აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 32, 1965
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 32, 1965

К ВОПРОСУ О СУТОЧНОМ ВРАЩЕНИИ ПЛАНЕТ

Р. И. КИЛАДЗЕ

Современное состояние вопроса о суточном вращении планет, пожалуй, наилучшим образом характеризуется словами О. Ю. Шмидта: «Происхождение вращения планет около их осей (суточного вращения) не получило объяснения ни в одной из космогонических гипотез. Попытки решить этот вопрос, как известно, либо не давали никакого результата, либо приводили к выводу, что вращение первоначально должно было быть обратным, а для превращения его в прямое придумывались искусственные и неубедительные доводы» [1].

В указанной работе О. Ю. Шмидт, исходя из своей известной концепции об образовании планет из роя мелких частиц, пытался получить прямое вращение планет, анализируя уравнения баланса энергии и момента количества движения. О. Ю. Шмидт пришел к выводу об обязательности прямого вращения планет при достаточно больших тепловых потерях в моменты столкновений между частицами и зародышем планеты. При этом величина вращательного момента получалась в виде разности между полным моментом частиц, расположенных в зоне планеты, и орбитальным моментом планеты.

Несколько иным путем к аналогичному результату пришел также и Г. Ф. Хильми [2, 3].

Недостатки указанных работ показаны В. С. Сафроновым [4]. Им значительно усовершенствован метод, примененный в [1], и аккуратнее проведены вычисления. В результате В. С. Сафронов приходит к выводу о недостаточности уравнений баланса энергии и момента количества движения для решения вопроса о вращении планет; для этого требуется знание конкретного механизма столкновений. Весьма важным является также вывод, противоречащий результату О. Ю. Шмидта, согласно которому, чем быстрее вращение планеты, тем меньше должны быть тепловые потери в процессе аккумуляции. Вопрос о направлении вращения, однако, остается все же открытым. Это и понятно, ибо вращательный момент планеты, по крайней мере, на четыре порядка меньше двух остальных величин, входящих в уравнение момента количества движения. С другой стороны, величина орбитального момента планеты зависит не только от полного момента частиц в начале эволюции, но в значительной мере и от условий роста планеты (величина орбитального момента планеты при этом может значительно меняться). Поэтому, неточность в определении вращательного момента планеты будет на несколько порядков больше искомой величины и, конечно, не может быть и речи об ее надежном определении. Скорее даже наоборот: имея в качестве исходных величин вращательный и орбитальный момент планеты, можно было бы попытаться определить условия ее роста.

Мы не будем касаться ранних работ, посвященных проблеме суточного вращения планет. Из сказанного выше ясно, что в настоящее время мы еще далеки от решения данной проблемы и даже вопрос о направлении вращения фактически остается открытым.

В настоящей статье предпринимается попытка объяснения прямого вращения планет на основе детального анализа процесса их роста.

Допустим, вокруг Солнца в плоскости эклиптики, наряду с зародышем планеты, по круговым орбитам вращается рой частиц. Если пренебрегать притяжением зародыша планеты, то каждая частица, имеющая орбиту, внешнюю по отношению к орбите зародыша планеты, будет обгоняться им и, налетая на него с передней внешней стороны, сообщит ему отрицательный осевой момент количества движения.

Точно также, частицы, более близкие к Солнцу, будут обгонять планету, и ударяясь с внутренней задней стороны, сообщать ей опять таки отрицательный момент.

В результате планета должна получить обратное движение.

Попытаемся, однако, наряду с притяжением Солнца учесть также и притяжение зародыша планеты. Так как в данном случае мы имеем задачу трех тел, то движение по строго круговым орбитам невозможно. Поэтому, рассмотрим движение частиц по орбитам, по-возможности близким к круговым. Эти орбиты мы назовем квазикруговыми.

Пока частица движется вдали от планеты, грубо говоря, можно считать, что на нее действуют только две силы: притяжение Солнца и центробежная сила. Для частицы, движущейся по круговой орбите, эти силы равны и противоположны по направлению.

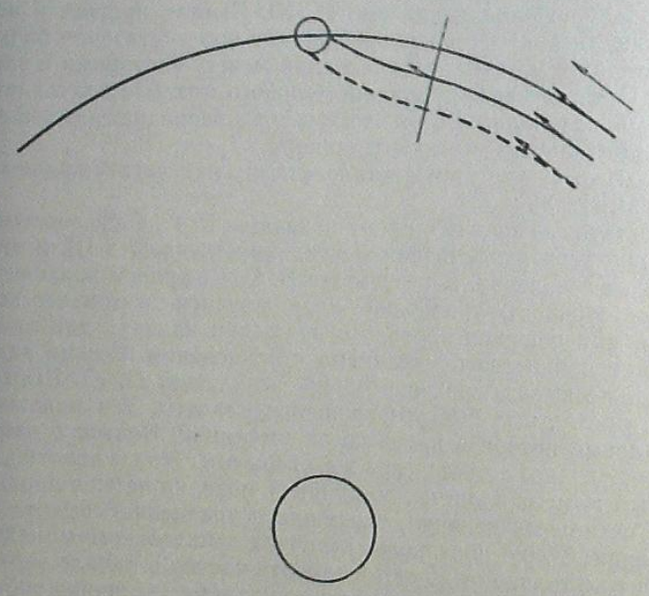

Рис. 1. Траектория частицы и силы, действующие на неё

При приближении к планете становится также существенной сила притяжения планеты, направленная почти тангенциально. Для частиц, обгоняющих планету, эта сила, направленная вперед, будет увеличивать скорость частицы, а тем самым и центробежную силу (рис. 1). Вследствие этого частица оказывается выброшенной за пределы круговой орбиты и может «толкнуть» планету с задней внешней стороны, сообщив ей положительный момент.

Аналогично, для медленных (внешних) частиц, которые обгоняются планетой, сила притяжения планеты будет направлена назад, уменьшая скорость частиц и, следовательно, центробежную силу. В результате частицы оказываются «втянуты» притяжением Солнца внутрь круговой орбиты и, встречая планету с передней внутренней стороны, опять таки сообщат ей положительный момент.

Разумеется, среди частиц встретятся также имеющие отрицательный планетоцентрический момент (например, частица, движущаяся по траектории, отмеченной на рис. 1 пунктиром). Поэтому, для получения окончательного результата следует исследовать функцию распределения частиц по координатам и компонентам скоростей вблизи планеты.

В общем случае задача сформулируется следующим образом. В некотором конечном объеме, достаточно далеко от планеты, имеем рой частиц, масса которого распределяется в зависимости от начальных координат и компонент скоростей по некоторому дифференциальному закону

$$\psi(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)\, dx_0\, dy_0\, dz_0\, du_0\, dv_0\, dw_0.$$

Обозначим через $\vec{q}_m(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)$ — удельный планетоцентрический момент количества движения частицы при ее прохождении вблизи планеты, через $\vec{Q}$ — вращательный момент планеты, а через μ — массу планеты. При этих обозначениях будем иметь:

$$\frac{d\vec{Q}}{d\mu} = \frac{\int \vec{q}_n \cdot \psi\, dx_0\, dy_0\, dz_0\, du_0\, dv_0\, dw_0}{\int \psi\, dx_0\, dy_0\, dz_0\, du_0\, dv_0\, dw_0}, \tag{1}$$

причем интегрирование следует распространять на те частицы, которые сталкиваются с планетой.

В настоящей статье мы рассмотрим частный случай этой общей задачи, а именно: допустим, что частицы движутся только лишь в плоскости орбиты планеты по квазикруговым орбитам.

Движение частицы удобнее рассматривать в системе координат, которая вращается вокруг оси, параллельной оси z таким образом, что Солнце все время имеет прямоугольные координаты (0, 0, 0), а планета — (—1,0,0); за единицу массы выберем сумму масс Солнца и планеты. В таком случае $\vec{q}_m$ будет иметь составляющую только на оси z, алгебраическую величину которой обозначим через q_m.

При таком выборе системы координат уравнения движения материальной частицы нулевой массы, как известно, будут [5]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$\Omega = \frac{(x+\mu)^2 + y^2}{2} + \frac{1-\mu}{R} + \frac{\mu}{r}; \tag{3}$$

через μ обозначена масса планеты, R-расстояние частицы от Солнца, r-расстояние частицы от планеты.

Очевидно:

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ r &= \sqrt{(x+1)^2+y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Рассмотрим теперь движение частицы в полярной системе координат r, α с началом в центре планеты.

В такой системе координат интеграл Якоби имеет вид:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = r^2 - 2(1-\mu)r\cos\alpha + (1-\mu)^2 + \frac{2(1-\mu)}{R} + \frac{2\mu}{r} - C, \tag{5}$$

где

$$R = \sqrt{1 - 2r\cos\alpha + r^2}. \tag{6}$$

С другой стороны, величина q удельного планетоцентрического момента частицы (в невращающейся системе координат) определяется следующим соотношением:

$$q = r^2\left(1 + \frac{d\alpha}{dt}\right). \tag{7}$$

Найдем минимальное значение r. Для этого из (5) и (7) исключим величину $\frac{d\alpha}{dt}$ при условии минимума:

$$\frac{dr}{dt} = 0. \tag{8}$$

Получим:

$$\left(\frac{q-r^2}{r}\right)^2 = r^2 - 2(1-\mu)r\cos\alpha + (1-\mu)^2 + \frac{2(1-\mu)}{R} + \frac{2\mu}{r} - C. \tag{9}$$

Так как в этот момент частица находится вблизи планеты, то, отбрасывая члены второго порядка относительно малой величины r, из (6) получим:

$$\frac{1}{R} \approx 1 + r\cos\alpha. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9) после несложных преобразований получим:

$$(q_m - r_m^2)^2 = r_m^4 + (3 - 4\mu + \mu^2 - C)r_m^2 + 2\mu r_m, \tag{11}$$

где через r_m обозначено минимальное значение величины r.

Допустим теперь, что q_m связано с R_0 (расстояние частицы от Солнца в начальный момент) зависимостью:

$$R_0 = a_0 + a_1 q_m + a_2 q_m^2 + a_3 q_m^3 + \cdots \tag{12}$$

Будем считать, что в начальный момент частица находится в точке наибольшего удаления от планеты, которая лежит на оси X; вектор скорости частицы направлен перпендикулярно ее радиусу-вектору, величина скорости пусть также связана с q_m:

$$v_0 = b_0 + b_1 q_m + b_2 q_m^2 + \cdots \tag{13}$$

Обоснование этих допущений дано в [6].

При этих условиях функция ψ, входящая в формулу (1), будет зависеть только от одной переменной R_0.

Формула (1) при этом принимает вид:

$$\frac{dQ}{d\mu} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} q_m D_0 v_0 dR_0}{\int_{R_1}^{R_2} D_0 v_0 dR_0}, \tag{14}$$

где D_0 — означает поверхностную плотность материи в начальный момент; R_1 и R_2 соответствуют орбитам, которые проходят касательно к планете, т. е. для которых соблюдается условие:

$$r_m = r_0, \tag{15}$$

где r_0-радиус планеты.

Пусть D_0 также выражается с помощью ряда:

$$D_0 = c_0 + c_1 q_m + c_2 q_m^2 + \cdots \tag{16}$$

В формуле (14) заменим переменную интегрирования R_0 величиной q_m на основании (12), а также подставим значения v_0 и D_0, определенные из (13) и (16). Получим:

$$\frac{dQ}{d\mu} = \frac{\int_{q_1}^{q_2}(c_0 + c_1 q + c_2 q^2)(b_0 + b_1 q + b_2 q^2)(a_1 + 2a_2 q + 3a_3 q^2)\, q\, dq}{\int_{q_1}^{q_2}(c_0 + c_1 q + c_2 q^2)(b_0 + b_1 q + b_2 q^2)(a_1 + 2a_2 q + 3a_3 q^2)\, dq}. \tag{17}$$

Пределы интегрирования определим из (11) с использованием условия (15):

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= r_0^2 - \sqrt{\beta}, \\ q_2 &= r_0^2 + \sqrt{\beta}; \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где введено обозначение:

$$\beta = 2\mu r_0 + (3 - 4\mu + \mu^2 - c)r_0^2 + r_0^4. \tag{19}$$

Произведя интегрирование в (17), получим:

$$\frac{dQ}{d\mu} = r_0^2 + \tag{20}$$

$$+ \frac{\left(\frac{c_1}{c_0} + \frac{b_1}{b_0} + \frac{2a_2}{a_1}\right)\beta + \left(\frac{c_2}{c_0} + \frac{b_2}{b_0} + \frac{3a_3}{a_1} + \frac{b_1 c_1}{b_0 c_0} + \frac{2a_2 c_1}{a_1 c_0} + \frac{2a_2 b_1}{a_1 b_0}\right)\beta r_0^2}{3\left[1 + \left(\frac{c_1}{c_0} + \frac{b_1}{b_0} + \frac{2a_2}{a_1}\right)r_0^2 + \left(\frac{c_2}{c_0} + \frac{b_2}{b_0} + \frac{3a_3}{a_1} + \frac{b_1 c_1}{b_0 c_0} + \frac{2a_2 c_1}{a_1 c_0} + \frac{2a_2 b_1}{a_1 b_0}\right)\left(r_0^4 + \frac{\beta}{3}\right)\right]}.$$

Для приближенных оценок можно писать:

$$\frac{dQ}{d\mu} \approx r_0^2 + \left(\frac{c_1}{c_0} + \frac{b_1}{b_0} + \frac{2a_2}{a_1}\right) \cdot \frac{2\mu r_0}{3}. \tag{21}$$

Нами вычислены квазикруговые орбиты [6] для случая $\mu = 0.001$. Результаты этих вычислений следующие. Сталкивающиеся с планетой частицы исходят из двух зон, разделенных довольно широким промежутком. Соответствующие орбиты образуют два семейства. На рис. 2 показаны

заны типичные орбиты каждого семейства (с указанием направления движения).

В таблице I приведены значения R_0, v_0, q_m и r_m для нескольких орбит.

Таблица 1

R_0	V_0	q_m	r_m
0.883 050	0.180 142 1	−0.000 424	0.000 030
0.884 030	0 178 574 1	−0.000 109	0.000 006
0.885 012	0.177 002 4	+0.000 221	0 000 024
1.119 115	−0.174 582 0	+0.001 088	0.000 592
1.122 668	−0.179 626 8	−0.000 028	0.000 001
1.126 249	−0.184 704 8	−0.001 004	0.000 504

Из данных табл. 1 можно определить коэффициенты, стоящие в выражениях (12) и (13):

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 3.0, & a_1' &= -3.4 \\ a_2 &= -210, & a_2' &= +230, \\ b_0 &= 0.178, & b_0' &= -0.179, \\ b_1 &= -4.8, & b_1' &= +4.9; \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

соответственно для двух семейств орбит.

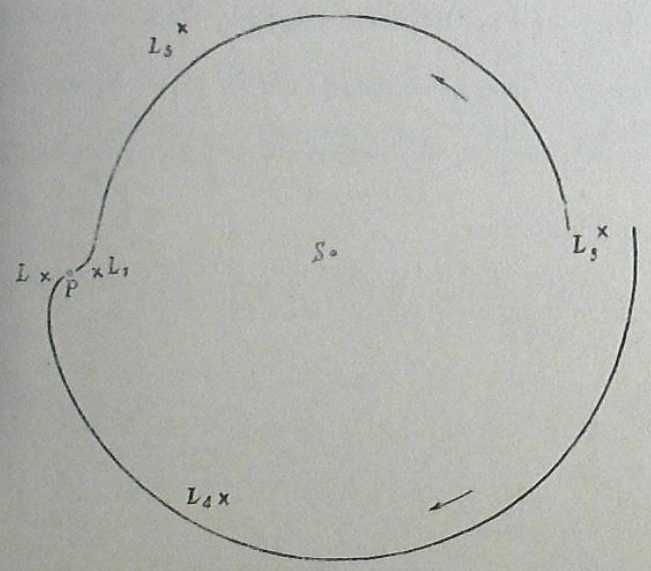

Рис. 2. Типичные орбиты малых тел, сталкивающихся с планетой.

Принимая плотность вещества D_0 постоянной, и подставляя значения (22) в (21), получим:

$$\frac{dQ}{d\mu} \approx r_0^2 - 0{,}11\, r_0, \qquad (23)$$

причем формула (23) оказывается справедливой для обоих семейств орбит.

Из (23) вытекает, что при малых значениях r_0 (вплоть до значения 0.1) к планете с массой порядка 0.001 $M_\odot$ частицы, движущиеся по квазикруговым орбитам, приносят отрицательный момент.

Частицы, движущиеся по эллиптическим орбитам, могут существенно изменить дело, так как в этом случае в формуле (23) следует брать некоторое эффективное значение r_0, которое будет величиной порядка среднего эксцентриситета орбит.

Наконец, интересно сравнить величину $\frac{dQ}{d\mu}$ с величиной $\frac{Q}{\mu}$ для Юпитера, масса которого наиболее подходит к рассмотренному нами случаю.

Принимая для радиуса Юпитера значение $r_0 = 10^{-4}$, из (23) найдем

$$\frac{dQ}{d\mu} = -1 \cdot 1 \cdot 10^{-8}.$$

С другой стороны, определение кинетического момента для Юпитера по формуле:

$$Q = \frac{2}{5}\, \mu\, \omega\, r_0^2$$

дает:

$$\frac{Q}{\mu} = +4 \cdot 2 \cdot 10^{-5}.$$

Мы видим, что величина $\frac{dQ}{d\mu}$ по абсолютной величине в четыре раза меньше значения $\frac{Q}{\mu}$. С другой стороны очевидно, что усреднение в интервале $[0, \mu]$ должно дать:

$$\overline{\frac{dQ}{d\mu}} = \frac{Q}{\mu}.$$

Некоторые другие факты, на которых мы здесь не можем остановиться, заставляют думать, что величина $\frac{dQ}{d\mu}$ имеет положительный знак для значений $\mu < \frac{1}{1\,500}$ и отрицательный — для $\mu > \frac{1}{1\,500}$.

Дальнейшие вычисления для малых значений μ должны решить справедливость этого предложения.

В заключение пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук Б. Ю. Левину и кандидату физ.-мат. наук В. С. Сафронову, которые внимательно прочитали рукопись и сделали ряд ценных замечаний.

Декабрь, 1952.

პლანეტების დღეღამური ბრუნვის საკითხისათვის

რ. კილაძე

(რეზუმე)

ჩატარებულია პლანეტების დღეღამური ბრუნვის ახსნის ცდა სამი სხეულის ამოცანის შესწავლის საფუძველზე.

განხილულია მცირე მასის ნაწილაკის მოძრაობა მზისა და პლანეტის გრავიტაციულ ველში.

გამოთვლილია პლანეტის კინეტიკური მომენტის წარმოებული მასით, როგორც პლანეტაზე დაცემული ნაწილაკების საწყისი პირობების ფუნქცია. შეფასებულია პლანეტის კინეტიკური მომენტის მასით წარმოებულის სიდიდე შემთხვევისათვის $\mu=0.001$.

ON AXIAL ROTATION OF PLANETS

R. I. KILADZE

(Summary)

An attempt to explain axial rotation of planets has been made on the basis of study of three bodies problem.

The motion of particles with small mass in the Sun's and the planet's gravitation field is considered.

The derivative of the planet's kinetic moment with respect to the mass has been computed as a function of initial conditions of particles collised with the planet.

The value of the derivative of the planet's kinetic moment with respect to the mass for the case $\mu=0{,}001$ is estimated.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Шмидт О. Ю. Возникновение планет и их спутников. Изв. АН СССР, сер. физ. 1950. 14, 1, 29.
2. Хильми Г. Ф. Проблема n тел в небесной механике и космогонии. Изд-во АН СССР, 1951.
3. Хильми Г. Ф. Качественные методы в проблеме n тел. Изд-во АН СССР, 1958.
4. Сафронов В. С. К вопросу о вращении планет. Вопросы космогонии, 1962, 8, 150.
5. Субботин М. Ф. Курс небесной механики т. II, 1937, М.-Л., стр. 108.
6. Киладзе Р. И. Об одном классе орбит в ограниченной задаче трех тел. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1964, 32, 209.

აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 32, 1965
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 32, 1965

К ВОПРОСУ О ВРАЩЕНИИ ПЛАНЕТ ВОКРУГ СОБСТВЕННОЙ ОСИ

Р. И. КИЛАДЗЕ

В литературе встречаются попытки вывести зависимость скорости суточного вращения планеты от величин других параметров, каковыми являются: радиус орбиты, масса и др. [1, 2, 3]. Удовлетворительного согласия теории с наблюдательными данными, однако, не было получено; истинные значения основных моментов вращения порой в два раза отличаются от вычисленных.

Настоящая работа ставит целью нахождение такой зависимости на основе соображений, развитых нами в [4].

В указанной работе мы нашли зависимость, которую в общем виде можно записать следующим образом:

$$\frac{dQ}{d\mu}=f(\mu)\cdot\mu r_0+r_0^2+\cdots, \tag{1}$$

где Q обозначает осевой момент вращения планеты, μ — её массу, а r_0 — радиус планеты. Формула (1) справедлива в системе единиц, в которой за единицу массы принята суммарная масса Солнца и данной планеты, за единицу длины—радиус орбиты планеты, а за единицу времени — период обращения планеты вокруг Солнца, деленный на 2π.

Переходя к единой для всех планет системе единиц (в которой, например, в качестве единиц измерения приняты астрономическая единица, $\frac{\text{год}}{2\pi}$, масса Солнца), с учетом третьего закона Кеплера получим:

$$\sqrt{R}\cdot\frac{dQ}{d\mu}=f(\mu)\cdot\mu r_0+\frac{r_0^2}{R}+\cdots, \tag{2}$$

где через R обозначена большая полуось орбиты планеты.

Сделаем теперь допущение, что радиус планеты зависит только от ее массы:

$$r_0=r_0(\mu). \tag{3}$$

При таком допущении правая часть (2) будет функцией одной переменной.

Величину осевого момента вращения для планеты с массой m получим, интегрируя (2):

$$\sqrt{R}\cdot Q=\int_0^m\left[f(\mu)\,r_0(\mu)\mu+\frac{r_0^2(\mu)}{R}+\cdots\right]d\mu=F(m). \tag{4}$$