$$1 + \mu \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{8u} \right) - \mu \left(\frac{35}{16u^6} - \frac{4075}{1152u^4} - \frac{7}{2u^3} \right) = 0. \quad (31)$$

Вводя обозначение,

$$v = \sqrt[3]{\mu}, \quad (32)$$

решение уравнения (31) можно найти в виде:

$$\frac{1}{u} = -\frac{0.786}{v} - 0.250v + 0.294v^2 + \dots \quad (33)$$

Подставляя это значение в (21), находим:

$$C_1 = 0.475v^2 + 0.188v^4 + 10.57v^6 + \dots \quad (34)$$

Для начальной точки $u = -1$ с помощью (21) находим:

$$v_0^2 + \frac{15}{4}\mu - \frac{16}{9}v_0^2 + \frac{26}{4}v_0^4 + \frac{35}{6}\mu v_0^2 - \frac{128}{27}v_0^6 + \dots = 0.475v^2 + 0.188v^4 + 10.57v^6 + \dots \quad (35)$$

Величина v_0 , как функция от μ , определённая из (35), обнаруживает максимум при значении

$$v = 0.0876, \text{ или } \mu = \frac{1}{1500}. \quad (36)$$

Аналогичная зависимость от μ существует и для R_0 .

Последнее означает следующее. На планету с весьма малой массой вещество падает из зоны, непосредственно прилегающей к её орбите. (Напомним, что речь идёт о частицах, движущихся по квазикруговым орбитам). При росте массы планеты эта зона разделяется на две части, которые отходят от орбиты планеты в обе стороны, постепенно удаляясь от неё, пока масса планеты не достигнет $\frac{1}{1500}$ от солнечной массы. Между этими зонами образуется полость, откуда частицы уже не падают на планету.

В процессе роста планета как бы собирает материал сначала поблизости, а в дальнейшем переходит всё к более отдалённым областям; этот процесс распространяется на зону, шириной около $\frac{1}{3}$ радиуса планетной орбиты.

При быстром росте планеты, однако, возможен случай, когда планета, ещё не исчерпав материал в прилегающих к её орбите районах, настолько увеличит свою массу, что произойдёт расщепление «зоны собирания материала». В этом случае остатки материала окажутся заключёнными между этими зонами, совершая колебания около точек либрации L_4 и L_5 .

В частности, такими остатками могут быть Троянцы.

Исследование уравнения (35) приводит к заключению, что при последующем росте массы планеты зоны проходящих сквозь планету квазикруговых орбит должны опять сближаться и, наконец, объединиться в окрестности точки либрации L_3 . При этом становится невозможным существование подковообразных орбит, заключающих внутри себя точку L_3 .

Подставляя в (35) значение $v_0=0$, найдём, что это произойдёт при значении:

$$\mu \approx \frac{1}{400}. \quad (37)$$

Учитывая приближенный характер исходных формул (21), нельзя ожидать, что значения (36) и в особенности, (37) окажутся точными, в частности, Тюринг [4] показал возможность перехода тела из L_4 в L_5 через окрестности точки L_3 при значении $\mu = \frac{1}{82}$, однако, факт исчезновения подковообразных орбит вышеупомянутого типа с ростом μ , по-видимому, действительно имеет место. В пользу этого соображения говорят результаты Дарвина [5], которому при значении $\mu = \frac{1}{11}$ удалось построить подковообразную орбиту, заключающую в себе планету вместе с точками L_1 и L_2 . Следовательно, в этом случае частица уже не проходит точку L_3 при переходе от окрестности точки L_4 к точке L_5 .

Сказанное относится не только к квазикруговым, но также и к орбитам, порождённым эллиптическими орбитами с небольшим эксцентриситетом. Действительно, из формул (7) следует, что такие орбиты будут располагаться вблизи квазикруговых орбит, следуя за ними с небольшими периодическими колебаниями.

Вычисление орбит

Нами было вычислено несколько квазикруговых орбит для значения $\mu = 0,001$.

Для малых значений v_0 вычисления велись по формулам (20) и (21), которые в этом случае обеспечивали 5—6 знаков после запятой.

При значениях v_0 около 0,1 из (22) определялось значение величины $v \cdot \frac{dr}{du}$ в начальной точке (где $u = -1$).

Для этой точки первое из уравнений (4) можно привести к виду:

$$v^2 \frac{dR}{du} \Big|_{u=-1} = R_0 (1 + 2v_0)^2 + \mu - \frac{1-\mu}{R_0^2} - \frac{\mu}{(R_0+1)^2}. \quad (38)$$

Из (38) можно определить начальное значение R_0 с большой точностью. Далее вычисления велись методом численного интегрирования с помощью формул (23) в интервале $-1 \leq u \leq -0,5$ и с помощью формул (26) — при $u > -0,5$.

Вычисления выполнены на электроарифмометре с точностью до шестого знака после запятой.

В таблице I приведены полярные координаты нескольких точек орбит, соответствующих различным значениям v_0 . Так как при малых значениях v_0 частица описывает петлю около треугольной точки либрации, то в таком случае каждому u соответствуют два значения R , что напало отражение в таблице I.

Таблица I

$v_0=0.050$		$v_0=0$		$v_0=-0.100$	
φ	R	φ	R	φ	R
0°00'00"	0.937 87	0°00'00"	0.999 42	0°00'00"	1.159 817
51 41 02	.931 98	51 41 02	1.029 50	51 41 02	.163 653
91 08 46	.924 15	91 08 46	.047 51	91 08 46	.169 463
120 00 00	.921 26	120 00 00	.053 56	120 00 00	.172 459
145 05 05	.925 69	145 05 05	.044 56	143 34 39	.171 575
162 44 46	0.948 18	156 52 11	1.000 38	166 29 51	.161 018
156 20 28	1.072 36	145 05 05	.958 25	176 19 45	.142 894
145 05 05	.082 27	120 00 00	.949 63	181 37 47	1.115 581
120 00 00	.086 86	91 08 46	.954 66		
91 08 46	.082 71	51 41 02	.970 60		
51 41 02	.072 89				
0 00 00	1.065 69				

$v_0=0.100$		$v_0=0.101$		$v_0=0.102$	
φ	R	φ	R	φ	R
0°00'00"	0.885 012	0°00'00"	0.884 030	0°00'00"	0.883 050
51 41 02	.882 048	51 41 02	.881 095	51 41 02	.880 139
91 08 46	.887 793	91 08 46	.876 881	91 08 46	.875 969
120 00 00	.875 988	120 00 00	.875 090	120 00 00	.874 188
145 05 05	.878 043	141 37 50	.876 449	141 46 12	.875 546
162 44 46	.886 631	163 34 01	.886 372	163 45 23	.885 504
173 07 13	.905 651	172 55 54	.903 545	173 06 31	.902 709
177 07 25	.928 550	177 13 17	.927 136	177 23 16	.926 382
178 59 49	.956 146	179 07 06	.954 858	179 16 00	.954 289
179 42 15	.981 645	179 48 12	.980 725	179 54 37	.980 387
179 56 45	0.997 442	179 59 15	0.997 063	180 01 58	0.996 930

$q_m=0.000 221$	-0.000 109	-0.000 424
-----------------	------------	------------

$v_0 = -0.078$		$v_0 = -0.080$		$v_0 = -0.082$	
φ	R	φ	R	φ	R
0°00'00"	1.119 115	0°00'00"	1.122 668	0°00'00"	1.125 249
51 41 02	.123 748	51 41 02	.127 209	51 41 02	.130 702
91 08 46	.130 579	91 08 46	.133 921	91 08 46	.137 306
120 00 00	.133 846	120 00 00	.137 161	120 00 00	.140 507
139 35 52	.132 890	139 35 36	.136 208	140 19 17	.139 561
160 53 54	.122 791	161 25 52	.126 041	161 57 28	.129 346
170 45 09	.105 445	171 16 10	.108 658	171 46 54	.111 911
175 35 42	.082 300	176 05 31	.085 418	176 35 21	.088 522
178 00 02	.054 900	178 28 33	.057 687	178 57 27	.060 317
179 07 23	1.027 468	179 31 34	1.029 645	179 55 53	1.031 384
$q_m = 0.001 088$		$-0.000 028$		$-0.001 004$	

В последней строке табл. 1 даны значения планетоцентрических моментов частиц в окрестности планеты. Как легко видеть из первого уравнения (26), величина q при этом достигает минимума.

В ближайшее время мы предполагаем вычислить квазикруговые орбиты для меньших значений μ .

Ноябрь, 1962.

სამი სხეულის შემოსაზღვრულ ამოცანაში ორბიტების
ერთი კლასის შესახებ

რ. კილაძე

(რეზიუმე)

მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით აგებულია კვაზიწრიული ორბიტები სამი სხეულის შემოსაზღვრულ ამოცანაში. შესრულებულია ხუთი მიახლოება. მოძებნილია ასეთ ორბიტაზე მოძრავი სხეულის პლანეტასთან დაჯახების შესაბამისი საწყისი პირობები. გამოთვლილია ორბიტები შემთხვევისათვის, როცა პლანეტის მასა $\mu = 0.001$.

ON A CLASS OF ORBITS IN THE RESTRICTED PROBLEM OF THREE BODIES

R. I. KILADZE

(Summary)

The quasicircular orbits in the restricted problem of three bodies are constructed by means of the method of successive approximations.

Five approximations are fulfilled. The initial conditions corresponding to collision of the body, rotating on such an orbit, with the planet are given.

The orbits are computed for the case the mass of a planet is $\mu = 0.001$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. II, 1937. М—Л.
2. Brown E. W. On a New Family of Periodic Orbits in the Problem of Three Bodies. M. N. 1911. 71, 5, 438.
3. Rabe E. Determination and Survey of Periodic Trojan Orbits in the Restricted Problem of Three Bodies. AJ, 1961, 66, 9, 500.
4. Thüring B. Programmgesteuerte Berechnung von Librations-Bahnen. AN. 1959, 285, 2, 71.
5. Darwin G. H. On Librating Planets and on a New Family of Periodic Orbits. MN, 1912, 72, 8, 642.