ორბიტის განსაზღვრა ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრალების გამოყენებით სფერულ კოორდინატებში

მ. იმნაძე

THE ORBIT DETERMINATION ON THE BASIS OF TWO-BODY PROBLEM INTEGRALS IN SPHERICAL COORDINATES

M. P. IMNADZE

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Имнадзе М. П. Интегралы задачи двух тел в сферических координатах и применение их для определения орбит. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1958, 22.
2. Дубяго А. Д. Определение орбит. 1949.
3. Субботин М. Ф. Небесная механика. 1941, 1.

აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 37, 1969
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 37, 1969

ПСЕВДОАНОМАЛИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭФЕМЕРИД

М. П. ИМНАДЗЕ

Помимо известных аномалий — средней, истинной и эксцентрической, в небесной механике встречаются и другие углы, которые также можно назвать аномалиями. В общем виде вопрос о различных аномалиях рассмотрел М. Ф. Субботин [1], однако он не выделяет какое-нибудь конкретное ее выражение. Аномалию, которая рассматривается здесь, применял также Штумпф, для вычисления эфемерид [2], но он подходил к вопросу с иной точки зрения, чем автор данной статьи.

Псевдоаномалией мы называем угол при втором фокусе, составленный из большой оси и второго радиус-вектора, отсчитанный против часовой стрелки от направления на перигелий. Обозначим его через u (рис. 1). Известны следующие зависимости [3]:

$$\mathrm{tg}\,\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}, \tag{1}$$

$$r'=\frac{p}{1-e\cos u}, \qquad r=2a-r'. \tag{2}$$

Уравнение Кеплера можно переписать так:

$$M=2\left[\,\mathrm{arctg}\,\eta-\frac{e\eta}{1+\eta^2}\right], \tag{3}$$

где

$$\eta=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}. \tag{4}$$

Посредством (3) и (4) составлена таблица для M-u по аргументам u и e; при этом u изменяется через 3° от 0° до 180°, а e через 0.05 от 0 до 0.95 (хотя здесь мы приводим их для краткости до 0.50) (табл. 5). Из этой таблицы, при помощи двойной интерполяции, определяется u для данного M, когда $M < 180^0$ (для случая, когда $M > 180^0$ см. дальше). В двух последовательных столбцах e_1 и e_2 в строке u_1 найдутся поправки Δ_{11} и Δ_{12}. Соответствующая поправка Δ_I для e ($e_1 < e < e_2$) в строке u_1 определяется из равенства:

$$\Delta_I=\frac{e-e_1}{e_2-e_1}\,(\Delta_{12}-\Delta_{11})+\Delta_{11}. \tag{5}$$

Аналогично, в строке u_2 поправка для e будет:

$$\Delta_{II}=\frac{e-e_1}{e_2-e_1}\,(\Delta_{22}-\Delta_{21})+\Delta_{21}. \tag{6}$$

Если в таблице была бы строка $u\ (u_1<u<u_2)$ соответствующая данному M, поправка Δ для эксцентриситета удовлетворяла бы равенству $(\Delta-\Delta_I):(\Delta_{II}-\Delta_I)=(u-u_1):(u_2-u_1)$, где $u=M-\Delta$. Отсюда:

$$\Delta=\frac{(M-u_1)\,(\Delta_{II}-\Delta_I)+\Delta_I\,(u_2-u_1)}{u_2-u_1+\Delta_{II}-\Delta_I}. \tag{7}$$

Так как табличная разность выражена в радианах, то знаменатель можно выразить в радианах, а в числителе $M-u_1$ и u_2-u_1 в градусах; тогда Δ получается в градусах и

$$u=M-\Delta. \tag{8}$$

В нашем случае $u_2-u_1=3^0=0.052360$ рад., $e_2-e_1=0.05$, и для вычисления Δ имеем:

$$\Delta_I=20\,(e-e_1)\,(\Delta_{12}-\Delta_{11})+\Delta_{11}, \tag{5^1}$$

$$\Delta_{II}=20\,(e-e_1)\,(\Delta_{22}-\Delta_{21})+\Delta_{21}, \tag{6^1}$$

$$\Delta=\frac{\Delta_I+(M-u)\,\dfrac{1}{3}\,(\Delta_{II}-\Delta_I)}{0{,}01745+\dfrac{1}{3}\,(\Delta_{II}-\Delta_I)} \tag{7^1}$$

и по формуле (8) получается u. Приближенно $\Delta=\dfrac{\Delta_{11}+\Delta_{22}}{2}\cdot 57{,}3$.

Поправка $\Delta=M-u$, как функция от u, имеет вид

$$\Delta=f(u)=2\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}-\frac{e\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}}{1+\dfrac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\dfrac{u}{2}}\right]-u. \tag{9}$$

В пределах от 0° до 180° эта функция, для данной e, имеет один минимум и один максимум. Значение аргумента u, при котором Δ принимает минимальное и максимальное значения, получается приравнением нулю первой производной от $f(u)$, что дает:

$$\cos u=\frac{1}{e}\left[1-\sqrt{1-e^2}\pm\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-\sqrt{1-e^2}}\right]. \tag{10}$$

При $e=0$ получается неопределенность, которую можно раскрыть по правилу Лопиталя. Значения аргументов, при которых поправка Δ принимает минимальное или максимальное значения (в пределах $0<e<0.60$), даются в табл. 1. Там же помещены значения нулей кроме очевидных $u=0$ и $u=180^\circ$.

Для интерполирования поправки при данном e можно составить квадратичный полином в двух промежутках: 1) от нуля до M_0 возьмем $a\,(M-M_1)^2+b\,(M-M_1)+c=\Delta$ и 2) от M_0 до 180° — $a\,(M_2-M)_2^2+в\,(M_2-M)+c=\Delta$, где M_0, M_1, M_2, соответственно, обозначают значения средней аномалии,

Таблица 1

e	Минимум при $M_1=$	Максимум при $M_2=$	Нуль при $M_0=$	Минимум Δ_1	Максимум Δ_2
0·00	45°·00000	135°·00000	90°·00000	0·00000	0·00000
05	42·95660	132·99315	86·17889	—0·00060	0·00066
10	40·88173	131·02595	82·35306	00228	00276
15	38·77733	129·47572	78·52167	—0·00488	0·00650
20	37·64672	127·23147	74·67667	00827	01214
25	34·89156	125·41478	70·81000	01232	01993
30	32·31456	123·66470	66·92750	01689	03025
35	30·12067	121·98904	63·02444	02180	04347
40	27·99285	119·39966	59·08222	02550	06008
45	25·67193	118·89499	55·08028	03241	08038
50	23·42494	117·54234	51·06750	03762	10596
55	21·14818	116·31794	46·95694	04290	13698
60	18·89453	115·27198	42·79583	04765	17500

при которых поправка равна нулю, принимает минимальное значение Δ_1 и максимальное значение Δ_2.

Для первого промежутка после упрощения получаем

$$\Delta=\delta_1\,(M_0-M)\,M, \tag{11}$$

где

$$\delta=\Delta_1:(M_0-M_1)\,M_1. \tag{12}$$

Аналогично, для второго промежутка получается

$$\Delta=\delta_2\,(180^\circ-M)\,(M-M_0), \tag{13}$$

где

$$\delta_2=\Delta_2:(180^\circ-M_2)\,(M_2-M_0). \tag{14}$$

Более точная интерполяционная формула дает тригонометрический полином $\Delta=a\sin M+b\cos M+c$. Принимая во внимание, что $\Delta=0$ при $M=0$ и $M=180^\circ$ и достигает минимума Δ_1, при $M=M_1$ получаем:

$$\Delta=\delta_1\sin\,(M_0-M)\sin M, \tag{11^1}$$

$$\delta_1=\Delta_1:\sin\,(M_0-M_1)\sin M_1. \tag{12^1}$$

Аналогично, для второго промежутка:

$$\Delta=\delta_2\sin\,(M-M_0)\sin M, \tag{13^1}$$

$$\delta_2=\Delta_2:\sin\,(M_2-M_0)\sin M_2. \tag{14^1}$$

Поправка $\Delta=M-u$ симметрична относительно линий апсид. Поэтому, когда $M>180^\circ$, нужно искать поправку для угла $M'=360^\circ-M$ и соответствующее u' вычитаем из 360°, т. е. $u=360^\circ-u'$.

Для данной e, величины M_1, M_2, M_0, Δ_1, Δ_2, можно приближенно определить (один раз) из табл. 1 посредством линейной интерполяции, вычисляются поправки Δ (не а по формулам (11), (13) или (11^1), (13^1) применяя табл. 5).

После определения u можно вычислить v и E по формуле (1), но это не обязательно. Для определения экваториальных гелиоцентрических координат принимается формула:

$$x = aP_x(\cos E - e) + a\cos\varphi Q_x \sin E \tag{15}$$

и аналогично для y и z (рис. 1).

Из чертежа видно, что $a\cos E - ae = F_1N$ и $r'\cos u - 2ae = F_1N$, т. е.

$$a(\cos E - e) = r'\cos u - 2ae = \frac{p\cos u}{1 - e\cos u} - 2ae.$$

Ясно также, что

$$a\cos\varphi\sin E = PN = r'\sin u = \frac{p\sin u}{1 - e\cos u}.$$

Подставляя это в формулу (15), получим:

$$x = \frac{pP_x\cos u + pQ_x\sin u}{1 - e\cos u} - 2aeP_x, \tag{16}$$

или

$$x = \frac{a_x\cos u + b_x\sin u}{1 - e\cos u} + c_x, \tag{16^1}$$

где

$$a_x = pP_x, \quad b_x = pQ_x, \quad c_x = -2aeP_x$$

и аналогично для y и z.

Формулы (16) и (16¹) сложнее, чем формула (15), но если вычисление ведется не с большой точностью, табличное значение u или вычисленное посредством формул (11′), (13′) и (8) будет достаточным и решения уравнения Кеплера не понадобится. Для больших планет, эксцентриситет которых мал, определение координат этим способом будет достаточно точно для вычисления возмущений.

Известные выражения векторных элементов можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} &p_x = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i, \quad P_y = A\cos\varepsilon - B\sin\varepsilon, \quad P_z = A\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon,\\ &Q_x = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i, \quad Q_y = C\cos\varepsilon - D\sin\varepsilon, \quad Q_z = C\sin\varepsilon + D\cos\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &A = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i, && B = \sin\omega\sin i,\\ &C = -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i, && D = \cos\omega\sin i \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Введем еще обозначения:

$$E = \sin\Omega\sin i, \quad F = \cos\Omega\sin i\cos\varepsilon + \cos i\sin\varepsilon, \quad G = \cos\Omega\sin i\sin\varepsilon - \cos i\cos\varepsilon. \tag{19}$$

Тогда изменение векторных элементов выразится формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta p_x = Q_x\Delta\omega - A\Delta Q + E\sin\omega\Delta i, \quad \Delta p_y = Q_y\Delta\omega + p_x\cos\varepsilon\Delta\Omega - F\sin\omega\Delta i - P_z\Delta\varepsilon\\ &\qquad \Delta P_z = Q_z\Delta\omega + P_x\sin\varepsilon\Delta\Omega - G\sin\omega\Delta + P_y\Delta\varepsilon,\\ &\Delta Q_x = -P_x\Delta\omega - B\Delta\Omega + E\cos\omega\Delta i, \quad \Delta Q_y = -P_y\Delta\omega + Q_x\cos\varepsilon\Delta\Omega - F\cos\omega\Delta i -\\ &\qquad -Q_z\Delta\varepsilon, \quad \Delta Q_z = -P_z\Delta\omega + Q_x\sin\varepsilon\Delta\Omega - G\cos\omega\Delta i + Q_x\Delta\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где третьим и четвертым членами обычно можно пренебрегать из-за малости Δi и $\Delta\varepsilon$.

Для контроля вычислений, помимо известных формул, можно воспользоваться равенствами:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - E^2 = 1, \quad E^2 + F^2 + G^2 = 1. \tag{21}$$

Вычисляя векторные элементы $P_x, P_y, \ldots, Q_z$ для какой-нибудь эпохи, для другого момента времени достаточно вычислять приращения по формулам (20) и прибавлять их к начальным значениям, т. е. $P_x = P_{x0} + \Delta P_x$ и т. д., при этом $P_{x0}, P_{y0}, \ldots, Q_{z0}$ и $A_{01}, B_0, \ldots, G_0$ можно считать постоянными, вследствие малости $\Delta\omega$, $\Delta\Omega$, Δi и $\Delta\varepsilon$. Для эпохи 30.VI.1961 по отношению к эклиптике 1950.0 получаются значения, помещенные в таблице 2.

Таблица 2

Планета	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z	c_x	c_y	c_z
Меркурий	0·0862	0·3215	0·1633	−0·3590	0·0607	0·0694	−0·0365	−0·1361	−0·0692
Венера	−0·4732	0·4876	0·2495	−0·5462	0·4442	−0·1654	+0·0064	−0·0066	−0·0034
Земля	−0·2100	0·8971	0·3890	−0·9777	−0·1927	−0·0836	+0·0070	+0·0300	−0·0130
Марс	1·3699	−0·5627	−0·2951	0·6343	1·2531	0·5551	−0·2580	+0·1060	−0·0556
Юпитер	5·0556	1·1246	0·3589	−1·1747	4·6369	2·0178	−0·49,9	−0·1094	−0·0349
Сатурн	0·0084	8·8304	3·6507	7·9138	0·9460	0·5624	−0·0008	−0·9102	−0·3763

Для больших планет эксцентриситет небольшой и в некоторых случаях можно пренебречь поправкой Δ, т. е. принять u = M. При этом допущении вычислено несколько значений координат по формуле (16). Они сравниваются с таблицами Комри в смысле «Вычисленное» минус «Табличное»: $x_B - x_T$ (табл. 3), в третьем знаке после запятой.

Из таблицы видно, что разница между вычисленными (посредством величин табл. 2) и табличными значениями координат обычно не превосходит нескольких единиц третьего знака после запятой. Исключение

Таблица 3

Планеты	J. D. 2437480 (30/VI. 1961)			J. D. 2437640 (7/XII, 1961)			J. D. 2441080 (8/V, 1971)		
	$x_b - x_m$	$j_b - j_m$	$z_b - z_m$	$x_b - x_m$	$j_b - j_m$	$z_b - z_m$	$x_b - x_m$	$j_b - j_m$	$z_b - z_m$
Меркурий	−14	−02	00	−07	+06	+05	−12	+02	+03
Венера	−01	+01	−01	+02	+05	+01	−02	−02	−01
Земля	00	−01	00	−01	00	00	00	00	00
Марс	+01	+02	+03	+02	−02	+01	+03	00	+03
Юпитер	+03	+04	+01	+01	−03	−02	−15	−05	+04
Сатурн	−02	−02	+01	+11	−10	+01	−28	+83	+35

представляют, с одной стороны, Меркурий, с другой — для больших промежутков времени, Юпитер и Сатурн. Первая разница не будет отражаться на вычисления возмущения, а для избежания второй ошибки можно исправлять векторные элементы Юпитера и Сатурна (влияние

Сатурна будет мало) через три или пять лет по формуле (20). Для этого можно, помимо табл. 2, пользоваться величинами табл. 4.

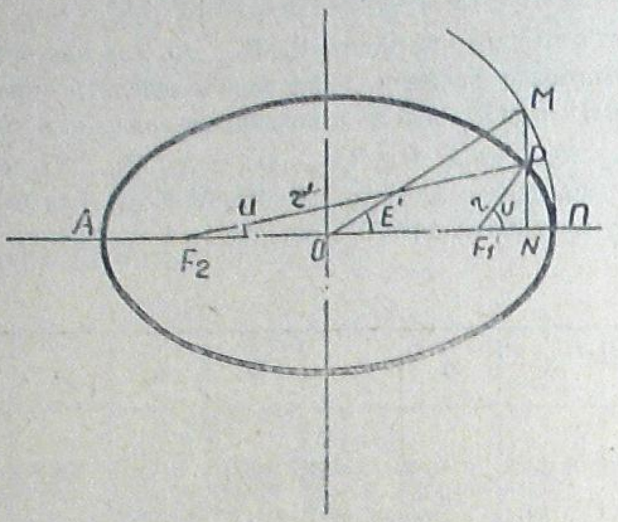

Рис. 1

Таблица 4

Планеты	A	B	C	Д	E	F	G
Юпитер	0.2262	−0.0228	0.9741	0.012	0.0225	0.3941	−0.9188
Сатурн	0.9999	−0.0171	0.0015	0.0399	0.0399	0.8818	−0.9234

Таблица 5

$(M-u) \cdot 10^6$

u \ l	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
3°	−65	−262	−591	−1055	−1658	−2403	−3299	−4352	−5572	−6974
6°	−130	−520	−1173	−2092	−3284	−4757	−6520	−8588	−10975	−13701
9	−193	−772	−1738	−3095	−4850	−7011	−9589	−12595	−16044	−19948
12	−254	−1013	−2277	−4047	−6327	−9121	−12434	−16270	−20628	−25498
15	−311	−1240	−2782	−4932	−7687	−11043	−14991	−19517	−24593	−30166
18	−365	−1451	−3246	−5730	−8907	−12739	−17203	−22259	−27827	−33803
21	−414	−1643	−3662	−6446	−9964	−14175	−19022	−24420	−30243	−36295
24	−459	−1812	−4024	−7051	−10842	−15326	−20411	−25961	−31781	−37575
27	−498	−1958	−4328	−7542	−11524	−16171	−21342	−26846	−32405	−37612
30	−531	−2078	−4568	−7912	−12002	−16694	−21801	−27060	−32108	−36415
33	−557	−2170	−4742	−8156	−12267	−16890	−21780	−26605	−30905	−34030
36	−577	−2234	−4848	−8270	−12317	−16757	−21285	−25496	−28834	−30527
39	−590	−2269	−4884	−8264	−12153	−16300	−20330	−23763	−25950	−26005
42	−596	−2274	−4851	−8108	−11778	−15530	−18938	−21448	−22325	−20579
45	−595	−2250	−4748	−7835	−11201	−14463	−17137	−18601	−18042	−14374
48	−586	−2196	−4579	−7442	−10432	−13119	−14964	−15282	−13190	−7527
51	−571	−2114	−4344	−6932	−9484	−11523	−12458	−11553	−7865	−173
54	−549	−2004	−4049	−6316	−8373	−9701	−9665	−7483	−2164	+7552
57	−521	−1870	−3697	−5602	−7116	−7683	−6631	−3139	+3814	+15518
60	−486	−1710	−3293	−4800	−5732	−5500	−3403	+1408	9975	23599
63	−445	−1529	−2842	−3921	−4240	−3184	−29	6092	16230	31681

Продолжение таблицы 5

u \ l	0·05	0·10	0·15	0·20	0·25	0·30	0·35	0·40	0·45	0·50
66	−400	−1328	−2350	−2978	−2662	−768	+3443	10846	22491	39658
69	−349	−1110	−1824	−1983	−1019	+1716	6967	15609	28682	47437
72	−295	−877	−1269	−948	+669	4236	10498	20323	34729	54933
75	−236	−632	−694	+115	2381	6761	13955	24934	4068	62073
78	−175	−379	−104	1191	4096	9263	17419	29393	46143	68794
81	−112	−119	+494	2270	5670	11713	20733	33657	51403	75044
84	−48	+144	1092	3338	7461	14087	23905	37686	56306	80782
87	+18	408	1685	4385	9074	16360	26906	41447	60815	85971
90	83	669	2267	5399	10619	18511	29709	44911	64902	90586
93	148	924	2828	6370	12081	20521	32292	48053	68544	94608
96	212	1171	3376	7288	13446	22372	34636	50855	71722	98025
99	273	1408	3875	8146	14705	24053	36725	53300	74424	100830
102	332	1631	4349	8935	15844	25548	38546	55378	76642	103021
105	387	1839	4784	9648	16856	26848	40089	57079	78372	104601
108	438	2029	5177	10279	17732	27945	41347	58400	79615	105578
111	485	2200	5523	10823	18468	28834	42315	59338	80364	105961
114	527	2350	5820	11276	19058	29509	42992	59896	80655	105764
117	534	2478	6064	11636	19499	29970	43377	60078	80468	105003
120	594	2582	6256	11898	19790	30215	43473	59888	79823	103696
123	619	2661	6391	12063	19929	30246	43282	59336	78735	101863
126	638	2716	6471	12130	19918	30065	42814	58432	77219	99525
129	650	2744	6494	12097	19758	29676	42072	57186	75291	96705
132	655	2748	6461	11970	19451	29086	41068	55613	72969	93426
135	654	2725	6372	11747	19002	28299	39809	53726	70273	89713
138	646	2677	6229	11430	18416	27324	38309	51542	67223	85593
141	632	2605	6032	11025	17697	26170	36578	49075	63840	81089
144	611	2608	5784	10534	16852	24846	34631	46344	60145	72229
147	584	2388	5488	9961	15889	23362	32481	43367	56162	71039
150	552	2247	5146	9312	14815	21728	30143	40162	51912	65546
153	513	2084	4761	8593	13637	19958	27630	36749	47419	59778
156	470	1903	4336	7808	12366	18063	24964	33147	42706	53762
159	422	1705	3875	6964	11010	16055	22155	29376	37798	47525
162	370	1491	3383	6069	9579	13949	19223	25456	32718	41095
165	314	1264	2862	5128	8083	11756	16183	21410	27411	34500
168	255	1025	2318	4149	6532	9492	13055	17256	22141	27765
171	194	777	1756	3139	4938	7170	9854	13017	16692	20924
174	130	522	1178	2105	3310	8404	6600	8714	11169	13995
177	65	262	592	1057	1661	2409	3309	4368	5597	7010

Вычислительный центр АН Грузинской ССР

Сентябрь, 1964.

ფსევდოანომალია და მისი გამოყენება ეფემერიდების გამოსათვლელად

მ. იმნაძე

THE PSEUDOANOMALY AND ITS APPLICATION TO THE CALCULATIONS OF EPHEMERIS

M. P. IMNADZE

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Субботин М. Ф. О новой аномалии, по отношению к которой употребляемые в небесной механике аномалии являются частными случаями. Вестн. Ленингр. гос. унив. 1937.

2. Stumpff K. Ueber eine Eigenschaft des zweiten Brennpunkt. Abhandl. d. Akad. d. Wissensch. 1943.
3. Имнадзе М. П. Интегралы задачи двух тел в сферических координатах и применение их для определения орбит. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1958, 22.