О ДВИЖЕНИИ КОСМИЧЕСКОГО ТЕЛА С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ МНОГИХ ТЕЛ

Н. Г. МАГНАРАДЗЕ

Введение. В настоящей работе мы исследуем движение космического тела M_1, имеющего переменную массу m_1, в гравитационном поле N тел M_i $(i=0, 2, 3, \ldots, N)$, имеющих соответственно постоянные массы m_i $(i=0, 2, 3, \ldots, N)$.

Массу $m_1=m_1(t)$ будем считать заданной функцией от времени t; принимающей настолько малые значения, что тела M_i $(i=0, 2, 3, \ldots, N)$ не подвергаются притяжению тела M_1.

В основу нашего исследования мы положим определенную систему дифференциальных уравнений (с переменными коэффициентами) движения тел M_i $(i=0, 1, 2, \ldots, N)$ относительно некоторой абсолютной системы координат $\Omega\xi\eta\zeta$.

Частными случаями этой системы являются системы дифференциальных уравнений движения космического тела под действием реактивных сил Мещерского-Циолковского, под давлением солнечных лучей, под действием реактивных двигателей ограниченной мощности.

Введем относительную систему координат $Oxyz$, начало которой помещаем в точке M_0.

Считая коэффициенты основной системы дифференциальных уравнений аналитическими функциями (определенного класса), для относительных координат тела M_1 мы строим степенные ряды по времени и доказываем их сходимость для достаточно малого промежутка времени и при произвольных конечных начальных значениях координат и компонент скорости тела M_1.

Для определения коэффициентов разложений неизвестных величин мы строим рекуррентные соотношения, достаточно удобные для их вычисления современными вычислительными машинами.

При выводе упомянутых соотношений мы пользуемся одной схемой, являющейся обобщением схемы, недавно предложенной Стеффенсеном [19] для решения ограниченной задачи трех тел с постоянными массами и нашедшей дальнейшее развитие и применения к нашим работам о движении тел с переменными массами в гравитационном поле [12—16].

Далее, мы устанавливаем оценки погрешностей, которые получаются, когда ограничиваемся несколькими первыми членами вышеупомянутых степенных рядов.

Наконец, мы исследуем задачу об определении приближенного оптимального расстояния между космическим телом M_1 и любым из тел M_i $(i=0,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N)$.

Полученные в настоящей работе результаты можно, в частности, применить в задачах попадания космического тела на Луну или на Венеру, или, прохождения вблизи них в гравитационном поле Земли, Луны, Солнца, Венеры, Марса и Юпитера.

I. Основная система дифференциальных уравнений

1.1. Упомянутая во введении основная система дифференциальных уравнений движения относительно некоторой абсолютной системы координат $\Omega\xi\eta\zeta$ в векторной форме имеет вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec\rho_i=\lambda_i(t)\frac{d}{dt}\vec\rho_i+\vec\mu_i(t)+{\sum_{j=0}^{N}}''\frac{\vec\nu_{ij}(t)}{\rho^2_{ij}}+{\sum_{j=0}^{N}}''k^2_0 m_j\frac{\vec\rho_{ij}}{\rho^3_{ij}}, \qquad (I_0)$$

$i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$

где $\vec\rho_i$—радиус-вектор точки $(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$, $\vec\rho_{ij}=\vec\rho_j-\vec\rho_i$,

$$\rho_{ij}=|\vec\rho_{ij}|=[(\xi_i-\xi_j)^2+(\eta_i-\eta_j)^2+(\zeta_i-\zeta_j)^2]^{\frac{1}{2}},$$

k^2_0 — универсальная постоянная гравитации, $\lambda_i(t)$, $\vec\mu_i(t)$, $\vec\nu_{ij}(t)$ — заданные аналитические функции (определенного класса) от времени t, а символ ${\sum\limits_{j=0}^{N}}''$ означает знак суммирования, в котором пропущены члены, соответствующие индексам $j=1$ и $j=i$.

1.2. Отметим следующие частные случаи системы (I_0).

1°. Пусть $\vec\mu_i(t)\equiv 0$, $\vec\nu_{ij}(t)\equiv 0$, $i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N$

$$\lambda_i(t)=\begin{cases}\lambda(t), & i=1\\ 0, & i=0,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N\end{cases}$$

$$\lambda(t)=\frac{1}{m(t)}\left[\alpha_1(t)\frac{d}{dt}\mu^-+\alpha_2(t)\frac{d}{dt}\mu^+\right],$$

$$m(t)=\mu_0-\mu^-(t)+\mu^+(t),$$

где μ_0—масса тела M_1 в начальный момент $t=0$, $\mu^-(t)$ и $\mu^+(t)$ суть массы частиц, соответственно, отделяющихся и присоединявшихся к телу M_1 за промежуток времени t от момента $t=0$; $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$—заданные функции от времени, входящие в условия К. Э. Циолковского *

$$\vec u_1-\vec v=\alpha_1(t)\,\vec v,\qquad \vec u_2-\vec v=\alpha_2(t)\,\vec v,$$

$\vec v=\frac{d}{dt}\vec\rho_1$, а $\vec u_1-\vec v$ и $\vec u_2-\vec v$ суть относительные скорости, соответственно, отделяющихся и присоединившихся частиц. В этом частном случае, очевидно, (I_0) является системой дифференциальных уравнений И. В. Мещерского [17] для определения движения тела переменной массы в гравитационном поле многих тел.

* Так называем мы условия, выражающие известную гипотезу К. Э. Циолковского [10] о коллинеарности векторов $\vec u_1-\vec v$ и $\vec u_2-\vec v$ вектору $\vec v$.

2°. Пусть $\lambda_i(t)\equiv 0$, $\vec\mu_i(t)\equiv 0$, $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N$

$$\vec\nu_{ij}(t)=\begin{cases}\vec\nu(t), & i=1, & j=0\\ 0, & i=1, & j\neq 0\\ 0, & i\neq 1, & 0\leqslant j\leqslant N.\end{cases}$$

Тогда, как известно [4], (I_0) является системой дифференциальных уравнений движения космического аппарата с солнечным парусом в гравитационном поле многих тел, причем от Солнца M_0 парусу M_1 сообщается ускорение $\frac{\vec\nu(t)}{\rho^2_{10}}$, вызванное давлением солнечных лучей, а

$$\vec\nu(t)=\frac{g p_0 R^2_0 S}{2G}\sqrt{1+2\varepsilon\cos 2(\widehat{\vec n,\vec e})+\varepsilon^2\,(\vec n,\vec e)\,\vec n},$$

где g — ускорение силы тяжести, $P_0=0{,}928\cdot 10^{-4}$ дин/см² (постоянная солнечного давления на идеально отражавшую поверхность), $R_0=0{,}1495\cdot 10^{14}$ см (среднее расстояние между Солнцем и Землей), S—величина площади плоского паруса, G—вес космического аппарата с солнечным парусом, ε—коэффициент отражения поверхности паруса, $\vec n$ — единичный вектор нормали к теневой стороне паруса, $\vec e$ — единичный вектор направления от паруса к Солнцу, $\widehat{\vec n\,\vec e}$ — угол между $\vec n$ и $\vec e$, $(\vec n,\ \vec e)$—скалярное произведение $\vec n$ и $\vec e$.

3°. Пусть $\lambda_i(t)\equiv 0$, $\vec\nu_{ij}(t)\equiv 0$, $i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$

$$\vec\mu_i(t)=\begin{cases}\vec\mu(t), & i=1\\ 0, & i\neq 1\end{cases}$$

тогда, как известно [4], (I_0) является системой дифференциальных уравнений движения космического аппарата с реактивным двигателем ограниченной мощности в гравитационном поле многих тел, а

$$\vec\mu(t)=\frac{Pg}{G}\,\vec\tau,$$

где G — полный вес аппарата, P — величина силы тяги, а $\vec\tau$—единичный вектор, определяющий закон ориентации вектора тяги.

1.3. Теперь введем относительную систему координат O_{xyz}, начало которой O поместим в точке M_0.

Тогда основная система дифференциальных уравнений (I_0) в этой системе координат примет вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec r_{0i}=[\lambda_i(t)-\lambda_0(t)]\frac{d}{dt}\vec\rho_0+\vec\mu_i(t)-\vec\mu_0(t)+\lambda_i(t)\frac{d}{dt}\vec r_{0i}+$$

$$+\frac{\vec{\nu}_{i0}(t)-\vec{\nu}_{0i}(t)}{r^3_{0i}}-k^2_0(m_0+m_i)\frac{\vec{r}_{0i}}{r^3_{0i}}+\sum_{j=2}^{N}{}'\left[\frac{\vec{\nu}_{ij}(t)}{r^3_{ij}}-\frac{\vec{\nu}_{0j}(t)}{r^3_{0j}}+\right.$$

$$\left.+k^2_0 m_j\left(\frac{\vec{r}_{ij}}{r^3_{ij}}-\frac{\vec{r}_{0j}}{r^3_{0j}}\right)\right], \tag{1}$$

$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N,$

где $\vec{r}_{0i}$ — радиус-вектор точки $(x_i,\ y,\ z_i)$ $(\vec{r}_{0i}=\vec{\rho}_i-\vec{\rho}_0)$,

$$\vec{r}_{ij}=\vec{r}_{0j}-\vec{r}_{0i},\quad r_{0i}=|\vec{r}_{0i}|,\quad r_{ij}=|\vec{r}_{ij}|,$$

а символ $\sum\limits_{j=2}^{N}{}'$ означает знак суммирования, в котором пропущен член, соответствующий индексу $j=i$.

2. Вспомогательная система дифференциальных и конечных уравнений

2.1. Введя вспомогательные неизвестные величины

$$s_{ij}=\frac{1}{r^3_{ij}},\quad u_{ij}=\frac{1}{r^3_{ij}},\quad i\neq j \tag{2}$$

и пользуясь (1), легко получить следующую систему дифференциальных и конечных уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{0i}=[\lambda_i(t)-\lambda_0(t)]\frac{d}{dt}\vec{\rho}_0+\vec{\mu}_i(t)-\vec{\mu}_0(t)+\lambda_i(t)\frac{d}{dt}\vec{r}_{0i}+$$

$$+s_{0i}[\vec{\nu}_{i0}(t)-\vec{\nu}_{0i}(t)]-k^2_0(m_0+m_i)\,u_{0i}\vec{r}_{0i}+$$

$$+\sum_{j=2}^{N}{}'[s_{ij}\vec{\nu}_{ij}(t)-s_{0j}\vec{\nu}_{0j}(t)+k^2_0 m_j(u_{ij}\vec{r}_{ij}-u_{0j}\vec{r}_{0j})], \tag{3}$$

$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$,

$$r_{ij}\frac{d}{dt}s_{ij}+2\,s_{ij}\frac{d}{dt}r_{ij}=0, \tag{4}$$

$$r_{ij}\frac{d}{dt}u_{ij}+3u_{ij}\frac{d}{dt}r_{ij}=0, \tag{5}$$

$$r_{ij}=|\vec{r}_{0j}-\vec{r}_{0i}|, \tag{6}$$

$(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\quad i<j)$.

Неизвестными в системе уравнений (3) — (6) являются величины:

$$\vec{r}_{0i},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$$

$$r_{ij},\ s_{ij},\ u_{ij},\quad i<j\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

число которых равно $N+\frac{1}{2}N(N+1)+\frac{1}{2}N(N+1)+\frac{1}{2}N(N+1)=$ $=\frac{1}{2}N(3N+5)$.

2.2. В начальный момент $t=0$ имеем:

$$\vec{r}_{0i}(0)=\vec{r}^{(0)}_{0i},\quad \frac{d}{dt}\vec{r}_{0i}(0)=\vec{r}^{(0)}_{0i},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{7}$$

Теперь, пользуясь (2) и (6), очевидно, получим:

$$r_{ij}(0)=r^{(0)}_{ij}=|\vec{r}^{(0)}_{0j}-\vec{r}^{(0)}_{0i}|>0,\quad i\neq j \tag{8}$$

$$s_{ij}(0)=s^{(0)}_{ij}=\frac{1}{|\vec{r}^{(0)}_{0j}-\vec{r}^{(0)}_{0i}|^2}>0,\quad u_{ij}(0)=u^{(0)}_{ij}=\frac{1}{|\vec{r}^{(0)}_{0j}-\vec{r}^{(0)}_{0i}|^3}>0,$$

$i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\quad i<j.$

Требуется определить величины $\vec{r}_{0i},\ r_{ij},\ s_{ij},\ u_{ij}$ так, чтобы удовлетворялись дифференциальные уравнения (3) — (5), конечные уравнения (6) и начальные условия (7) и (8).

3. Основные рекуррентные равенства

3.1. Пусть

$$\lambda_i(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_i^{(n)}t^n, \tag{9}$$

$$\vec{\mu}_i(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{\mu}_i^{(n)}t^n, \tag{10}$$

$$\vec{\nu}_i(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{\nu}^{(n)}_{ij}t^n, \tag{11}$$

$$\vec{\rho}_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{\rho}_0^{(n)}t^n, \tag{12}$$

при этом

$$|\lambda_i^{(n)}|\leqslant\Lambda_i\frac{H_0^n}{n^\alpha},\quad n\geqslant1 \tag{13}$$

$$|\vec{\mu}_i^{(n)}|\leqslant M_i\frac{H_0^n}{n^\alpha},\quad n\geqslant1 \tag{14}$$

$$|\vec{\nu}^{(n)}_{ij}|<N_{ij}\frac{H^n_0}{n^\alpha},\quad n\geqslant1 \tag{15}$$

$$|\vec{\rho}_0^{(n)}|<R_0\frac{H^n_0}{n^\alpha},\quad n\geqslant1 \tag{16}$$

где $\alpha>1$, H_0, Λ_i, M_i, N_{ij}, R_0 — заданные положительные постоянные.

Очевидно, что ряды (9)—(12) сходятся абсолютно и равномерно при $0\leqslant t\leqslant H_0^{-1}$, ибо при $\alpha>1$ имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n H^n_0}{n^\alpha}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<+\infty.$$

Далее положим:

$$\vec{r}_{0i}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{r}_{0i}^{(n)} t^n, \tag{17}$$

$(i=1, 2, \ldots, N)$

$$r_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{ij}^{(n)} t^n, \tag{18}$$

$$s_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{ij}^{(n)} t^n, \tag{19}$$

$$u_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{ij}^{(n)} t^n, \tag{20}$$

$(i=0, 1, 2, \ldots, N; \quad j=1, 2, \ldots, N; \quad i<j)$.

Ниже мы докажем, что ряды (17)—(20) сходятся абсолютно и равномерно на некотором определенном сегменте $0 \leqslant t \leqslant H^{-1}$, $H \geqslant H_0$.

3.2. Сперва найдем рекуррентные соотношения между коэффициентами $\vec{r}_{0i}^{(n)}$, $r_{ij}^{(n)}$, $s_{ij}^{(n)}$ и $u_{ij}^{(n)}$ рядов (17)—(20). С этой целью предположим сходимость рядов (17)—(20), а также рядов, получаемых из них дифференцированием и подставим их в систему уравнений (3)—(6).

Тогда получим следующие рекуррентные соотношения между упомянутыми коэффициентами:

$$(n+1)(n+2)\vec{r}_{0i}^{(n+2)} = \vec{\mu}_i^{(n)} - \vec{\mu}_0^{(n)} + \sum_{k=0}^{n} \Big\{ (k+1)(\lambda_i^{(n-k)} - \lambda_0^{(n-k)})\vec{\rho}_0^{(k+1)} +$$
$$+ s_{0i}^{(n-k)}(\vec{\nu}_{i0}^{(k)} - \vec{\nu}_{0i}^{(k)}) + (k+1)\lambda_i^{(n-k)}\vec{r}_{0i}^{(k+1)} - k_0^2(m_0+m_i)u_{0i}^{(n-k)}\vec{r}_{0i}^{(k)} +$$
$$+ \sum_{j=2}^{N}{}' \left[s_{ij}^{(n-k)}\vec{\nu}_{ij}^{(k)} - s_{0j}^{(n-k)}\vec{\nu}_{0j}^{(k)} + k_0^2 m_j (u_{ij}^{(n-k)}\vec{r}_{ij}^{(k)} - u_{0j}^{(n-k)}\vec{r}_{0j}^{(k)}) \right] \Big\}, \tag{21}$$

$i=1, 2, \ldots, N; \quad n=0, 1, 2, \ldots$

$$(n+1) r_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(n+1)} = -2(n+1) s_{ij}^{(0)} r_{ij}^{(n+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\left[r_{ij}^{(n-k)} s_{ij}^{(k+1)} + 2 r_{ij}^{(k+1)} s_{ij}^{(n-k)} \right], \tag{22}$$

$$(n+1) r_{ij}^{(0)} u_{ij}^{(n+1)} = -3(n+1) u_{ij}^{(0)} r_{ij}^{(n+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\left[r_{ij}^{(n-k)} u_{ij}^{(k+1)} + 3 r_{ij}^{(k+1)} u_{ij}^{(n-k)} \right], \tag{23}$$

$i=0, 1, 2, \ldots, N; \quad j=1, 2, \ldots, N; \quad i<j; \quad n=0, 1, 2, \ldots$

$$2 r_{ij}^{(0)} r_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (\vec{r}_{0j}^{(k)} - \vec{r}_{0i}^{(k)}, \vec{r}_{0j}^{(n-k)} - \vec{r}_{0i}^{(n-k)}) - \sum_{k=1}^{n-1} r_{ij}^{(k)} r_{ij}^{(n-k)}, \tag{24}$$

$i=0, 1, 2, \ldots, N; \quad j=1, 2, \ldots, N; \quad i<j; \quad n=1, 2, \ldots,$

где символ $(\vec{u}, \vec{v})$, как обычно, обозначает скалярное произведение векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

3.3. Исходя из заданных векторов $\vec{r}_{0i}^{(0)}$, $\vec{r}_{0i}^{(1)}$ и чисел $r_{ij}^{(0)}$, $s_{ij}^{(0)}$ и $u_{ij}^{(0)}$, определенных по начальным условиям (7) и (8), можно из (21)—(24) последовательно найти все векторы $\vec{r}_{0i}^{(n)}$ $(n \geqslant 2)$ и все числа $r_{ij}^{(n)}$, $s_{ij}^{(n)}$, $u_{ij}^{(n)}$ $(n \geqslant 1)$.

Например, имеем:

$$\vec{r}_{0i}^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_i^{(0)} - \lambda_0^{(0)})\vec{\rho}_0^{(1)} + \frac{1}{2}(\vec{\mu}_i^{(0)} - \vec{\mu}_0^{(0)}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\lambda_i^{(0)}\vec{r}_{0i}^{(1)} - \frac{1}{2}k_0^2(m_0+m_i)\frac{\vec{r}_{0i}^{(0)}}{|\vec{r}_{0i}^{(0)}|^3} +$$
$$+ \frac{(\vec{\nu}_{i0}^{(0)} - \vec{\nu}_{0i}^{(0)})}{2|\vec{r}_{0i}^{(0)}|^4} + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{N}{}' \left\{ \left[\frac{\vec{\nu}_{ij}^{(0)}}{|\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{0i}^{(0)}|^2} - \frac{\vec{\nu}_{0j}^{(0)}}{|\vec{r}_{0j}^{(0)}|^2} \right] + \right.$$
$$\left. + k_0^2 m_j \left[\frac{\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{0i}^{(0)}}{|\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{0i}^{(0)}|^3} - \frac{\vec{r}_{0j}^{(0)}}{|\vec{r}_{0j}^{(0)}|^3} \right] \right\}, \tag{25}$$

$t=1, 2, \ldots, N,$

$$\vec{r}_{0i}^{(3)} = \frac{1}{3}(\lambda_i^{(0)} - \lambda_0^{(0)})\vec{\rho}_0^{(2)} +$$
$$+ \frac{1}{6}\left[(\lambda_i^{(1)} - \lambda_0^{(1)}) + \lambda_i^{(0)}(\lambda_i^{(0)} - \lambda_0^{(0)}) \right]\vec{\rho}_0^{(1)} +$$
$$+ \frac{1}{6}(\vec{\mu}_i^{(1)} - \vec{\mu}_0^{(1)}) + \frac{1}{6}\lambda_i^{(0)}(\vec{\mu}_i^{(0)} - \vec{\mu}_0^{(0)}) +$$
$$+ \frac{1}{6}(\lambda_i^{(0)2} + \lambda_i^{(1)})\vec{r}_{0i}^{(1)} + \frac{(\vec{\nu}_{i0}^{(0)} - \vec{\nu}_{0i}^{(0)})}{6|\vec{r}_{0i}^{(0)}|^2} -$$
$$- k_0^2(m_0+m_i)\frac{(\lambda_i^{(0)}\vec{r}_{0i}^{(0)} + \vec{r}_{0i}^{(1)})}{6|\vec{r}_{0i}^{(0)}|^3} +$$
$$+ \frac{[\lambda_i^{(0)}(\vec{\nu}_{i0}^{(0)} - \vec{\nu}_{0i}^{(0)}) - 2(\vec{r}_{0i}^{(0)}, \vec{r}_{0i}^{(1)})(\vec{\nu}_{i0}^{(1)} - \vec{\nu}_{0i}^{(1)})]}{6|\vec{r}_{0i}^{(0)}|^4} + k_0^2(m_0+m_i)\frac{\vec{r}_{0i}^{(0)}(\vec{r}_{0i}^{(0)}, \vec{r}_{0i}^{(1)})}{2|\vec{r}_{0i}^{(0)}|^5} +$$
$$+ \frac{1}{6}\sum_{j=2}^{N}{}' \left\{ \left[\frac{(\lambda_i^{(0)}\vec{\nu}_{ij}^{(0)} + \vec{\nu}_{ij}^{(1)})}{|\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{0i}^{(0)}|^2} - \frac{(\lambda_i^{(0)}\vec{\nu}_{0j}^{(0)} + \vec{\nu}_{0j}^{(1)})}{|\vec{r}_{0j}^{(0)}|^2} \right] + \right.$$
$$+ k_0^2 m_j \left[\frac{\lambda_i^{(0)}(\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{0i}^{(0)}) + \vec{r}_{0j}^{(1)} - \vec{r}_{0i}^{(1)}}{|\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{0i}^{(0)}|^3} - \frac{(\lambda_i^{(0)}\vec{r}_{0j}^{(0)} + \vec{r}_{0j}^{(1)})}{|\vec{r}_{0j}^{(0)}|^3} \right] -$$

$$-2\left[\frac{(\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(1)}-\vec r_{0j}^{(1)})\,\vec v_{ij}^{(0)}}{|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^4}-\frac{(\vec r_{0j}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(1)})\,\vec \nu_{0j}^{(0)}}{|\vec r_{0j}^{(0)}|^4}\right]-$$

$$-3k_0^2m_j\left[\frac{(\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(1)}-\vec r_{0i}^{(1)})\,(\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^5}-\frac{(\vec r_{0j}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(1)})\,\vec r_{0j}^{(0)}}{|\vec r_{0j}^{(0)}|^5}\right]\Bigg\}, \tag{26}$$

$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$;

$$r_{ij}^{(1)}=\frac{(\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(1)}-\vec r_{0i}^{(1)})}{|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|} \tag{27}$$

$$r_{ij}^{(2)}=\frac{1}{2}(\lambda_j^{(0)}-\lambda_i^{(0)})\,(\vec\rho_0^{(1)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0j}^{(0)})+$$

$$+\frac{1}{2}(\lambda_j^{(0)}\vec r_{0j}^{(1)}-\lambda_i^{(0)}\vec r_{0i}^{(1)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})+$$

$$+\frac{1}{2|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|}\left[(\vec\mu_j^{(0)}-\vec\mu_i^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})+|\vec r_{0j}^{(1)}-\vec r_{0i}^{(1)}|^2+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{(\vec\nu_{0j}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0j}^{(0)}|^2}-\frac{(\vec\nu_{i0}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0i}^{(0)}|^2}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}k_0^2(m_0+m_i)\left[\frac{(\vec r_{0j}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0j}^{(0)}|^3}-\frac{(\vec r_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0i}^{(0)}|^3}\right]-$$

$$-\frac{(\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(1)}-\vec r_{0i}^{(1)})^2}{2|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^3}+\frac{1}{2}\left[\frac{(\vec\nu_{j0}^{(0)}-\vec\nu_{0j}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0j}^{(0)}|^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\vec\nu_{i0}^{(0)}-\vec\nu_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0i}^{(0)}|^4}\right]+\frac{1}{2|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|}\sideset{}{''}\sum_{\substack{k=2\\k\neq i,\,j}}^{N}\left\{\left[\frac{(\vec\nu_{jk}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0k}^{(0)}-\vec r_{0j}^{(0)}|^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(\vec\nu_{ik}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0k}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^2}\right]+k_0^2m_k\left[\frac{(\vec r_{0k}^{(0)}-\vec r_{0j}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0k}^{(0)}-\vec r_{0j}^{(0)}|^3}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(\vec r_{0k}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)})}{|\vec r_{0k}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^3}\right]\right\}, \tag{28}$$

$$s_{ij}^{(1)}=-\frac{2(\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0i}^{(1)}-\vec r_{0i}^{(1)})}{|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^4}, \tag{29}$$

$$s_{ij}^{(2)}=\frac{6(\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(1)}-\vec r_{0i}^{(1)})^2}{|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^6}-\frac{2r_{ij}^{(2)}}{|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^3}, \tag{30}$$

$$u_{ij}^{(1)}=-\frac{3(\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(1)}-\vec r_{0i}^{(1)})}{|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^5}, \tag{31}$$

$$u_{ij}^{(2)}=\frac{6(\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)},\ \vec r_{0j}^{(1)}-\vec r_{0i}^{(1)})^2}{|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^7}-\frac{3\vec r_{ij}^{(2)}}{|\vec r_{0j}^{(0)}-\vec r_{0i}^{(0)}|^4}, \tag{32}$$

$(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\quad i<j)$.

4. Основные неравенства для $|\vec r_{0i}^{(n)}|$, $|r_{ij}^{(n)}|$, $|s_{ij}^{(n)}|$ и $|u_{ij}^{(n)}|$.

4.1. Теперь докажем, что существуют такие положительные постоянные $H\geqslant H_0$, R_i, R_{ij}, S_{ij} и U_{ij}, что имеют место неравенства:

$$|\vec r_{0i}^{(n)}|\leqslant R_i\frac{H^n}{n^\alpha},\qquad n\geqslant 1 \tag{33}$$

$$|\vec r_{ij}^{(n)}|\leqslant R_{ij}\frac{H^n}{n^\alpha},\qquad n\geqslant 1 \tag{34}$$

$$|s_{ij}^{(n)}|\leqslant S_{ij}\frac{H^n}{n^\alpha},\qquad n\geqslant 1 \tag{35}$$

$$|u_{ij}^{(n)}|\leqslant U_{ij}\frac{H^n}{n^\alpha},\qquad n\geqslant 1. \tag{36}$$

Очевидно, что для первых нескольких значений n всегда можно подобрать такие положительные числа $H\geqslant H_0$, R_i, R_{ij}, S_{ij} и U_{ij}, что для них соблюдаются неравенства (33)—(36). Но, мы ниже докажем, что подбирая $H\geqslant H_0$, R_i, R_{ij}, S_{ij} и U_{ij} определенным образом, неравенства (33)—(36) будут соблюдаться для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$

Для этого воспользуемся рекуррентными неравенствами (21)—(24), предварительно выделяя из знака суммирования в правых частях этих неравенств члены, соответствующие значениям индекса $k=0$ и $k=n$.

Далее предположим, что неравенство (33) соблюдается для всех натуральных чисел от 2 до $n+1$, включительно, неравенства (34) и (35)—до n, включительно, неравенство (36)—до $n-1$, включительно.

Тогда получим следующие неравенства:

$$(n+1)(n+2)|\vec r_{0i}^{(n+2)}|\leqslant[|\vec r_{0i}^{(1)}|\Lambda_i+|\vec\rho_0^{(1)}|(\Lambda_0+\Lambda_i)+M_0+M_i+$$

$$+s_{0i}^{(0)}(N_{i0}+N_{0i})]\frac{H_0^n}{n^\alpha}+(|\lambda_0^{(0)}|+|\lambda_i^{(0)}|)R_0\frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}}+$$

$$+[k_0^2(m_0+m_i)v_{0i}^{(0)}R_i+(|\vec\nu_{i0}^{(0)}|+|\vec\nu_{0i}^{(0)}|)S_{0i}+k_0^2(m_0+m_i)|\vec r_{0i}^{(0)}|U_{0i}]\frac{H^n}{n^\alpha}+$$

$$+|\lambda_i^{(0)}| R_i \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + (\Delta_0+\Delta_i) R_0 H_0^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}(n-k)^\alpha} +$$

$$+ k_0^2 (m_0+m_i) R_i U_{0i} H^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} + (N_{i0}+N_{0i}) S_{0i} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{H_0^k H^{n-k}}{k^\alpha (n-k)^\alpha} +$$

$$+ \Delta_i R_i \sum_{k=1}^{n-1} \frac{H_0^{n-k} H^{k+1}}{(k+1)^{\alpha-1}(n-k)^\alpha} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{N}{}' \Big\{ (\overset{(0)}{s}_{0j} N_{0j} + \overset{(0)}{s}_{ij} N_{ij}) \frac{H_0^n}{n^\alpha} + [k_0^2 m_j \overset{(0)}{u}_{0j} R_j + k_0^2 m_j \overset{(0)}{u}_{ij} (R_i+R_j) +$$

$$+ |\vec{v}_{0j}^{(0)}| S_{0j} + |\vec{v}_{ij}^{(0)}| S_{ij} + k_0^2 m_j |\vec{r}_{0j}^{(0)}| U_{0j} +$$

$$+ k_0^2 m_j (|\vec{r}_{0i}^{(0)}| + |\vec{r}_{0j}^{(0)}|) U_{ij}] \frac{H^n}{n^\alpha} +$$

$$+ [N_{0j} S_{0j} + N_{ij} S_{ij} + k_0^2 m_j R_j U_{0j} +$$

$$+ k_0^2 m_j (R_i+R_j) U_{ij}] H^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} \Big\}, \tag{37}$$

$$(n+1) \vec{r}_{ij}^{(0)} |\overset{(n+1)}{s}_{ij}| \leqslant (|\overset{(1)}{s}_{ij}| R_{ij} + 2 |\overset{(1)}{r}_{ij}| S_{ij}) \frac{H^n}{n^\alpha} +$$

$$+ 2 \vec{s}_{ij}^{(0)} R_{ij} \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + 3 R_{ij} S_{ij} H^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}(n-k)^\alpha}, \tag{38}$$

$$(n+1) \vec{r}_{ij}^{(1)} |\overset{(n+1)}{u}_{ij}| \leqslant (|\overset{(1)}{v}_{ij}| R_{ij} + 3 |\overset{(1)}{r}_{ij}| U_{ij}) \frac{H^n}{n^\alpha} +$$

$$+ 3 \overset{(0)}{u}_{ij} R_{ij} \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + 4 R_{ij} U_{ij} H^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}(n-k)^\alpha}, \tag{39}$$

$$2 \overset{(0)}{r}_{ij} |\overset{(n)}{r}_{ij}| \leqslant 2 (|\vec{r}_{0i}^{(0)}| + |\vec{r}_{0j}^{(0)}|) (R_i+R_j) \frac{H^n}{n^\alpha} +$$

$$+ [(R_i+R_j)^2 + R^2_{ij}] H^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}. \tag{40}$$

Теперь полагая, что $H \geqslant H_0$, легко показать справедливость следующих неравенств:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} < \frac{A_\alpha}{n^\alpha}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha-1} (n-k)^\alpha} < \frac{A^\alpha}{2\, n^{\alpha-1}}, \tag{41'}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{H_0^k H^{n-k}}{k^\alpha (n-k)^\alpha} < \frac{A_\alpha H^n}{n^\alpha}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{H_0^k H^{n-k}}{k^{\alpha-1}(n-k)^\alpha} < \frac{A_\alpha H^n}{2\, n^{\alpha-1}}, \tag{41''}$$

где

$$A_\alpha = \frac{2^\alpha (3\alpha-1)}{\alpha-1}, \qquad \alpha > 1.$$

Пользуясь неравенствами (41′)—(41″) из неравенств (37)—(40) легко находим, что

$$(n+2)^\alpha |\vec{r}_{0i}^{(n+2)}| \leqslant \frac{2^{\alpha-2}}{3} H_0^n \Big[|\vec{r}_{0i}^{(1)}| \Delta_i + |\vec{\rho}_0^{(1)}| (\Delta_0+\Delta_i) + M_0 + M_i +$$

$$+ \overset{(0)}{S}_{0i} (N_{i0}+N_{0i}) \Big] + \frac{2^{2\alpha-2}}{2^\alpha} R_0 H_0^{n+1} (|\lambda_0^{(0)}| + |\lambda_i^{(0)}|) +$$

$$+ \frac{2^{\alpha-2}}{3} H^n \Big[k_0^2 (m_0+m_i) \overset{(0)}{u}_{0i} R_i + (|\vec{v}_{0i}^{(0)}| + |\vec{v}_{i0}^{(0)}|) S_{0i} + k_0^2 (m_0+m_i) |\vec{r}_{0i}^{(0)}| U_{0i} \Big] +$$

$$+ \frac{2^{2\alpha-2}}{3^\alpha} |\lambda_i^{(0)}| R_i H^{n+1} + 2^{\alpha-3} A_\alpha R_0 H_0^{n+1} (\Delta_0 + \Delta_i) +$$

$$+ \frac{2^{\alpha-2}}{3} A_\alpha k_0^2 (m_0+m_i) R_i U_{0i} H^n + \frac{2^{\alpha-3}}{3} A_\alpha (N_{i0}+N_{0i}) S_{0i} H^n +$$

$$+ 2^{\alpha-3} A_\alpha \Delta_i R_i H^{n+1} + \sum_{j=2}^{N}{}' \Big\{ \frac{2^{\alpha-2}}{3} H_0^n (\overset{(0)}{s}_{0j} N_{0j} + \overset{(0)}{s}_{ij} N_{ij}) +$$

$$+ \frac{2^{\alpha-2}}{3} H^n \Big[k_0^2 m_j \overset{(0)}{u}_{0j} R_j + k_0^2 m_j \overset{(0)}{u}_{ij} (R_i+R_j) + |\vec{v}_{0j}^{(0)}| S_{0j} + |\vec{v}_{ij}^{(0)}| S_{ij} +$$

$$+ k_0^2 m_j |\vec{r}_{0j}^{(0)}| U_{0j} + k_0^2 m_j (|\vec{r}_{0i}^{(0)}| + |\vec{r}_{0j}^{(0)}|) U_{ij} \Big] +$$

$$+ \frac{2^{\alpha-2}}{3} A_\alpha H^n [N_{0j} S_{0j} + N_{ij} S_{ij} + k_0^2 m_j R_j U_{0j} +$$

$$+ k_0^2 m_j (R_i+R_j) U_{ij}] \Big\}, \tag{42}$$

$$(n+1)^\alpha \overset{(0)}{r}_{ij} |\overset{(n+1)}{s}_{ij}| \leqslant \frac{3^{\alpha-1}}{2^\alpha} H^n (|\overset{(1)}{s}_{ij}| R_{ij} + 2 |\vec{r}_{ij}^{(1)}| S_{ij}) +$$

$$+ H^{n+1} R_{ij} \Big(2 \overset{(0)}{s}_{ij} + \frac{3^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}} A_\alpha S_{ij}\Big), \tag{43}$$

$$(n+1)^\alpha \overset{(0)}{r}_{ij} |\overset{(n+1)}{u}_{ij}| \leqslant \frac{3^{\alpha-1}}{2^\alpha} H^n (|\overset{(1)}{u}_{ij}| R_{ij} + 3 |\overset{(1)}{r}_{ij}| U_{ij}) +$$

$$+ H^{n+1} R_{ij} \Big(3 \overset{(0)}{u}_{ij} + \frac{3^\alpha}{2^{\alpha-1}} A_\alpha U_{ij}\Big), \tag{44}$$

$$n^\alpha \overset{(0)}{r}_{ij} |\overset{(n)}{r}_{ij}| \leqslant (|\vec{r}_{0i}^{(0)}| + |\vec{r}_{0j}^{(0)}|) (R_i+R_j) H^n +$$

$$+ \frac{1}{2} A_\alpha H^n [(R_i+R_j)^2 + R^2_{ij}]. \tag{45}$$

4.2. Теперь ясно, что для соблюдения неравенства (33) от 2 до $n+2$, включительно, неравенств (34) и (35)—до $n+1$, включительно, неравенства

(36) — до n, включительно, достаточно постоянные $H\geqslant H_0$, R_i, R_{ij}, S_{ij} и U_{ij} подчинить следующим неравенствам:

$$\frac{2^{\alpha-2}H_0^2}{3H^4}\Big[|\overset{(1)}{\vec r}_{0i}|\,\Lambda_i+|\vec\rho_0^{(1)}|\,(\Lambda_0+\Lambda_i)+M_0+M_i+$$

$$+\overset{(0)}{s}_{0i}\,(N_{i0}+N_{0i})\Big]+\frac{2^{2\alpha-1}}{3^\alpha}\,R_0\,\frac{H_0^3}{H^4}\,(|\lambda_0^{(0)}|+|\lambda_i^{(0)}|)+$$

$$+\frac{2^{\alpha-2}}{3H^2}\Big[k_0^2(m_0+m_i)\,\overset{(0)}{u}_{i0}R_i+(|\overset{(0)}{\vec v}_{0i}|+|\overset{(0)}{\vec v}_{i0}|)\,S_{0i}+$$

$$+k_0^2(m_0+m_i)\,|\overset{(0)}{\vec r}_{0i}|\,U_{0i}\Big]+\frac{2^{2\alpha-2}}{3^\alpha H}\,|\lambda_i^{(0)}|\,R_i+$$

$$+2^{\alpha-3}A_\alpha R_0\,(\Lambda_0+\Lambda_i)\,\frac{H_0^3}{H^4}+\frac{2^{\alpha-2}}{3H^2}\,A_\alpha\Big[k_0^2(m_0+m_i)R_iU_{0i}+$$

$$+(N_{i0}+N_{0i})\,S_{0i}\Big]+\frac{2^{\alpha-3}}{H}\,A_\alpha\Lambda_i R_i+$$

$$+\sum_{j=2}^{N}{}'\Big\{\frac{2^{\alpha-2}H_0^2}{3H^4}\,(\overset{(0)}{s}_{0j}N_{0j}+\overset{(0)}{s}_{ij}N_{ij})+\frac{2^{\alpha-2}}{3H^2}\Big[k_0^2m_j\,\overset{(0)}{n}_{0j}R_j+$$

$$+k_0^2m_j\,\overset{(0)}{u}_{ij}(R_i+R_j)+|\overset{(0)}{\vec v}_{0j}|\,S_{0j}+|\overset{(0)}{\vec v}_{ij}|\,S_{ij}+k_0^2m_j\,|\overset{(0)}{\vec r}_{0j}|\,U_{0j}+$$

$$+k_0^2m_j\,(|\overset{(0)}{\vec r}_{0i}|+|\overset{(0)}{\vec r}_{0j}|)\,U_{ij}+A_\alpha N_{0j}S_{0j}+A_\alpha N_{ij}S_{ij}+$$

$$+A_\alpha k_0^2m_jR_jU_{0j}+A_\alpha k_0^2m_j\,(R_i+R_j)\,U_{ij}\Big]\Big\}\leqslant R_i, \tag{46}$$

$$\frac{3^{\alpha-1}}{2^\alpha\overset{(0)}{r}_{ij}H}\,(|\overset{(1)}{s}_{ij}|\,R_{ij}+2\,|\overset{(1)}{r}_{ij}|\,S_{ij})+$$

$$+\frac{R_{ij}}{\overset{(0)}{r}_{ij}}\,(2\overset{(0)}{s}_{ij}+\frac{3^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}}\,A_\alpha S_{ij})\leqslant S_{ij}, \tag{47}$$

$$\frac{3^{\alpha-1}}{2^\alpha\overset{(0)}{r}_{ij}H}\,(|\overset{(1)}{u}_{ij}|\,R_{ij}+3\,|\overset{(1)}{r}_{ij}|\,U_{ij})+$$

$$+\frac{R_{ij}}{\overset{(0)}{r}_{ij}}\,(3\overset{(0)}{u}_{ij}+\frac{3^\alpha}{2^{\alpha-1}}\,A_\alpha U_{ij})\leqslant U_{ij}, \tag{48}$$

$$\frac{1}{\overset{(0)}{r}_{ij}}\,(|\overset{(0)}{\vec r}_{0i}|+|\overset{(0)}{\vec r}_{0j}|)\,(R_i+R_j)+\frac{A_\alpha}{2\overset{(0)}{r}_{ij}}\,[(R_i+R_j)^2+R_{ij}^2]\leqslant R_{ij}, \tag{49}$$

$i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\quad i<j.$

4.3. Существование положительных постоянных $H\geqslant H_0$, R_i, R_{ij}, S_{ij} и U_{ij}, удовлетворяющих неравенствам (46)—(49), можно установить следующим образом. Совершенно произвольно фиксируем положительные постоянные S_{ij} и U_{ij} и полагаем:

$$H>max\left\{\frac{3^\alpha|\overset{(1)}{r}_{ij}|}{2^\alpha\overset{(0)}{r}_{ij}},\quad\frac{3^{\alpha-1}|\overset{(1)}{s}_{ij}|}{2^{\alpha-1}\overset{(0)}{r}_{ij}}\right\} \tag{50}$$

и

$$R_{ij}\leqslant min\left\{\frac{\left(1-\dfrac{3^{\alpha-1}|\overset{(1)}{s}_{ij}|}{2^{\alpha-1}\overset{(0)}{r}_{ij}H}\right)S_{ij}}{\dfrac{3^{\alpha-1}|\overset{(1)}{s}_{ij}|}{2^\alpha\overset{(0)}{r}_{ij}H}+\dfrac{1}{\overset{(0)}{r}_{ij}}\left(2\overset{(0)}{s}_{ij}+\dfrac{3^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}}A_\alpha S_{ij}\right)},\quad\frac{\left(1-\dfrac{3^\alpha|\overset{(1)}{r}_{ij}|}{2^\alpha\overset{(0)}{r}_{ij}H}\right)U_{ij}}{\dfrac{3^{\alpha-1}|\overset{(1)}{u}_{ij}|}{2^\alpha\overset{(0)}{r}_{ij}H}+\dfrac{1}{\overset{(0)}{r}_{ij}}\left(3\overset{(0)}{u}_{ij}+\dfrac{3^\alpha}{2^{\alpha-1}}A_\alpha U_{ij}\right)}\right\}. \tag{51}$$

Тогда, очевидно, удовлетворяются неравенства (47) и (48).

Далее, еще несколько уменьшая (в случае необходимости) значения постоянных $R_{ij}>0$, положительные постоянные R_i ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$) можно выбрать настолько малыми, чтобы удовлетворялись неравенства (49).

Наконец, очевидно, что фиксируя указанные значения постоянных R_i, R_{ij}, S_{ij} и U_{ij}, постоянную $H\geqslant H_0$ можно подобрать настолько большой, чтобы удовлетворялись неравенства (46) (при этом правые части неравенств (51) могут только увеличиться).

Теперь заметим, что еще несколько увеличивая (в случае необходимости) значения постоянной H, неравенства (33) — (36) могут быть удовлетворены и при $n=1$.

Таким образом, неравенства (33) — (36) справедливы для $n=1$, и из их справедливости соответственно до значений $n+1$, n и $n-1$ включительно, следует их справедливость соответственно до значений $n+2$, $n+1$ и n, включительно.

Пользуясь принципом полной математической индукции, отсюда следует, что неравенства (33)—(36) удовлетворяются для всех $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$.

5. Доказательство сходимости рядов (17) — (20) и оценка их остатков

5.1. Предположим, что

$$0\leqslant t\leqslant H^{-1}.$$

Тогда, очевидно, что степенные ряды (17) — (20) сходятся при $0\leqslant t\leqslant H^{-1}$, ибо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^nH^n}{n^\alpha}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\infty,\quad \alpha>1.$$

Ряды, получаемые почленным дифференцированием рядов (17)—(20), очевидно, сходятся на полусегменте $0 \leqslant t < H^{-1}$ при $\alpha > 1$. Ряды, получаемые почленным двухкратным дифференцированием рядов (17), сходятся на сегменте $0 \leqslant t \leqslant H^{-1}$ при $\alpha > 3$; ряды, получаемые почленным однократным дифференцированием рядов (18)—(20), сходятся на сегменте $0 \leqslant t \leqslant H^{-1}$ при $\alpha > 2$.

5.2. Теперь положим:

$$\vec{r}_{0i}(t) = \sum_{k=0}^{n} \vec{r}_{0i}^{(k)} + [\vec{r}_{0i}(t)]_n.$$

Тогда для остаточного члена $[\vec{r}_{0i}(t)]_n$ получаем неравенство:

$$|[\vec{r}_{0i}(t)]_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\vec{r}_{0i}^{(k)}|\, t^k < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{R_i H^k t^k}{k^\alpha} \leqslant$$

$$< R_i \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < R_i \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{R_i}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}, \quad \alpha > 1.$$

Итак имеем оценку:

$$|[\vec{r}_{0i}(t)]_n| < \frac{R_i}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}} \tag{52}$$

равномерно на сегменте $0 \leqslant t \leqslant H^{-1}$.

Аналогично получаем оценки для остаточных членов рядов (18)—(20):

$$|[r_{ij}(t)]_n| < \frac{R_{ij}}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}, \tag{53}$$

$$|[s_{ij}(t)]_n| < \frac{S_{ij}}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}, \tag{54}$$

$$|[u_{ij}(t)]_n| < \frac{U_{ij}}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}. \tag{55}$$

6. Определение приближенного оптимального значения для $|\vec{r}_{01} - \vec{r}_{0p}|$, $p = 0, 2, 3, \ldots, N$.

6.1. Ограничимся рассмотрением приближенного выражения

$$\vec{r}_{0i}(t) = \vec{r}_{0i}^{(0)} + \vec{r}_{0i}^{(1)} t + \vec{r}_{0i}^{(2)} t^2 + \vec{r}_{0i}^{(3)} t^3,$$

$$i = 1, 2, \ldots, N, \tag{56}$$

где $\vec{r}_{0i}^{(0)}$ и $\vec{r}_{0i}^{(1)}$ — заданные векторы, а векторы $\vec{r}_{0i}^{(2)}$ и $\vec{r}_{0i}^{(3)}$ определяются из (25) и (26).

Пусть p—любое из чисел $0, 2, 3, \ldots, N$. Рассмотрим функцию:

$$\delta^2_{1p} = |\vec{r}_{01}(t) - \vec{r}_{0p}(t)|^2, \tag{57}$$

зависящую от t и от параметров $\lambda_i^{(0)}$, $\lambda_i^{(1)}$, $\vec{\mu}_i^{(0)}$, $\vec{\mu}_i^{(1)}$, $\vec{\nu}_{ij}^{(0)}$, $\vec{\nu}_{ij}^{(1)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$; $j = 0, 1, 2, \ldots, N$; $i \neq j$.

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением случая, когда исследуется движение космического аппарата M_1 с солнечным парусом в гравитационном поле Солнца M_0, Земли M_2 и планеты M_3. При этом Солнце примем за неподвижное тело, т. е. положим, что $\frac{d}{dt}\vec{\rho}_0 \equiv 0$.

Далее, имеем $\lambda_i^{(0)} = 0$, $\lambda_i^{(1)} = 0$, $\vec{\mu}_i^{(0)} = 0$, $\vec{\mu}_i^{(1)} = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Теперь положим:

$$\vec{\nu}_{ij}(t) = \begin{cases} \vec{\nu}^{(0)} + \vec{\nu}^{(1)} t, & i = 1, \quad j = 0 \\ 0, & i = 1, \ j \neq 0; \ i \neq 1, \ j = 0,1,2,3. \end{cases}$$

Тогда из (25) и (26) получаем:

$$\vec{r}_{01}^{(2)} = -\frac{1}{2} k_0^2 (m_0 + m_1) | \frac{\vec{r}_{01}^{(0)}}{|\vec{r}_{01}^{(0)}|^8} + \frac{\vec{\nu}^{(0)}}{2|\vec{r}_{01}^{(0)}|^4} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{3} k_0^2 m_j \left[\frac{\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{01}^{(0)}}{|\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{01}^{(0)}|^3} - \frac{\vec{r}_{0j}^{(0)}}{|\vec{r}_{0j}^{(0)}|^3} \right], \tag{58}$$

$$\vec{r}_{02}^{(2)} = -\frac{1}{2} k_0^2 (m_0 + m_2) \frac{\vec{r}_{02}^{(0)}}{|\vec{r}_{02}^{(0)}|^3} + k_0^2 m_2 \left[\frac{\vec{r}_{03}^{(0)} - \vec{r}_{02}^{(0)}}{|\vec{r}_{03}^{(0)} - \vec{r}_{02}^{(0)}|^3} - \frac{\vec{r}_{03}^{(0)}}{|\vec{r}_{03}^{(0)}|^3} \right], \tag{59}$$

$$\vec{r}_{03}^{(2)} = -\frac{k_0^2}{2} (m_0 + m_3) \frac{\vec{r}_{03}^{(0)}}{|\vec{r}_{03}^{(0)}|^3} + k_0^2 m_3 \left[\frac{\vec{r}_{02}^{(0)} - \vec{r}_{03}^{(0)}}{|\vec{r}_{02}^{(0)} - \vec{r}_{03}^{(0)}|^3} - \frac{\vec{r}_{02}^{(0)}}{|\vec{r}_{02}^{(0)}|^3} \right], \tag{60}$$

$$\vec{r}_{01}^{(3)} \frac{\vec{\nu}^{(0)}}{6|\vec{r}_{01}^{(0)}|^2} - k_0^2 (m_0 + m_1) \frac{\vec{r}_{01}^{(1)}}{6|\vec{r}_{01}^{(1)}|^3} - \frac{(\vec{r}_{01}^{(0)}, \vec{r}_{01}^{(1)})\, \vec{\nu}^{(1)}}{3|\vec{r}_{01}^{(0)}|^4} +$$

$$+ \frac{k_0^2}{2} (m_0 + m_1) \frac{(\vec{r}_{01}^{(0)}, \vec{r}_{01}^{(1)})\, \vec{r}_{01}^{(0)}}{|\vec{r}_{01}^{(0)}|^5} +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{j=2}^{3} \left\{ k_0^2 m_j \left[\frac{\vec{r}_{0j}^{(1)} - \vec{r}_{01}^{(1)}}{|\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{01}^{(0)}|^3} - \frac{\vec{r}_{0j}^{(1)}}{|\vec{r}_{0j}^{(0)}|^3} \right] - \right.$$

$$\left. - 3 k_0^2 m_j \left[\frac{(\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{01}^{(0)}, \vec{r}_{0j}^{(1)} - \vec{r}_{01}^{(1)})(\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{01}^{(0)})}{|\vec{r}_{0j}^{(0)} - \vec{r}_{01}^{(0)}|^5} - \frac{(\vec{r}_{0j}^{(0)}, \vec{r}_{0j}^{(1)})\, \vec{r}_{0j}^{(0)}}{|\vec{r}_{0j}^{(0)}|^5} \right] \right\}, \tag{61}$$

$$\vec{r}_{02}^{(3)} = -k_0^2 (m_0 + m_2) \frac{\vec{r}_{02}^{(1)}}{6|\vec{r}_{02}^{(0)}|^3} + k_0^2 (m_0 + m_2) \frac{(\vec{r}_{02}^{(0)}, \vec{r}_{02}^{(1)})\, \vec{r}_{02}^{(0)}}{2|\vec{r}_{02}^{(0)}|^5} +$$

$$+\frac{k_0^2 m_3}{6}\left[\frac{\vec r^{(1)}_{03}-\vec r^{(1)}_{02}}{|\vec r^{(0)}_{03}-\vec r^{(0)}_{02}|^3}-\frac{\vec r^{(1)}_{03}}{|\vec r^{(0)}_{03}|^3}\right]-$$

$$-\frac{k_0^2 m_3}{2}\left[\frac{(\vec r^{(0)}_{03}-\vec r^{(0)}_{02},\ \vec r^{(1)}_{03}-\vec r^{(1)}_{02})(\vec r^{(0)}_{03}-\vec r^{(0)}_{02})}{|\vec r^{(0)}_{03}-\vec r^{(0)}_{02}|^5}-\frac{(\vec r^{(0)}_{03},\ \vec r^{(1)}_{03})\,\vec r^{(0)}_{03}}{|\vec r^{(0)}_{03}|^5}\right], \qquad (62)$$

$$\vec r^{(3)}_{02}=-k_0^2(m_0+m_3)\frac{\vec r^{(1)}_{03}}{6|\vec r^{(0)}_{03}|^3}+k_0^2(m_0+m_3)\frac{(\vec r^{(0)}_{03},\ \vec r^{(1)}_{03})\,\vec r^{(0)}_{03}}{|\vec r^{(0)}_{03}|^5}+$$

$$+\frac{k_0^2 m_2}{6}\left[\frac{\vec r^{(1)}_{02}-\vec r^{(1)}_{03}}{|\vec r^{(1)}_{01}-\vec r^{(1)}_{02}|^3}-\frac{\vec r^{(1)}_{02}}{|\vec r^{(0)}_{02}|^3}\right]-$$

$$-\frac{k_0^2 m_2}{2}\left[\frac{(\vec r^{(0)}_{02}-\vec r^{(0)}_{03},\ \vec r^{(1)}_{02}-\vec r^{(1)}_{03})(\vec r^{(0)}_{01}-\vec r^{(0)}_{03})}{|\vec r^{(0)}_{02}-\vec r^{(0)}_{03}|^5}-\frac{(\vec r^{(0)}_{03},\ \vec r^{(1)}_{03})\,\vec r^{(0)}_{03}}{|\vec r^{(0)}_{03}|^5}\right]. \qquad (63)$$

6.2. В (57) положим $p=3$ и рассмотрим выражение

$$\delta^2_{13}=|\vec r_{01}(t)-\vec r_{03}(t)|^2, \qquad (64)$$

т. е. квадрат расстояния между планетой и космическим аппаратом (с солнечным парусом) в момент времени t.

Из (58) — (63) имеем:

$$\vec r_{01}(t)-\vec r_{03}(t)=\vec a_0+\vec b_0 t+(\vec a_1+b_1\vec\nu^{(0)})\,t^2+(\vec a_2+b_2\vec\nu^{(0)}+c_2\vec\nu^{(1)})\,t^3, \qquad (65)$$

где

$$\vec a_0=\vec r^{(0)}_{01}-\vec r^{(0)}_{03},\quad \vec b_0=\vec r^{(1)}_{01}-\vec r^{(1)}_{03},$$

$$\vec a_1=-k_0^2(m_0+m_1)\frac{\vec r^{(0)}_{01}}{2|\vec r^{(0)}_{01}|^3}+\sum_{j=2}^{3}k_0^2 m_j\left[\frac{\vec r^{(0)}_{0j}-\vec r^{(0)}_{01}}{|\vec r^{(0)}_{0j}-\vec r^{(0)}_{01}|^3}-\frac{\vec r^{(0)}_{0j}}{|\vec r^{(0)}_{0j}|^3}\right]+$$

$$+k^2_0(m_0+m_3)\frac{\vec r^{(0)}_{03}}{|\vec r^{(0)}_{03}|^3}-k^2_0 m_2\left[\frac{\vec r^{(0)}_{02}-\vec r^{(0)}_{03}}{|\vec r^{(0)}_{02}-\vec r^{(0)}_{03}|^3}-\frac{\vec r^{(0)}_{02}}{|\vec r^{(0)}_{02}|^3}\right],$$

$$b_1=\frac{1}{2|\vec r^{(0)}_{01}|^4},$$

$$\vec a_2=-k_0^2(m_0+m_1)\frac{\vec r^{(1)}_{01}}{6|\vec r^{(0)}_{01}|^3}+k_0^2(m_0+m_1)\frac{(\vec r^{(0)}_{01},\ \vec r^{(1)}_{01})\,\vec r^{(0)}_{01}}{2|\vec r^{(0)}_{01}|^5}+$$

$$+\frac{1}{6}\sum_{j=2}^{3}\left\{k_0^2 m_j\left[\frac{\vec r^{(1)}_{0j}-\vec r^{(1)}_{01}}{|\vec r^{(0)}_{0j}-\vec r^{(0)}_{01}|^3}-\frac{\vec r^{(1)}_{0j}}{|\vec r^{(0)}_{0j}|^3}\right]-\right.$$

$$\left.-3k_0^2 m_j\left[\frac{(\vec r^{(0)}_{0j}-\vec r^{(0)}_{01},\ \vec r^{(1)}_{0j}-\vec r^{(1)}_{01})(\vec r^{(0)}_{0j}-\vec r^{(0)}_{01})}{|\vec r^{(0)}_{0j}-\vec r^{(0)}_{01}|^5}-\frac{(\vec r^{(0)}_{0j},\ \vec r^{(1)}_{0j})\,\vec r^{(0)}_{0j}}{|\vec r^{(0)}_{0j}|^5}\right]\right\}+$$

$$+k_0^2(m_0+m_3)\frac{\vec r^{(1)}_{03}}{6|\vec r^{(0)}_{03}|^3}-(m_0+m_3)\frac{(\vec r^{(0)}_{03},\ \vec r^{(1)}_{03})\,\vec r^{(0)}_{03}}{|\vec r^{(0)}_{03}|^5}-$$

$$-\frac{k_0^2 m_2}{6}\left[\frac{\vec r^{(1)}_{02}-\vec r^{(1)}_{03}}{|\vec r^{(1)}_{02}-\vec r^{(1)}_{03}|^3}-\frac{\vec r^{(1)}_{02}}{|\vec r^{(0)}_{02}|^3}\right]+$$

$$+\frac{k_0^2 m_2}{2}\left[\frac{(\vec r^{(0)}_{02}-\vec r^{(0)}_{03},\ \vec r^{(1)}_{02}-\vec r^{(1)}_{03})(\vec r^{(0)}_{02}-\vec r^{(0)}_{03})}{|\vec r^{(0)}_{02}-\vec r^{(0)}_{03}|^5}-\frac{(\vec r^{(0)}_{02},\ \vec r^{(1)}_{02})\,\vec r^{(0)}_{02}}{|\vec r^{(0)}_{02}|^5}\right],$$

$$b_2=\frac{1}{6|\vec r^{(0)}_{01}|^2},\qquad c_2=-\frac{(\vec r^{(0)}_{01},\ \vec r^{(1)}_{01})}{3|\vec r^{(0)}_{01}|^4}.$$

Теперь из (64) и (65) следует:

$$\delta^2_{13}=(\vec r_{01}(t)-\vec r_{03}(t),\ \vec r_{01}(t)-\vec r_{03}(t))=$$

$$=|\vec a_0|^2+2(\vec a_0,\ \vec b_0)\,t+[|\vec b_0|^2+2(\vec a_0,\ a_1+\vec b_1\vec\nu^{(0)})]\,t^2+$$

$$+2[(\vec a_0,\ \vec a_2+b_2\vec\nu^{(0)}+c_2\vec\nu^{(1)})+(\vec b_0,\ \vec a_1+b_1\vec\nu^{(0)})]\,t^3+$$

$$+[|\vec a_1+b_1\vec\nu^{(0)}|^2+2(\vec b_0,\ \vec a_2+b_2\vec\nu^{(0)}+c_2\vec\nu^{(1)})]\,t^4+$$

$$+2(\vec a_1+b_1\vec\nu^{(0)},\ \vec a_2+b_2\vec\nu^{(0)}+c_2\vec\nu^{(1)})\,t^5+|\vec a_2+b_2\vec\nu^{(0)}+c_2\vec\nu^{(1)}|^2\,t^6. \qquad (66)$$

Таким образом, δ^2_{13} представляет собою полином шестой степени относительно времени t, коэффициенты которого явно выражаются через заданные величины: $\vec r^{(0)}_{01}$, $\vec r^{(0)}_{02}$, $\vec r^{(0)}_{03}$. $\vec r^{(1)}_{01}$, $\vec r^{(1)}_{02}$, $\vec r^{(1)}_{03}$, m_0, m_1, m_2, m_3 и векторы управления $\vec\nu^{(0)}$, $\vec\nu^{(1)}$ космическим аппаратом (с солнечным парусом).

Имея выражение (66), можно приближенно определить момент t и векторы $\vec\nu^{(0)}$ и $\vec\nu^{(1)}$ таким образом, чтобы расстояние δ_{13} между планетой и космическим аппаратом достигло минимального значения. Допущенную при этом погрешность можно оценить пользуясь неравенствами (52)—(55).

7. Численный пример к задаче полета космического тела к Венере

В настоящем параграфе мы рассмотрим численный пример, иллюстрирующий практическую пригодность полученных нами результатов, изложенных в предыдущих главах.

Так как вычисления мы проводили на машине „Урал I", то нам пришлось рассматривать движение космического тела с постоянной массой под действием сил притяжения лишь Земли, Венеры и Солнца.

Рассмотрим движение системы, состоящей из космического тела, Земли и Венеры, относительно прямоугольной гелиоцентрической эклиптической системы координат для эпохи 1961.0.

Пусть

$$\vec{r}_{01}=(x_{01},\ y_{01},\ z_{01}),\ \vec{r}_{02}=(x_{02},\ y_{02},\ z_{02}),\ \vec{r}_{03}=(x_{03},\ y_{03},\ z_{03})$$

обозначают радиус-векторы, соответственно, ракеты, Земли и Венеры, с проекциями на осях упомянутой системы координат.

Основная система дифференциальных уравнений движения в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\vec{r}_{0i}=\sum_{j=2}^{3}{}' k_0^{\,2} m_j\left(\frac{\vec{r}_{ij}}{r^3_{ij}}-\frac{\vec{r}_{0j}}{r^3_{0j}}\right)-k_0^{\,2}\,(m_0+m_i)\,\frac{\vec{r}_{0i}}{r^3_{0i}}\,,$$

где $\sum\limits_{j=2}^{3}{}'$ означает знак суммирования, в котором пропущен член при $j=i$.

Полагая $u_{ij}=\dfrac{1}{r^3_{ij}}$ $(i\neq j)$, для определения неизвестных $\vec{r}_{0i},\ r_{ij},\ u_{ij}$ получаем следующую систему дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\vec{r}_{0i}=\sum_{j=2}^{3}{}' k_0^{\,2} m_j\,[u_{ij}(\vec{r}_{0j}-\vec{r}_{0i})-u_{0j}\,\vec{r}_{0j}]-k_0^{\,2}\,(m_0+m_i)\,u_{0i}\,\vec{r}_{0i},$$

$$r_{ij}\,\frac{d}{dt}\,u_{ij}+3\,u_{ij}\,\frac{d}{dt}\,r_{ij}=0 \qquad (i\neq j)$$

и

$$r^2_{ij}=|\vec{r}_{0j}-\vec{r}_{0i}|^2.$$

Положим приближенно:

$$\vec{r}_{0i}\,(t)=\sum_{n=0}^{9}\overset{\to(n)}{r}_{0i}\,t^n,$$

$$r_{ij}\,(t)=\sum_{n=0}^{9}\overset{(n)}{r}_{ij}\,t^n, \qquad u_{ij}\,(t)=\sum_{n=0}^{9}\overset{(n)}{u}_{ij}\,t^n.$$

Коэффициенты $\overset{\to(n)}{r}_{0i},\ \overset{(n)}{r}_{ij}$ и $\overset{(n)}{u}_{ij}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots,\ 9)$ находятся из следующих рекуррентных соотношений:

$$(n+1)\ (n+2)\,\overset{\to(n+2)}{r}_{0i}=\sum_{k=0}^{n}\left\{\sum_{j=2}^{3}{}' k_0^{\,2} m_j\,[\overset{(k)}{u}_{ij}\,(\overset{\to(n-k)}{r}_{0j}-\overset{\to(n-k)}{r}_{0i})-\right.$$

$$\left.-\overset{(k)}{u}_{0j}\,\overset{\to(n-k)}{r}_{0j}\,]-k_0^{\,2}\,(m_0+m_i)\,\overset{(k)}{u}_{0i}\,\overset{\to(n-k)}{r}_{0i}\right\},$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 7;\quad i=1,\ 2,\ 3;$$

$$(n+1)\,\overset{(0)}{r}_{ij}\,\overset{(n+1)}{u}_{ij}=-\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)\,\overset{(n-k)}{r}_{ij}\,\overset{(k+1)}{u}_{ij}+3\,(k+1)\,\overset{(k+1)}{r}_{ij}\,\overset{(n-k)}{u}_{ij}\,]-$$

$$-3\,(n+1)\,\overset{(0)}{u}_{ij}\,\overset{(n+1)}{r}_{ij}\,,$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 8;\quad i=0,\ 1,\ 2;\quad j=1,\ 2,\ 3;\quad i<j;$$

$$2\,\overset{(0)}{r}_{ij}\,\overset{(n)}{r}_{ij}=\sum_{k=0}^{n}(\overset{\to(k)}{r}_{0j}-\overset{\to(k)}{r}_{0i},\ \overset{\to(n-k)}{r}_{0j}-\overset{\to(n-k)}{r}_{0i})-\sum_{k=1}^{n-1}\overset{(k)}{r}_{ij}\,\overset{(n-k)}{r}_{ij}\,,$$

$$n=1,\ 2,\ \ldots,\ 9;\quad i=0,\ 1,\ 2;\quad j=1,\ 2,\ 3;\quad i<j.$$

За начало отсчета времени мы взяли 20,044 февраля 1961 года и воспользовались следующими приближенными начальными данными для координат и для компонент скоростей, соответственно, ракеты, Земли и Венеры:

0.8655592 а. е.		0.00557341 а. е./сутки
0.4763987 а. е.		0.01500660 а. е./сутки
0.0003000 а. е.		0.00010000 а. е./сутки
0.8 63067 а. е.	(*)	0.00857450 а. е./сутки
0.1768041 а. е.		0.01511395 а. е./сутки
0.0000039 а. е.		0.00000090 а. е./сутки
0.3583000 а. е.		0.01760530 а. е./сутки
0.6221085 а. е.		0.01020675 а. е./сутки
5.0293678 а. е.		0.00087130 а. е./сутки

Эти данные приведены в совместной работе [1] Е. П. Аксенова, Е. А. Гребеникова, В. Г. Демина и Е. Н. Пирогова, посвященной построению ряда приближенных орбит для перелета на Венеру или для близкого прохождения около Венеры.

Исходя из начальных значений (*), с помощью равенств:

$$r^2_{ij}=(x_{0j}-x_{0i})^2+(y_{0j}-y_{0i})^2+(z_{0j}-z_{0i})^2,$$

$$r'_{ij}=(x_{0j}-x_{0i})\ (x'_{0j}-x'_{0i})+(y_{0j}-y_{0i})\ (y'_{0j}-y'_{0i})+(z_{0j}-z_{0i})\ (z'_{0j}-z'_{0i}),$$

$$u_{ij}=\frac{1}{r^3_{ij}}, \qquad u'_{ij}=-\frac{3\,r'_{ij}}{r_{ij}}\,u_{ij},$$

находим начальные значения величин $r_{ij},\ r'_{ij},\ u_{ij},\ u'_{ij}$.

Ниже приводится таблица значений координат ракеты, Земли и Венеры, вычисленные на машине „Урал I", для нескольких моментов времени.

Для сравнения, мы приводим также таблицу значений координат ракеты, Земли и Венеры для тех же моментов времени, вычисленных Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребениковым, В. Г. Деминым и Е. Н. Пироговым [1] по совершенно другому методу (по методу численного интегрирования дифференциальных уравнений).

В результате сравнения оказалось, что соответствующие численные значения в основном совпадают с точностью до шестого десятичного знака.

1	2	3	4
	Координаты, вычисленные по нашей схеме для момента времени $t_1 = 28,215875$	Координаты, вычисленные по методу численного интегрирования для момента времени $t_1 = 28,215875$	Разности
Ракета	— 0,904192636 0,349722462 — 0,000658730	— 0,904191500 0,349722730 — 0.00065827	— 0,000001136 — 0,000000268 — 0,000000460
Земля	— 0,927317268 0,348653456 — 0,000001475	— 0.927317200 0,348650820 — 0,000001475	— 0,000000068 0,000002636 0,000000000
Венера	— 0.491392036 0,522938318 0,035645978	— 0,491392060 0,522938340 0,035645979	0,000000024 — 0,000000022 — 0,000000001
	$t_2 = 38,215875$	$t_2 = 38,215875$	
Ракета	— 0,924983660 0,184701430 — 0,001051357	— 0,92498460 0,184699560 — 0,001051336	0,0000094 0,0000187 — 0,00000021
Земля	— 0,9762967 0,18238296 0,000007652	— 0,9762978 0,18238295 0,000007652	0,0000011 0,00000001 0,00000000
Венера	— 0,61819059 0,36450593 0,040730616	— 0,61819112 0,36450411 0,040730614	0,00000053 + 0,00000182 + 0,000000002
	$t_2 = 48,215875$	$t_3 = 48,215875$	
Ракета	— 0,91323529 0,013260735 — 0,0014052022	— 0.91323450 0,013258593 — 0,0014052077	— 0,00000079 0,000002142 0,0000000055
Земля	— 0,99586751 0,010804600 0,000016588	— 0,99586800 0,010807577 0,000016588	— 0,00000049 — 0,000002977 0,000000000
Венера	— 0,69607009 0,17722034 0,042591919	— 0.696071300 0.17721862 0,042591969	— 0,00000121 0,00000172 0,000000050
	$t_4 = 68,215875$	$t_4 = 68,215875$	
Ракета	— 0.7815254 — 0,3234125 — 0,001928234	— 0,7815240 — 0,3234141 — 0,001928236	— 0,0000014 0,0000016 0,000000002
Земля	— 0,9462892 — 0,32842719 0,000032957	— 0,9462889 — 0,32842888 0,000032957	— 0,0000003 0,00000169 0,000000000
Венера	— 0,68551883 — 0,22445866 0,03636527	— 0,6855162 — 0 22446020 0,03636525	— 0,00000263 0,00000154 0,00000002
	$t_5 = 78,215875$	$t_5 = 78,215875$	
Ракета	— 0.65893121 — 0,47230082 — 0,002057198	— 0,65892716 — 0.47230345 — 0,002057202	— 0,00000405 0,00000263 0,000000004
Земля	— 0,87909953 — 0,48601887 0,0000399576	— 0,87909910 — 0.48602177 0,0000399571	— 0,00000043 0,00000290 0,000000000
Венера	— 0,59844139 — 0,4054 696 0,028796071	— 0,59843639 — 0,40541694 0,028796043	— 0,00000500 — 0,0000000002 0,0010000028

1	2	3	4
	$t_6 = 88,215875$	$t_6 = 88,215875$	
Ракета	— 0,500021597 — 0,59487983 — 0,002069292	— 0,500020110 — 0,59488182 — 0,002069309	— 0,000001487 + 0,00000199 0,000000017
Земля	— 0,786302298 — 0,629463916 0,000045870	— 0,786301300 — 0,62946468 0,000045869	— 0.000000998 0,000000664 0,000000001
Венера	— 0.464878128 — 0,555905486 0,0 8989848	— 0.464875490 — 0.555907290 0,018989819	— 0,000002638 — 0,000001804 0,000000029
	$t_7 = 98,215875$	$t_7 = 98,215875$	
Ракета	— 0,309943518 — 0,679964830 — 0,001941059	— 0,309945660 — 0.679975500 — 0,001941143	0,000002142 + 0,000010670 0,000000084
Земля	— 0,670783762 — 0,754725054 0,000050494	— 0,670781700 — 0,754726000 0.000050492	— 0,000002062 0,000000946 0,000000002
Венера	— 0,295424578 — 0.663498054 0,007717116	— 0.295424080 — 0,663501330 0,007717082	— 0,000005498 0,000003270 0,000000034

Полученные нами результаты можно считать удовлетворительными, если принять во внимание то обстоятельство, что упомянутые авторы [1] не пренебрегают действиями Марса и Юпитера, в то время как мы рассматриваем изолированную систему, состоящую из ракеты, Земли, Венеры и Солнца.

Вычислительная работа на машине „Урал I" была выполнена при кафедре приближенного анализа и вычислительной техники механико-математического факультета Тбилисского государственного университета.

Кафедра астрономии
Тбилисского государственного университета
Июнь, 1965.

ცვალებადი მასის მქონე კოსმოსური სხეულის მოძრაობის შესახებ მრავალი სხეულის გრავიტაციულ ველში

ნ. მაღნარაძე

ON THE MOTION OF A SPACE BODY HAVING VARIABLE MASS IN A GRAVITATIONAL FIELD OF MANY BODIES

N. G. MAGNARADZE

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенев Е. А., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Пирогов Е. Н., Некоторые вопросы динамики полета к Венере. Сообщ. Гос. астрон. инст. им. П. К. Штернберга, 1962, № 125, 12—41.
2. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. Москва, 1964.
3. Гантмахер Ф. Р. и Левин Л. М. Об уравнениях движения ракеты. Прикладная матем. и мех. 1947, т. XI, вып. 3.
4. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. I, II, III, IV. Инженерный журнал АН СССР, Москва, 1963, III, вып. 3, стр. 590—615; 1963, III, вып. 4, стр. 748—768; 1964, IV, вып. 1, стр. 168—200; 1964, IV, вып. 2, стр. 392—423.
5. Дубошин Г. Н. Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астрон. журн. 1925, 2, № 4, 5—11; 4, № 2, 123—142; 1928, 5, № 2—3, 153—172; 1929, 6, № 2, 162—179.
6. Дубошин Г. Н. О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами. Астрон. журн. 1930, 7, 1, 3—4, 153—172.
7. Дубошин Г. Н. О дифференциальных уравнениях поступательно вращательного движения взаимно притягивающихся твердых тел. Астрон. журн. 1958, 35, вып. 2, 265—276
8. Дубошин Г. Н. Небесная механика. I, Москва, 1963; II, Москва, 1964.
9. Карагодин В. М. Некоторые вопросы механики тела переменной массы. Москва, 1956.
10. Космодемьянская А. А. Курс теоретической механики. Москва, 1955.
11. Магнарадзе Н. Г. Некоторые замечания к задаче движения материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1958, № 22, 139—144.
12. Магнарадзе Н. Г. Об ограниченной задаче трех тел, когда притягиваемое тело имеет переменную массу. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1959, № 24, 145—159.
13. Магнарадзе Н. Г. Об одном случае ограниченной задачи трех тел, когда притягиваемое тело имеет переменную массу. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1961, № 26, 191—214.
14. Магнарадзе Н. Г. Об ограниченной пространственной задаче трех тел, когда масса притягиваемого тела является заданной функцией от времени. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1961, № 26, 215—224.
15. Магнарадзе Н. Г. О поступательно-вращательном движении космического тела относительно Земли. Проблемы движения искусственных небесных тел. АН СССР, 1963, 278—292.
16. Магнарадзе Н. Г. О движении космического тела с переменной массой при полете к Венере. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс. 1964, № 30, 145—152.
17. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. Москва, 1952.
18. Охоцимский Д. Е. К теории движения ракет. Прикл. матем. и мех., 1946, 10, № 2.
19. Steffensen J. F. On the restricted problem of three bodies. Kgl. danske videnskab. selskab. Mat.-fys. medd. 1956, 30, №. 18, 17.
20. Субботин. Курс небесной механики, 1. Ленинград, 1944 (изд. второе); II, 1937; III, 1949.
21. Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels. BB. I, II, Berlin, 1927.
22. Эрике К. Космический полет, Москва, 1963.
23. Исследование оптимальных режимов движения ракет. Москва, 1959.
24. Космические траектории. Сборник статей, Москва, 1963.

ХРОНИКА

* В течение 1965—66 гг. сотрудники Абастуманской астрофизической обсерватории приняли участие докладами в ряде астрономических конференций и совещаний (по Международному Году Спокойного Солнца, по проблемам физики верхней атмосферы Земли, в Москве, в конференции по электронно-лучевым и фотоэлектрическим приборам, в Ленинграде, в работе совещания Рабочей группы по звездным скоплениям и ассоциациям, в Москве, Рабочей группы по астрономическому приборостроению, в Ленинграде, совещания по изучению высоких слоев земной атмосферы, в Мурманске, в работе Пленума Комиссии по переменным звездам, в Свердловске и др.).

* В. П. Джапиашвили принял участие в Международной конференции по изучению природы поверхности Луны, в Вашингтоне, созванном Национальным управлением по аэронавтике и изучению космического пространства США и Комиссией № 17 МАС. Е. К. Харадзе — совещании по вопросам подготовки молодых астрономов, в Ницце, организованном органами МАС.

* Г. Н. Салуквадзе находился в научной командировке в Таутенбургской астрономической обсерватории (ГДР). Л. В. Ксанфомалити посетил астрономические и другие научные учреждения ГДР. Ц. С. Хецуриани находилась в научной командировке в Обсерватории в Ондржейове (ЧСР).

* Член-корреспондент АН СССР Э. Р. Мустель прочел в 1965 г. в Тбилисском гос. университете цикл лекций на тему: „Солнечная активность и ее воздействие на атмосферу и магнитное поле Земли", посетил Абастуманскую обсерваторию, где выступил с докладами.

* В обсерватории были проведены доклады и семинарные занятия приглашенными лицами: проф. В. А. Кратом, доктором физ.-мат. наук Г. М. Никольским. Т. В. Крат участвовала в наладке нового солнечного горизонтального телескопа;

* В 1965 году в Абастумани был проведен семинар Рабочей группы по Комплексному изучению Млечного Пути (план П. П. Паренаго) Комиссии звездной астрономии Астрономического совета АН СССР.

* Кандидатскую диссертацию защитили Ц. С. Хецуриани („Конструкция и испытание инфракрасного солнечного спектрофотометра и наблюдение над изменением контуров фраунгоферовых линий от центра к краю солнечного диска", июнь, 1965) и М. А. Шнукашвили („Двумерная количественная спектральная классификация звезд F0 — G5 по спектрам, полученным с предобъективной призмой", июнь, 1966).

* Обсерваторию посетили, ознакомились с ее работами, выступили с докладами, принимали участие в коллоквиумах ученые из ГДР, Чехословакии, Польши, США, Франции; среди них: Д. Хербиг (Ликская обсерватория, США), О. Вильямс (Лаборатория наук о Земле Кембриджского института ВВС, США), Н. Рихтер (директор Таутенбургской обсерватории, ГДР), Р. Рыбка (директор Краковской обсерватории, Польша), О. Дольфюс (Медонская обсерватория, Франция).

* В обсерватории длительное время работала группа немецких ученых ГДР во главе с доктором Г. Дитце (экспедиция Метеорологической обсерватории в Дрездене, изучающая поляризацию дневного света).

* Собран внезатменный коронограф типа Лио, изготовленный в мастерских Абастуманской обсерватории (кроме оптических частей). Наблюдения дали хорошего качества спектры короны. Отлично видна зеленая корональная линия (λ 5303 Å), хорошо получается также и красная (λ 6374 Å).

* Установлен горизонтальный солнечный телескоп АЦУ—5 со спектрографом АСП—20. Получены хорошеге качества спектры активных областей Солнца, а также снимки хорошего качества с очень мелкой грануляцией.
