ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Киладзе Р. И. Фотографические наблюдения колец Сатурна при прохождении Земли через их плоскость. Астрон. Циркул. АН СССР. 1967, № 439
2. Киладзе Р И Майер А. К. Хатисов А. Ш. Опыт центрировки 70-см менискового телескопа в двух оптических системах. Бюлл. Абастуман. астрофизич. обсерв., 1967, № 36, 119.

აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 37, 1969
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 37, 1969

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНТЕГРАЛОВ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

М. П. ИМНАДЗЕ

На основе работы автора «Интегралы задачи двух тел в сферических координатах и их применение для определения орбит» [1] сделана попытка разработать и практически испытать новый способ определения орбит, основанный на первых интегралах, выраженных в сферических координатах. В ходе исследования оказалось необходимым применить также и прямолинейные координаты. Для определения приращений отношений площадей треугольников (Δn_1 и Δn_2) применяются известные разложения в ряд для n_1 и n_2. Параметр орбиты определяется посредством интерполяционной формулы четвертого порядка для аргумента широты. Кроме формул, изложенных в работе [1], оказалось необходимым применение и других, что и рассматривается здесь в первую очередь. В качестве основной плоскости берется плоскость экватора, а обозначения b, l, встречаемые в работе [1], заменены через δ, α.

§ 1. Некоторые дополнительные формулы.

Отношения $\frac{\tau_1}{\tau}$, $\frac{\tau_2}{\tau}$ из работы [1] заменяем соответственно через n_1^0 и n_2^0. Тогда для c_2 получаем выражение:

$$c_2=\frac{2\left[(\varphi-\varphi_1)(1+n_2^0)\,n_1^{03}+(\varphi_2-\varphi)(1+n_1^0)\,n_2^{03}\right]}{\tau n_1^0 n_2^0\left[\frac{1}{\tau^2}+\frac{n_1^{02}}{\tau_2^2}+\frac{n_2^{02}}{\tau_3^2}\right]}, \tag{1}$$

где $\tau=k(t_3-t_1)$, k—постоянная Гаусса.

Аналогичное выражение получается для c_1:

$$c_1=\frac{2\left[(\lambda-\lambda_1)(1+n_2^0)\,n_1^{03}+(\lambda_2-\lambda)(1+n_1^0)\,n_2^{03}\right]}{\tau n_1^0 n_2^0\left[\frac{1}{r^2\cos^2\beta}+\frac{n_1^{02}}{r_1^2\cos^2\beta_1}+\frac{n_2^{03}}{r_3^2\cos^2\beta_2}\right]}, \tag{2}$$

где $r^2\cos^2\beta=x^2y^2$.

Желательно получить c_2 по-возможности с большей точностью, но применение с этой целью полиномов пятого и шестого порядка не оказалось целесообразным.

Из формулы отношения площадей треугольников, обозначая $u=r^{-3}$, для приращения $\Delta n_1=n_1-n_1^0$ получаем:

$$\Delta n_1 = n_1^0 \frac{(\tau_2+2\tau_1)\tau_2 u}{6}\left\{1 - \frac{(\tau_1\tau_2+\tau_2^2-\tau_1^2)}{2(\tau_2+2\tau_1)}\frac{\dot u}{u} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\tau_1(\tau_1^2+\tau_2^2-\tau_1\tau_2)+3\tau_1^3}{20(\tau_2+2\tau_1)}\frac{\ddot u}{u} + \frac{7\tau^2-3\tau_1^2}{60} u\right\}.$$

Вместо $\dot u$ и $\ddot u$ подставляем их значения по формуле численной производной [1] из полинома второго порядка:

$$\dot u = \frac{(u-u_1)\tau_1^2+(u_2-u)\tau_2^2}{\tau_1\tau_2\tau}, \qquad \ddot u = 2\frac{[-(u-u_1)\tau_1+(u_2-u)\tau_2]}{\tau_1\tau_2\tau}. \tag{3}$$

После преобразования получаем:

$$\Delta n_1 = n_1^0 n_2^0 (1+n_1^0)\frac{\tau^2 u}{6}\left[1 + \frac{n_1^{02}(3n_1^{02}-n_2^{02})-3n_1^0 n_2^0}{10n_1^0 n_2^0(1+n_1^0)}\left(1-\frac{u_1}{u}\right)+\right.$$

$$\left. + \frac{(n_2^{02}-n_1^0 n_2^0)(2+n_1^0 n_2^0)}{10n_1^0 n_2^0(1+n_1^0)}\left(1-\frac{u_2}{u}\right)+\frac{7-3n_1^{02}}{10}\,\frac{\tau^2 u}{6}\right]. \tag{4}$$

Аналогично:

$$\Delta n_2 = n_1^0 n_2^0 (1+n_2^{02})\frac{\tau^2 u}{6}\left[1 + \frac{(n_1^{02}-n_1^0 n_2^0)(2+n_1^0 n_2^0)}{10\,n_1^0 n_2^0(1+n_2^0)}\left(1-\frac{u_1}{u}\right)+\right.$$

$$\left. + \frac{n_2^{02}(3n_2^{02}-n_1^0)-3n_1^0 n_2^0}{10n_1^0 n_2^0(1+n_2^0)}\left(1-\frac{u_2}{u}\right)+\frac{7-3n_2^{02}}{10}\,\frac{\tau^2 u}{6}\right]. \tag{5}$$

Для Δm, на основе работы [1], получаем:

$$\Delta m = \frac{\tau^2 u}{60(1+n_1^0)}\left[\left(1-\frac{u_1}{u}\right)(1-n_2^{04}) - \left(1-\frac{u_2}{u}\right)(1-n_1^{04}) - \right.$$

$$\left. - n_1^0 n_2^0 (1 - n_1^0 n_2^0 + n_2^{02})\tau^2 u\right]. \tag{6}$$

Обозначим коэффициенты при $1-\frac{u_1}{u}$ и $1-\frac{u_2}{u}$ в формулах (4) и (5) через α_1, β_1, α_2, β_2:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{n_1^{02}(3n_1^{02}-n_2^{02})-3n_1^0 n_2^0}{10n_1^0 n_2^0(1+n_1^0)}, \quad & \beta &= \frac{(n_2^{02}-n_1^0 n_2^0)(2+n_1^0 n_2^0)}{10n_1^0 n_2^0(1+n_1^0)}, \\ \alpha_2 &= \frac{(n_1^{02}-n_1^0 n_2^0)(2+n_1^0 n_2^0)}{10\,n_1^0 n_2^0(1+n_2^0)}, \quad & \beta_2 &= \frac{n_2^{02}(3n_2^{02}-n_1^{02})-3n_1^0 n_2^0}{10\,n_1^0 n_2^0(1+n_2^0)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Для α_1 и β_1 составлена табличка с аргументом n_1^0 от 0.20 до 0.80 с шагом 0.01 (см. ниже). Точность значений α_1 и β_1, которую дает эта таблица, в некоторых случаях может быть достаточна для определения Δn_1 и Δn_2, α_2 и β_2 можно получить из этой же таблицы, имея в виду, что $\alpha_2(n_1^0)=\beta_1(n_2^0)$ и $\beta_2(n_1^0)=\alpha_1(n_2^0)$ (т. е. чтобы получить коэффициент α_2 для аргумента n_1^0, нужно выписать из таблицы коэффициент β_1 и для аргумента $n_2^0=1-n_1^0$; аналогично—для β_2).

§ 2. Определение геоцентрических расстояний.

Определение орбит обычно разделяется на две части: 1) определение расстояний и 2) определение элементов. В настоящее время имеется возможность определить геоцентрические расстояния посредством радиолокационных наблюдений. В этом случае большая часть §2 оказывается лишней и можно прямо приступить к определению орбиты по § 3.

Вычисление можно вести в следующей последовательности.

1. Исходные величины

Исходными данными считаются: 1) три момента наблюдений t_1, t, t_2; 2) наблюденные экваториальные координаты светила для этих моментов $\alpha_1, \delta_1; \alpha, \delta; \alpha_2, \delta_2$ и 3) топоцентрические координаты Солнца для тех же моментов $X_1, Y_1, Z_1; X, Y, Z; X_2, Y_2, Z_2$. Последние выписываются из «Астрономического ежегодника» по известному правилу.

2. Вычисление основных коэффициентов

Сперва вычисляются направляющие коэффициенты:

$$\lambda_i = \cos\delta_i\cos\alpha_i,, \quad \mu_i = \cos\delta_i\sin\alpha_i, \quad \nu_i = \sin\delta_i, \quad (i=1,\ 0,\ 2). \tag{8}$$

«Знаменатель» D вычисляется по формуле:

$$D = \nu_1(\lambda\mu_2-\mu\lambda_2) - \nu(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2) + \nu_2(\lambda_1\mu-\mu_1\lambda), \tag{9}$$

после чего определяются a_1, b_1, c_1, a, b, c, a_2, b_2, c_2:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{D}(\nu_2\mu-\mu_2\nu), & b_1 &= \frac{1}{D}(\nu\lambda_2-\nu_2\lambda), & c_1 &= \frac{1}{D}(\lambda\mu_2-\mu\lambda_2), \\ a &= \frac{1}{D}(\nu_2\mu_1-\nu_1\mu_2), & b &= \frac{1}{D}(\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1), & c &= \frac{1}{D}(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2). \\ a_1 &= \frac{1}{D}(\nu\mu_1-\nu_1\mu), & b_2 &= \frac{1}{D}(\nu_1\mu-\nu\mu_1), & c_2 &= \frac{1}{D}(\lambda_1\mu-\mu_1\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для контроля можно применить формулы:

$$a_1\lambda_1 - a\lambda + a_2\lambda_2 = 1, \quad b_1\mu_1 - b\mu + b_2\mu_2 = 1, \quad c_1\nu_1 - c\nu + c_2\nu_2 = 1.$$

3. Нулевое приближение для расстояний ρ и r

Сперва вычисляются n_1^0, n_2^0, и τ:

$$n_1^0 = \frac{t_2-t}{t_2-t_1}, \quad n_2^0 = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}, \quad \tau = \kappa(t_2-t_1), \tag{11}$$

где k постоянная Гаусса, $k = 0.017202099$.

Потом найдутся выражения $f_0(X)$, $f_0(Y)$, $f_0(Z)$:

$$f_0(X)=n_1^0X_1-X+n_2^0X_2,\quad f_0(Y)=n_1^0Y_1-Y+n_2^0Y_2,\quad f_0(Z)=n_1^0Z_1-Z+n_2^0Z_2. \tag{12}$$

что дает возможность определить ρ_0 и r_0^2:

$$\rho_0=f_0(X)\,a+f_0(Y)\,b+f_0(Z)\,c;\quad r_0^2=\rho_0^2+2\rho_0R\cos\psi+R^2, \tag{13}$$

где

$$R\cos\psi=-(X\lambda+Y\mu+Z\nu),\quad R^2=X^2+Y^2+Z^2. \tag{14}$$

4. Первое приближение для n_1 и n_2

Для первого приближения можно применить упрощенные формулы (4) и (5) § 1:

$$\Delta n_1=n_1^0n_2^0(1+n_1^0)\,\frac{\tau^2u}{6}\left[1+\gamma_1\frac{\tau^2u}{6}\right],\quad \Delta n_2=n_1^0n_2^0(1+n_2^0)\,\frac{\tau^2n}{6}\left[1+\gamma_2\frac{\tau^2u}{6}\right], \tag{15}$$

где

$$\gamma_1=\frac{7-3n_1^{02}}{10},\quad \gamma_2=\frac{7-3n_2^{02}}{10}. \tag{151}$$

Для начала можно положить $u=\frac{6}{5}u_0$. Посредством приближенных значений Δn_1 и Δn_2 определяются поправки $\Delta f(X)$, $\Delta f(Y)$, $\Delta f(Z)$:

$$\Delta f(X)=\Delta n_1X_1+\Delta n_2X_2,\quad \Delta f(Y)=\Delta n_1Y_1+\Delta n_2Y_2,$$
$$\Delta f(Z)=\Delta n_2Z_1+\Delta n_2Z_2, \tag{16}$$

которые прибавляются к нулевым значениям (12). Подставляя новые значения $f(X)$, $f(Y)$, $f(Z)$ в п рвую формулу (13), получим ρ, а затем r^2 — из второй формулы (13). Затем найдем r^{-3} по r^2. Из (15) снова определим Δn_1 и Δn_2 и т. д., пока последние значения Δn_1 и Δn_2 не совпадут с их предыдущими значениями. Эти поправки прибавляются к нулевым значениям.

$$n_1^0 \text{ и } n_2^0:\quad n_1=n_1^0+\Delta n_1,\quad n_2=n_2^0+\Delta n_2.$$

Первое приближение можно вести также следующим образом. Вычисляем приближенно:

$$\Delta n_1=\frac{1}{6}n_1^0n_2^0(1+n_1^0)\,\tau^2u. \tag{17}$$

Решаем систему уравнений

$$\rho=p_0+Q(n_1^0+\Delta n_1)=\rho_0+Q\Delta n_1,\quad r^2=\rho_2+2\rho R\cos\psi+R^2, \tag{18}$$

последовательными приближениями; т. е. посредством r_0^2 определим r_0^{-3}, подставляя (17) получим Δn_1 и потом, решая систему (18), получим более точные значения ρ и r^2 и т. д. P и Q вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}P&=(-X+mX_2)\,a+(-Y+mY_2)\,b+(Z-mZ_2)\,c,\\ Q&=(X_1+hX_2)\,a+(Y_1+hY_2)\,b+(Z_1+hZ_2)\,c,\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где для первого приближения:

$$m_0=\frac{n_2^0-n_1^0}{1+n_1^0},\quad h=\frac{1+n_2^0}{1+n_1^0} \tag{20}$$

После определения Δn_1 получим n_1 и n_2:

$$n_1=n_1^0+\Delta n_1,\quad n_2=n_2^0+h\Delta n_1.$$

5. Первое приближение для расстояний

Посредством последних значений Δn_1 и Δn_2 определяются поправки $\Delta f(X)$, $\Delta f(Y)$, $\Delta f(Z)$ по формуле (16); прибавляя их к нулеым значениям, получим $f(X)$, $f(Y)$, $f(Z)$, после чего геоцентрические расстояния определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}n_1\rho_1&=f(X)\,a_1+f(Y)\,b_1+f(Z)\,c_1,\\ \rho&=f(X)\,a+f(Y)\,b+f(Z)\,c,\\ n_2\rho_2&=f(X)\,a_2+f(Y)\,b_2+f(Z)\,c_2\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Затем вычисляются гелиоцентрические координаты:

$$x_i=\rho_i\lambda_i-X_i,\quad y_i=\rho_i\mu_i-Y_i,\quad z_i=\rho_i\nu_i-Z_i,\quad (i=1,\,0,\,2) \tag{22}$$

и определяются гелиоцентрические расстояния:

$$r_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2,\quad (i=1,\,0,\,2). \tag{23}$$

Наконец, учитывается планетная аберрация для моментов наблюдения:

$$t_1'=t_1-A\rho_1,\quad (i=1,\,0,\,2), \tag{24}$$

где $A=0.0057788$.

6. Второе приближение для n_1 и n_2

После перевычисления τ, n_1^0 и n_2^0 (пункт 3), Δn_1 и Δn_2 определяются по формулам (4) и (5):

$$\Delta n_1=n_1^0n_2^0(1+n_1^0)\frac{\tau^2u}{6}\left[1+\alpha_1\left(1-\frac{u_1}{u}\right)+\beta_1\left(1-\frac{u_2}{u}\right)+\gamma_1\frac{\tau^2u}{6}\right] \tag{4'}$$

$$\Delta n_2=n_1^0n_2^0(1+n_2^0)\frac{\tau^2u}{6}\left[1+\alpha_2\left(1-\frac{u_1}{u}\right)+\beta_2\left(1-\frac{u_2}{u}\right)+\gamma_2\frac{\tau^2u}{6}\right] \tag{5'}$$

Значения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ даются формулами (7) и (15').
Эти коэффициенты вычисляются один раз, после чего последовательным приближением, как в пункте 4, посредством формул (4), (5) и (13) определяются окончательные значения Δn_1 и Δn_2.

Можно также определить Δn_1 и Δn_2 по формулам (4) и (6) §1 и завершить приближение, как в пункте 4. В этом случае заново вычисляется P по формуле (19), где вместо m_0 нужно подставить $m=m_0+\Delta m$.

Можно также применить формулы Гибса:

$$n_1 = n_1^0 \frac{1+B_1 r_1^{-3}}{1-Br^{-3}}, \qquad n_2 - n_2^0 \frac{1+B_2 r_2^{-3}}{1-Br^{-3}}, \tag{25}$$

где

$$B_1 = \frac{1}{1}\,(n_2^0 - n_1^{02})\,\tau^2, \qquad B = \frac{1}{12}\,(1+n_1^0 n_2^0)\,\tau^2, \qquad B_2 = \frac{1}{12}\,(n_1^0 - n_2^{02}). \tag{26}$$

7. Второе приближение для расстояний

Второе приближение для расстояний и гелиоцентрические координаты определяются совершенно аналогично первому приближению, посредством новых значений n_1 и n_2.

Если первое приближение проведено посредством Δn_1 и Δm, то величины P_1, Q_1, P_2, Q_2 вычисляются как P, Q по аналогичным (19)-ой формулам.

§ 3. Определение элементов.

8. Определение c_4 и $\frac{c_2}{c_1}$

c_4 и ε определяются по формулам:

$$\varepsilon \sin c_4 = \frac{z_1 y_2 - y_1 z_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}, \qquad \varepsilon \cos c_4 = \frac{x_1 z_2 - z_1 x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}. \tag{27}$$

Делением получается $\operatorname{tg} c_4$, а возвышением в квадрат и сложением — ε^2. Посредством ε получаются $\frac{c_2}{c_1}$ и i.

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{1+\varepsilon^2}, \qquad \operatorname{tg} i = \varepsilon. \tag{28}$$

9. Определение гелиоцентрического прямого восхождения и аргумента широты

Гелиоцентрическая «долгота» λ, что в нашем случае (когда применяются экваториальные координаты) представляет гелиоцентрическое прямое восхождение, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{y}{x}, \tag{29}$$

после чего находится аргумент широты:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c_2}{c_1}\operatorname{tg}(\lambda + c_4). \tag{30}$$

Вычисление нужно вести для всех трех моментов наблюдения.

10. Определение параметров орбиты

c_2 вычисляется по формуле (1) §1:

$$c_2 = \frac{2\left[(\varphi-\varphi_1)(1+n_2^0)\,n_1^{03} + (\varphi_2-\varphi)(1+n_1^0)\,n_2^{03}\right]}{\tau n_1^0 n_2^0 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{n_1^{02}}{r_1^2} + \frac{n_2^{02}}{r_2^2}\right]}. \tag{1}$$

Для контроля можно вычислить c_1:

$$c_1 = \frac{2\left[(\lambda-\lambda_1)(1+n_2^0)\,n_1^{03} + (\lambda_2-\lambda)(1+n_1^0)\,n_2^{03}\right]}{\tau n_1^0 n_2^0 \left[\frac{1}{r^2\cos^2\beta} + \frac{n_1^{02}}{r_1^2\cos^2\beta_1} + \frac{n_2^{02}}{r_2^2\cos^2\beta_2}\right]}. \tag{2}$$

Отношение $\frac{c_2}{c_1}$ должно быть равным его значению, полученному по формуле (28). Посредством c_2 определяется p:

$$p = c_2^2.$$

11. Вычисление эксцентриситета и расстояния перигелия от узла

Обозначая $q_1 = \frac{p}{r_1} - 1$, $q_2 = \frac{p}{r_2} - 1$, по формуле для радиус-вектора $r = \frac{p}{1+e\cos v}$ получим:

$$e\cos v_1 = q_1, \qquad e\sin v_1 = \frac{q_1\cos(\varphi_2-\varphi_1) - q_2}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}. \tag{31}$$

Отсюда определяются v_1 и e. Из равенства $v_1 = \varphi_1 + c_5$ найдется $c_5 = -\omega$.

12. Определение средней аномалии и среднего движения

Средняя аномалия и среднее движение определяются обычным путем

$$\operatorname{tg}\frac{E_i}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v_i}{2}, \qquad (i=1, 2), \tag{32}$$

$$M_i = E_i - e\sin E_i \qquad (i=1, 2). \tag{33}$$

Контроль:

$$n = \frac{k}{a^{3/2}}, \text{ где } a = p:(1-e^2|^2). \tag{34}$$

Момент прохождения через перигелий:

$$T = t_1 - \frac{M_1}{n} = t_2 - \frac{M_2}{n}. \tag{35}$$

13. Представление наблюдений

Вычисляя средние аномалии $M_i = M_1 + n(t_i - t_1)$ из уравнения Кеплера (33) и (32), определим эксцентрические аномалии и истинные аномалии для моментов наблюдения t_i, после чего определяются r_i и φ_i:

$$r_i = \frac{p}{1 + e\cos v_i}, \qquad \varphi_i = v_i - c_5. \tag{36}$$

Затем определяются гелиоцентрические прямое восхождение λ_i и склонение β_i:

$$\operatorname{tg}(\lambda_i + c_4) = \frac{c_1}{c_2}\operatorname{tg}\varphi_i, \qquad \operatorname{tg}\beta_i = \varepsilon\sin(\lambda_i + c_4). \tag{37}$$

Наконец, из зависимости между координатами:

$$r_i\cos\beta_i\cos\lambda_i + X_i = \rho_i\cos\delta_i\cos\alpha_i, \quad r_i\cos\beta_i\sin\lambda_i + Y_i = \rho_i\sin\delta_i\sin\alpha_i,$$
$$r_i\sin\beta_i + Z_i = \rho_i\sin\delta_i \tag{38}$$

вычисляются α_i, δ_i и сравниваются с наблюдаемыми значениями.

14. Переход от экваториальных элементов к эклиптическим

От экваториальных элементов можно перейти к эклиптическим элементам, применяя формулы [2, 3]:

$$\cos i' = \cos\varepsilon\cos i + \sin\varepsilon\sin i\cos\Omega,$$

$$\sin d = \frac{\sin\Omega}{\sin i'}\sin\varepsilon, \qquad \omega' = \omega - d, \tag{39}$$

$$\cos\Omega' = \cos\Omega\cos d - \sin\Omega\sin d\cos i.$$

§ 4. Пример определения орбиты. Данные взяты из руководства М. Ф. Субботина [3, § 64].

1) Исходные величины

	$t_1 = 17^d.83368$,	$t = 7^d.88882$,	$t_2 = 48^d.83590$,
α	348°35′34″	346°51′37″	345°10′7″.8
δ	7°26′ ″4	6°40′39″.1	5°3′32″.3
X	—0·999660	—0·999535	—0·904813
Y	— 093389	— 064631	— 382039
Z	— 04047	— 028066	— 165734

2) Вычисление основных коэффициентов.

λ	0·9720070	0·96721 9	0·9629188
μ	— 1961176	— 57834	— 549743
ν	1293840	116281	0881806

D=	0·0004553				
a_1	1·375101	a	34·4561 8	a_2	14·067130
b_1	58·569139	b	85·338397	b_2	6·596931
c_1	64·108840	c	1 9·501460	c_2	65·364959

3) Нулевое приближение ρ и r.

$t-t_1$	10·05514	t_2-t	0·94708	t_2-t_1	31·002
τ	0·5333032	m_0	0·2096648	h	0·790335
n_1^0	6756639	n_2^0	3 43361		
$f_0(X)$	0306380	$f_0(Y)$	0038204	$f_0(Z)$	0016573
ρ_0	1·167051	r_0^2	4·5961 5	$R\cos\psi$	955434

4) Первое приближение для n_1 и n_2.

$\frac{1}{6}\, n_1^0 n_2^0 (1 + n_1^0)\tau^2$ 0·0174065 Q—65·15993

$(\Delta n_1)_0$	0·00176654	$Q\Delta n_1$	0·115104	u	0·1197003
Δn_1	0020836	$Q\Delta n_1$	135767	u	1232266

. . . .

Δn_1	0021611	h	7903352	Δn_2	0017079
n_1	6778250	n_2	3260440		

5) Первое приближение для расстояний.

f (X)	0·0269317	f (Y)	0·0033707	f (Z)	0·00146 5
ρ_1	1·002690	ρ	1·026216	ρ_2	1·143729
x_1	9739901	y_1	—0·2899749	z_1	0·089 21
x	9921044	y	— 1670713	z	1473958
x_1	·006131	y_2	0904178	z_2	2665889
r_1^2	3·9886828	r_2	4·0181183	r_2^2	4·1038074
r_1	1·9971687	r	·0045245	r_2	·0257856
$A\rho_1$	0·00578	$A\rho$	0·00592	$A\rho_2$	0·00660
t_1^1	17·82790	t'	7·88290	t_2'	48·82930

6) Второе приближение для n_1 и n_2.
Вычисление проведено по формуле Гибса (25).

$t-t_1$	10·05500	t_2-t	0·94640	t_2-t_1	31·00140
τ	0·533 89	n_1^0	0·6756598	n_2^0	0·3243402
B_1	00313 6	B_2	0135 01	B	0288934
n_1	6778 57	n_2	3260372		

7) Второе приближение для расстояний.

f (X)	0·0269371	f (Y)	0·0033734	f (Z)	0·0014637
ρ_1	1·0026816	ρ	1·0264768	ρ_2	1·1439604
x_1	9742735	y_1	—0·2900321	z_1	0·089 590
x	9923566	y	— 1671302	z	1474264
x_2	2·0063540	y_2	0903588	z_2	666093

r_1^2	3·9898416	r_2	4·0191518	r_2^2	4·1047016
r_1	1·9974588	r	2·0047822	r_2	2·0260063

8) Вычисление c_4 и $\frac{c_2}{c_1}$.

$x_1y_2-y_1x_2$	0·7603000	$z_1y_2-y_1z_2$	0·0853906	$x_1z_2-z_1x_2$	0·347245
$\varepsilon\sin c_4$	1123117	$\varepsilon\cos c_4$	4567598	$\mathrm{tg}\, c_4$	2458879
c_4	13°48'51".4	$\frac{c_2}{c_1}$	1·1050987	i	25°11'26".4

9) Определение гелиоцентрического прямого восхождения и аргумента широты.

$\mathrm{tg}\lambda$	—0·1469057	—0·0838857	—0·0450363
λ	351°38'33".7	355°12'17".8	2°34'43".1
$\lambda+c_4$	5°27'25".1	9°1'9".2	16°23'34".5
φ	6°1'35".1	95656·6	18°0'33".6

10) Определение параметра орбиты.

$\varphi-\varphi_1$	0·0684620 рад.	$\varphi_2-\varphi$	0·0146784 рад.		
$(1+n_2^0)n_1^{03}$	4084922	$(1+n_1^0)n_2^{03}$	0·0571727 числ.		0·07201946
$\frac{n_1^{02}}{r_1^2}$	1144196	$\frac{n_2^{02}}{r_2^2}$	0256283	$\frac{1}{r^2}$	2488087
Знам.	045444465	c_2	1·5847542	p	2·5114459

11) Вычисление эксцентриситета и расстояния перигелия от узла.

$\varphi_2-\varphi_1$	11°58'58".3	$\sin(\varphi_2-\varphi_1)$	0·207619	$\cos(\varphi_2-\varphi_1)$	0·978210
q_1	0·2573205	q_2	2396041	$e\sin v_1$	0583251
$\mathrm{tg}\, v_1$	2266632	v_1	12°46'15".7	c_5	6°44'40".6
e^2	06961570	e	0·2638479	a_2	2·6993640

12) Вычисление средней аномалии и среднего движения.

$\frac{v_1}{2}$	6°23'7".8	$\frac{v_2}{2}$	12°22'37".1	$\sqrt{\frac{1-1}{1+e}}$	0·7631965
E_1	9°45'49".4	E_2	19°0'54".4	$a^{3/2}$	4·4349854
M_1	7°.2000123	M_2	14°.0896146	t_2-t_1	31·00140
n	0°.2222352	контроль		n	0°.2222347

13) Представление наблюдений.

Эпоха $t_1'=17·82790$		сент. 1930 г.		M_1	7°.2000140
n	0°.2222352	M	9°.343589	M_2	14°.089616
E_1	9°45'49".4	E	12°46'41".5	E_2	19°0'54".4
v	124615·6		164137·6		24°45'15".0
$e\cos v$	0·2573206		0·2527275		0·2396042

r	1·997459	2·004782	—2·026006
φ	6°1'35".0	9°56'57".0	18°0'33".4
$\lambda+c_4$	5°27'24".9	9°1'9".5	16°23'34".3
λ	351°38 34".5	3551218·1	2°34'24".9
β	°33'40".2	4°13'2".1	7°33'41".9
$\rho\cos\delta\cos\alpha$	0·9746113	0·9928206	1·1015405
$\rho\cos\delta\sin\alpha$	1966460	—2317571	—0·2916819
$\rho\sin\delta$	1297304	1193615	1008740
α	348°35'33".6	346°51 38".0	345°10'7".6
δ	7°26'2".3	6°40'39".4	5°3'31".9
$\alpha_н-\alpha_в$	$0^s.04$	$-0^s.05$	$0^s.01$
$\delta_н-\delta_в$	0".1	—0".3	0".3

Представление наблюдений можно считать удовлетворительным.

Таблица коэффициентов α_1 и β_1

n_1^0	α_1	β_1	n_1^0	α_1	β_1
0·20	—0·26083	0·54000	0·51	—0·16144	0·00584
21	— 25874	49438	52	— 15597	— 01138
22	— 25661	45304	53	— 15 26	— 01664
23	— 25445	41557	54	— 14425	— 02163
24	— 25225	38153	55	— 13796	— 02636
25	— 25000	35000	56	— 13135	— 03086
26	— 24771	32123	57	— 12440	— 03512
27	— 24537	29474	58	— 117 9	— 03917
28	— 24298	27 29	59	— 10938	— 04302
29	— 24053	24766	6	— 10125	— 04667
30	— 23802	22667	61	— 09266	— 05013
31	— 23545	20716	62	— 08 58	— 05342
32	— 23280	18900	63	— 07 97	— 06654
33	— 23009	172 6	64	— 06377	— 05950
34	— 22730	15623	65	— 05294	— 06231
35	— 22442	14143	66	— 04143	— 06497
36	— 22145	12756	67	— 02915	— 06749
37	— 21839	11454	68	— 0 6 6	— 06988
38	— 21522	102 2	69	— 002 6	— 07215
39	— 21195	09 82	7	+ 01296	— 07429
40	— 20857	08 00	71	029 4	— 07631
41	— 20507	06980	72	046 6	— 07822
42	— 20144	— 06019	73	065 5	— 08003
43	— 19767	— 05112	74	08525	— 08173
44	— 19375	— 04255	75	107 4	— 08333
45	— 18969	— 03444	76	13096	— 08484
46	— 18546	— 02678	77	15693	— 08626
47	— 18105	— 01953	78	18537	— 08759
48	— 17646	— 01267	79	21662	— 08884
49	— 17167	— 00616	8	25111	— 09000
50	— 16667	— 00000			

Вычислительный центр АН Грузинской ССР

Сентябрь, 1963 г.

ორბიტის განსაზღვრა ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრალების გამოყენებით სფერულ კოორდინატებში

მ. იმნაძე

THE ORBIT DETERMINATION ON THE BASIS OF TWO-BODY PROBLEM INTEGRALS IN SPHERICAL COORDINATES

M. P. IMNADZE

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Имнадзе М. П. Интегралы задачи двух тел в сферических координатах и применение их для определения орбит. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1958, 22.
2. Дубяго А. Д. Определение орбит. 1949.
3. Субботин М. Ф. Небесная механика. 1941, 1.

აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 37, 1969
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 37, 1969

ПСЕВДОАНОМАЛИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭФЕМЕРИД

М. П. ИМНАДЗЕ

Помимо известных аномалий — средней, истинной и эксцентрической, в небесной механике встречаются и другие углы, которые также можно назвать аномалиями. В общем виде вопрос о различных аномалиях рассмотрел М. Ф. Субботин [1], однако он не выделяет какое-нибудь конкретное ее выражение. Аномалию, которая рассматривается здесь, применял также Штумпф, для вычисления эфемерид [2], но он подходил к вопросу с иной точки зрения, чем автор данной статьи.

Псевдоаномалией мы называем угол при втором фокусе, составленный из большой оси и второго радиус-вектора, отсчитанный против часовой стрелки от направления на перигелий. Обозначим его через u (рис. 1). Известны следующие зависимости [3]:

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}, \tag{1}$$

$$r'=\frac{p}{1-e\cos u}, \qquad r=2a-r'. \tag{2}$$

Уравнение Кеплера можно переписать так:

$$M=2\left[\operatorname{arctg}\eta-\frac{e\eta}{1+\eta^2}\right], \tag{3}$$

где

$$\eta=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}. \tag{4}$$

Посредством (3) и (4) составлена таблица для M-u по аргументам u и e; при этом u изменяется через 3° от 0° до 180°, а e через 0.05 от 0 до 0.95 (хотя здесь мы приводим их для краткости до 0.50) (табл. 5). Из этой таблицы, при помощи двойной интерполяции, определяется u для данного M, когда $M < 180°$ (для случая, когда $M > 180°$ см. дальше). В двух последовательных столбцах e_1 и e_2 в строке u_1 найдутся поправки Δ_{11} и Δ_{12}. Соответствующая поправка Δ_I для e ($e_1 < e < e_2$) в строке u_1 определяется из равенства:

$$\Delta_I=\frac{e-e_1}{e_2-e_1}(\Delta_{12}-\Delta_{11})+\Delta_{11}. \tag{5}$$

Аналогично, в строке u_2 поправка для e будет: