ON ONE CASE OF THE RESTRICTED PROBLEM OF THREE BODIES WHEN THE ATTRACTED BODY HAS A VARIABLE MASS

N. G. MAGNARADZE

ЛИТЕРАТУРА

1. Steffensen T. F. On the restricted problem of three bodies. Kgl. Dansko videnscab. selscab. Mat.—fys. medd. 1956, 30, № 18, 17.
2. Магнарадзе Н. Г. Об ограниченной задаче трех тел, когда притягиваемое тело имеет переменную массу. Бюлл. Абастуман. астрофиз. обс., 1959, № 24, 145—159.
3. Мещерский И. Ф. Работы по механике тел переменной массы. 1952.

აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 26, 1961
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 26, 1961

Н. Г. МАГНАРАДЗЕ

ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ, КОГДА МАССА ПРИТЯГИВАЕМОГО ТЕЛА ЯВЛЯЕТСЯ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ

Введение. В одной из предыдущих работ [1] нами была исследована задача трех тел в том случае, когда двое из них, M_1 и M_2, имеющие постоянные массы m_1 и m_2, расположены на прямой линии, вращающейся с постоянной условной скоростью ω около их общего центра тяжести на некоторой фиксированной плоскости, и притягивающие по закону притяжения Ньютона третье тело M, имеющее переменную массу m и движущееся в этой плоскости. Массу m мы считали настолько малой, что тела M_1 и M_2 не подвергаются притяжению тела M.

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда при указанных условиях тело M совершает пространственное движение.

При этом в основном будем пользоваться обозначениями, введенными нами в предыдущей работе [1].

1. Вывод основных дифференциальных уравнений (2). Заданную фиксированную плоскость, на которой расположена упомянутая выше вращающаяся прямая линия, мы примем за координатную плоскость $\xi\Omega\eta$ абсолютной прямолинейной прямоугольной системы координат $\xi\eta\zeta\Omega$, с началом в произвольной фиксированной точке Ω.

По условию точка $M(\xi, \eta, \zeta)$ притягивается по закону Ньютона двумя точками $M_1(\xi_1, \eta_1, 0)$ и $M_2(\xi_2, \eta_2, 0)$, лежащими на прямой линии, равномерно вращающейся с угловой скоростью ω около их центра тяжести $M_0(\xi_0, \eta_0, 0)$, где

$$\xi_0 = \frac{m_1\xi_1 + m_2\xi_2}{m_1 + m_2} \quad \text{и} \quad \eta_0 = \frac{m_1\eta_1 + m_2\eta_2}{m_1 + m_2}.$$

Точки M_1 и M_2 притягивают точку $M(\xi, \eta, \zeta)$ по закону Ньютона силой $\vec{F}$, проекции которой на осях $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ имеют вид

$$F_\xi = -k^2 m m_1 \frac{(\xi - \xi_1)}{r_1^3} - k^2 m m_2 \frac{(\xi - \xi_2)}{r_2^3},$$

$$F_\eta = -k^2 m m_1 \frac{(\eta - \eta_1)}{r_1^3} - k^2 m m_2 \frac{(\eta - \eta_2)}{r_2^3},$$

$$F_\zeta = -k^2 m m_1 \frac{\zeta}{r_1^3} - k^2 m m_2 \frac{\zeta}{r_2^3},$$

где

$$r_1=\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+\zeta^2} \quad \text{и} \quad r_2=\sqrt{(\xi-\xi_2)^2+(\eta-\eta_2)^2+\zeta^2}.$$

Пользуясь известными уравнениями И. В. Мещерского [2] и т. н. гипотезой К. Э. Циолковского [3], нетрудно составить следующую систему дифференциальных уравнений абсолютного движения точки M [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{dt^2}-\lambda\frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{m}F_\xi,\\ &\frac{d^2\eta}{dt^2}-\lambda\frac{d\eta}{dt}=\frac{1}{m}F_\eta,\\ &\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\lambda\frac{d\zeta}{dt}=\frac{1}{m}F_\zeta, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\lambda=\lambda(t)$ — известная функция от времени.

Теперь введем подвижную систему координат $\bar{x}\bar{y}\bar{\zeta}M_0$, начало которой лежит в точке M_0, плоскость $\bar{x}M_0\bar{y}$ совпадает с плоскостью $\xi\Omega\eta$, а ось $M_0\bar{x}$ совпадает с вышеупомянутой вращающейся прямой, полагая

$$\xi=\xi_0+\bar{x}\cos\omega t-\bar{y}\sin\omega t,$$
$$\eta=\eta_0+\bar{x}\sin\omega t+\bar{y}\cos\omega t,$$
$$\zeta=\bar{\zeta}.$$

Далее, положим

$$\bar{x}=x-R_1, \quad \bar{y}=y \quad \text{и} \quad \bar{\zeta}=\zeta,$$

где $R_1=M_1M_0$ — расстояние между точками M_1 и M_0.

В относительной системе координат $xy\zeta M_1$ уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}-\lambda\frac{dx}{dt}+2\omega\frac{dy}{dt}+k^2m_1\frac{x}{r_1^3}+k^2m_2\frac{(x-R)}{r_2^3}-\\ &\qquad -\omega^2x+\lambda\omega y+R_1\omega^2=0,\\ &\frac{d^2y}{dt^2}-\lambda\frac{dy}{dt}+2\omega\frac{dx}{dt}+k^2m_1\frac{y}{r_1^3}+k^2m_2\frac{y}{r_2^3}-\\ &\qquad -\omega^2y-\lambda\omega x+\omega\lambda R_1=0,\\ &\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\lambda\frac{d\zeta}{dt}+k^2m_1\frac{\zeta}{r_1^3}+k^2m_2\frac{\zeta}{r_2^3}=0, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$R=M_1M_2, \quad r_1=\sqrt{x^2+y^2+\zeta^2} \quad \text{и} \quad r_2=\sqrt{(x-R)^2+y^2+\zeta^2}. \tag{3}$$

Пользуясь условиями задачи, легко видеть, что

$$\omega^2=\frac{k^2(m_1+m_2)}{R^3} \quad \text{и} \quad R_1\omega^2=\frac{k^2m_2}{R^2}.$$

2. Преобразованные основные уравнения (5)—(7). Полагая

$$r_1=r, \quad r_2=s, \quad r^{-3}=u, \quad s^{-3}=v, \tag{4}$$

для определения x, y, ζ, r, s, u, v, в силу (2), (3) и (4), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}-\lambda\frac{dx}{dt}-2\omega\frac{dy}{dt}+k^2m_1xu+k^2m_2(x-R)v-\omega^2x+\\ &\qquad +\omega\lambda y+\frac{k^2m_2}{R^2}=0,\\ &\frac{d^2y}{dt^2}-\lambda\frac{dy}{dt}+2\omega\frac{dx}{dt}+k^2m_1yu+k^2m_2yv-\omega^2y-\\ &\qquad -\omega\lambda x+\frac{k^2m_2\lambda}{\omega R^2}=0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\lambda\frac{d\zeta}{dt}+k^2m_1\zeta u+k^2m_2\zeta v=0,$$

$$r\frac{du}{dt}+3u\frac{dr}{dt}=0, \qquad s\frac{dv}{dt}+3v\frac{ds}{dt}=0, \tag{6}$$

$$x^2+y^2+\zeta^2=r^2, \qquad (x-R)^2+y^2+\zeta^2=s^2. \tag{7}$$

Пусть при $t=0$ имеем

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0, \quad \zeta(0)=\zeta_0, \quad x'(0)=x_0', \quad y'(0)=y_0', \quad \zeta'(0)=\zeta_0', \tag{8}$$

где $x_0, y_0, \zeta_0, x_0', y_0', \zeta_0'$ — произвольно заданные действительные конечные числа, которые удовлетворяют неравенствам

$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+\zeta_0^2}>0 \quad \text{и} \quad s_0=\sqrt{(x_0-R)^2+y_0^2+\zeta_0^2}>0. \tag{9}$$

Далее, очевидно, имеем

$$u_0=r_0^{-3}>0 \quad \text{и} \quad v_0=s_0^{-3}>0. \tag{10}$$

Требуется определить x, y, ζ, r, s, u, v так, чтобы удовлетворялись дифференциальные уравнения (5)—(6), конечные уравнения (7) и начальные условия (8)—(10).

3. Вывод основных рекуррентных равенств (23)—(27).

Пусть

$$\lambda(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n t^n. \tag{11}$$

Далее, предположим, что

$$|\lambda_n|\leq A_0\frac{H_0^n}{n^\alpha}, \quad n=1,2,\ldots \tag{12}$$

где $A_0>0$, $H_0>0$ и $\alpha>1$ — заданные конечные числа. Очевидно, ряд (11) сходится, если $0\leq t\leq H_0^{-1}$. Теперь положим

$$\begin{aligned} &x=\sum_{n=0}^{\infty}x_nt^n, \quad y=\sum_{n=0}^{\infty}y_nt^n, \quad \zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta_nt^n, \quad r=\sum_{n=0}^{\infty}r_nt^n,\\ &s=\sum_{n=0}^{\infty}s_nt^n, \quad u=\sum_{n=0}^{\infty}u_nt^n, \quad v=\sum_{n=0}^{\infty}v_nt^n, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$x_1 = x_0', \quad y_1 = y_0', \quad z_1 = z_0'. \tag{14}$$

Для определения неизвестных коэффициентов x_n, y_n, z_n, r_n, s_n, u_n, v_n, подставим (11) и (13) в уравнения (5)—(7) и приравним к нулю коэффициенты при t^n, $n=0, 1, 2, \ldots$

Тогда получим следующую рекуррентную систему для определения коэффициентов степенных рядов (13):

$$2x_2 - \lambda_0 x_1 - 2\omega y_1 + k^2 m_1 x_0 u_0 + k^2 m_2 x_0 v_0 - \omega^2 x_0 + \omega\lambda_0 y_0 + \frac{k^2 m_2}{R^2} = 0,$$

$$2y_2 - \lambda_0 y_1 + 2\omega x_1 + k^2 m_1 y_0 u_0 + k^2 m_2 y_0 v_0 - \omega^2 y_0 - \omega\lambda_0 x_0 + \frac{k^2 m_2}{\omega R^2}\lambda_0 = 0, \tag{15}$$

$$2z_2 - \lambda_0 z_1 + k^2 m_1 z_0 u_0 + k^2 m_2 z_0 v_0 = 0,$$

$$r_0 u_1 + 3u_0 r_1 = 0, \qquad s_0 v_1 + 3v_0 s_1 = 0, \tag{16}$$

$$x_0 x_0' + y_0 y_0' + z_0 z_0' - r_0 r_1 = 0, \quad (x_0 - R)x_0' + y_0 y_0' + z_0 z_0' - s_0 s_1 = 0, \tag{17}$$

$$(n+2)(n+1)x_{n+2} - \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\lambda_{n-\nu} x_{\nu+1} - 2\omega(n+1)y_{n+1} +$$
$$+ k^2 m_1 \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu u_{n-\nu} + k^2 m_2 \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu v_{n-\nu} - \omega^2 x_n + \tag{18}$$
$$+ \omega \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_{n-\nu} y_\nu = 0, \qquad n \geqq 1,$$

$$(n+2)(n+1)y_{n+2} - \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\lambda_{n-\nu} y_{\nu+1} + 2\omega(n+1)x_{n+1} +$$
$$+ k^2 m_1 \sum_{\nu=0}^{n} y_\nu u_{n+\nu} + k^2 m_2 \sum_{\nu=0}^{n} y_\nu v_{n-\nu} - \omega^2 y_n - \tag{19}$$
$$- \omega \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_{n-\nu} x_\nu + \frac{k^2 m_2}{\omega R^2}\lambda_n = 0, \qquad n \geqq 1$$

$$(n+2)(n+1)z_{n+2} - \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\lambda_{n-\nu} z^{\nu+1} + k^2 m_1 \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu u_{n-\nu} +$$
$$+ k^2 m_2 \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu v_{n-\nu} = 0, \qquad n \geqq 1 \tag{20}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) r_{n-\nu} u_{\nu+1} + 3\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) u_{n-\nu} r_{\nu+1} = 0, \qquad n \geqq 0$$
$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) s_{n-\nu} v_{\nu+1} + 3\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) v_{n-\nu} s_{\nu+1} = 0. \qquad n \geqq 0 \tag{21}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} x_{n-\nu} x_\nu + \sum_{\nu=0}^{n} y_{n-\nu} y_\nu + \sum_{\nu=0}^{n} z_{n-\nu} z_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} r_{n-\nu} r_\nu, \qquad n \geqq 0 \tag{22}$$
$$s_0^2 = r_0^2 - 2Rx_0 + R^2.$$

Теперь, в силу (8)—(10) и (14), из (15)—(17) определим x_2, y_2, r_1, s_1, u_1, v_1 через начальные значения x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'. Далее, рекуррентные соотношения (18)—(22) представим в следующем виде

$$(n+2)(n+1)x_{n+2} - (n+1)\lambda_0 x_{n+1} - 2\omega(n+1)y_{n+1} + (k^2 m_1 u_0 +$$
$$+ k^2 m_2 v_0 - \omega^2)x_n + \omega\lambda_0 y_n - \lambda_n x_1 + k^2 m_1 x_0 u_n + k^2 m_2 x_0 v_n + \omega\lambda_n y_0 + \tag{23}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} [-(\nu+1)\lambda_{n-\nu} x_{\nu+1} + k^2 m_1 x_\nu u_{n-\nu} + k^2 m_2 x_\nu v_{n-\nu} + \omega\lambda_{n-\nu} y_\nu] = 0, \quad n \geqq 1$$

$$(n+2)(n+1)y_{n+2} - (n+1)\lambda_0 y_{n+1} + 2\omega(n+1)x_{n+1} +$$
$$+ (k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2)y_n - \omega\lambda_0 x_n - \lambda_n y_1 + k^2 m_1 y_0 u_n - \omega\lambda_n x_0 +$$
$$+ k^2 m_2 y_0 v_n + \frac{k^2 m_2}{\omega R^2}\lambda_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} [-(\nu+1)\lambda_{n-\nu} y_{\nu+1} + k^2 m_1 y_\nu u_{n-\nu} + \tag{24}$$
$$+ k^2 m_2 y_\nu v_{n-\nu} - \omega\lambda_{n-\nu} x_\nu] = 0, \qquad n \geqq 1$$

$$(n+2)(n+1)z_{n+2} - (n+1)\lambda_0 z_{n+1} + (k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0)z_n - \lambda_n z_1 +$$
$$+ k^2 m_1 z_0 u_n + k_2 m_2 z_0 v_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} [-(\nu+1)\lambda_{n-\nu} z_{\nu+1} + k^2 m_1 z_\nu u_{n-\nu} + \tag{25}$$
$$+ k^2 m_2 z_\nu v_{n-\nu}] = 0, \qquad n \geqq 1$$

$$2r_0 r_n - 2x_0 x_n - 2y_0 y_n - 2z_0 z_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} (r_{n-\nu} r_\nu - x_{n-\nu} x_\nu -$$
$$- y_{n-\nu} y_\nu - z_{n-\nu} z_\nu) = 0, \qquad n \geqq 2 \tag{26}$$
$$2s_0 s_n - 2r_0 r_n + 2Rx_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} (s_{n-\nu} s_\nu - r_{n-\nu} r_\nu) = 0, \qquad n \geqq 2$$

$$(n+1) r_0 u_{n+1} + 3r_1 u_n + 3(n+1) u_0 r_{n+1} + r_n u_1 +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu+1)(r_{n-\nu} u_{\nu+1} + 3r_{\nu+1} u_{n-\nu}) = 0, \qquad n \geqq 1 \tag{27}$$

$$(n+1)s_0v_{n+1}+3S_1v_n+3(n+1)v_0s_{n+1}+s_nv_1+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(s_{n-\nu}v_{n+1}+3s_{\nu+1}v_{n-\nu})=0, \quad n\geqq 1. \tag{27}$$

4. Вывод основных рекуррентных неравенств (29)—(36). Пусть $H\geqq H_0$—достаточно большое число, нижняя грань которого будет указана ниже.

Докажем, что имеем следующие неравенства:

$$|x_n|\leqq A_1\frac{H^n}{n^\alpha},\quad |y_n|\leqq A_2\frac{H^n}{n^\alpha},\quad |z_n|\leqq A_3\frac{H^n}{n^\alpha},\quad |r_n|\leqq A_4\frac{H^n}{n^\alpha},$$
$$|s_n|\leqq A_5\frac{H^n}{n^\alpha},\quad |u_n|\leqq A_6\frac{H^n}{n^\alpha},\quad |v_n|\leqq A_7\frac{H^n}{n^\alpha},\quad n\geqq 1 \tag{28}$$

где $A_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ — положительные постоянные, нижние грани которых будут указаны ниже.

Для первых нескольких значений индекса n, неравенства (28) удовлетворяются выбирая число H достаточно большим.

Справедливость этих неравенств для любых n устанавливается с помощью принципа математической индукции.

Пусть неравенства (28) справедливы для x_ν, y_ν и z_ν при $\nu=1, 2,\ldots,n+1$ $(n\geqq 1)$, для r_ν и s_ν при $\nu=1, 2,\ldots, n-1$ $(n\geqq 2)$, а для u_ν и v_ν при $\nu=1, 2,\ldots,n$ $(n\geqq 1)$. Докажем их справедливость, соответственно, при $\nu=n+2$, $\nu=n$ и $\nu=n+1$.

Можно показать, что из равенств (23)—(27) следуют неравенства:

$$|x_{n+2}|\leqq(|\lambda_0|A_1+2\omega A_2)\frac{2^\alpha H^{n+1}}{3(n+2)^\alpha}+(|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|A_1+$$
$$+\omega|\lambda_0|A_2+|x_1|A_0+k^2m_1|x_0|A_6+k^2m_2|x_0|A_7+$$
$$+\omega|y_0|A_0)\frac{2^{2\alpha-1}H^n}{3(n+2)^\alpha}+\frac{2^{2\alpha-2}L_\alpha H^{n+1}}{3(n+2)^\alpha}A_0A_1+ \tag{29}$$
$$+(k^2m_1A_1A_6+k^2m_2A_1A_7+\omega A_0A_2)\frac{2^{2\alpha-1}L_\alpha}{3(n+2)^\alpha}H^n,$$

$$|y_{n+2}|\leqq(|\lambda_0|A_2+2\omega A_1)\frac{2^\alpha H^{n+1}}{3(n+2)^\alpha}+\Big(|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|A_2+$$
$$+\omega|\lambda_0|A_1+|y_1|A_0+k^2m_1|y_0|A_6+\omega|x_0|A_0+k^2m_2|y_0|A_7+$$
$$+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}A_0\Big)\frac{2^{2\alpha-1}H^n}{3(n+2)^\alpha}+A_0A_2\frac{2^{2\alpha-2}L_\alpha H^{n+1}}{3(n+2)^\alpha}+ \tag{30}$$
$$+(k^2m_1A_2A_6+k^2m_2A_2A_7+A_0A_1)\frac{2^{\alpha-1}L_\alpha H^n}{3(n+2)^\alpha}.$$

$$|z_{n+2}|\leqq|\lambda_0|A_3\frac{2^\alpha H^{n+1}}{3(n+2)^\alpha}+(k^2m_1u_0+k^2m_2v_0|A_3+|z_1|A_0+$$
$$+k^2m_1|z_0|A_6+k^2m_2|z_0|A_7)\frac{2^{2\alpha-1}H^n}{3(n+2)^\alpha}+A_0A_7\frac{2^{2\alpha-2}L_\alpha H^{n+1}}{3(n+2)^\alpha}+ \tag{31}$$
$$+(k^2m_1A_3A_6+k^2m_2A_3A_7+A_0A_1)\frac{2^{\alpha-1}L_\alpha H^n}{3(n+2)^\alpha},$$

$$|r_n|\leqq\left[\frac{1}{r_0}(|x_0|A_1+|y_0|A_2+|z_0|A_3)+\frac{L_\alpha}{2r_0}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)\right]\frac{H^n}{n^\alpha}, \tag{32}$$
$$|s_n|\leqq\frac{r_0}{s_0}|r_n|+\left[\frac{R}{s_0}A_1+\frac{L_\alpha}{2s_0}(A_4^2+A_5^2)\right]\frac{H^n}{n^\alpha}, \tag{33}$$

$$|u_{n+1}|\leqq\frac{1}{r_0}(3|r_1|A_6+|u_1|A_4)\frac{2^{\alpha-1}H^n}{(n+1)^\alpha}+\frac{3|u_0|}{r_0}A_4\frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha}+$$
$$+\frac{2^\alpha L_\alpha A_4A_6H^{n+1}}{r_0(n+1)^\alpha}, \tag{34}$$

$$|v_{n+1}|\leqq\frac{1}{s_0}(3|s_1|A_7+|v_1|A_5)\frac{2^{\alpha-1}H^n}{(n+1)^\alpha}+$$
$$+\frac{3|v_0|}{s_0}A_5\frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha}+\frac{2^\alpha L_\alpha A_5A_7H^{n+1}}{s_0(n+1)^\alpha}, \tag{35}$$

где

$$L_\alpha=\frac{2^\alpha(3\alpha-1)}{\alpha-1}.$$

5. Вывод основных неравенств для коэффициентов (28). Легко видеть, что для доказательства справедливости неравенств (28), следует доказать существование положительных постоянных H, $A_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\frac{2^\alpha}{3H}(|\lambda_0|A_1+2\omega A_2+2^{\alpha-2}L_\alpha A_0A_1)+\frac{2^{2\alpha-1}}{3H^2}\Big[|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|A_1+$$
$$+\omega|\lambda_0|A_2+|x_1|A_0+k^2m_1|x_0|A_6+k^2m_2|x_0|A_7+\omega|y_0|A_0+ \tag{36}$$
$$+L_\alpha(k^2m_1A_1A_6+k^2m_2A_1A_7+\omega A_0A_2)\Big]\leqq A_1,$$

$$\frac{2^\alpha}{3H}(|\lambda_0|A_2+2\omega A_1+2^{\alpha-2}L_\alpha A_0A_2)+\frac{2^{2\alpha-1}}{3H^2}\Big[|k^2m_1u_0+$$
$$+k^2m_2v_0-\omega^2|A_2+\omega|\lambda_0|A_1+|y_1|A_0+k^2m_1|y_0|A_6+$$
$$+\omega|x_0|A_0+k^2m_2|y_0|A_6+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}A_0+ \tag{37}$$
$$+L_\alpha(k^2m_1A_2A_6+k^2m_2A_2A_7+A_0A_1)\Big]\leqq A_2,$$

$$\frac{2^{\alpha}}{3H}\left(|\lambda_0|A_3+2^{\alpha-2}L_{\alpha}A_0A_3\right)+\frac{2^{2\alpha-1}}{3H^2}\Big[|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0|A_3+$$

$$+|z_1|A_0+k^2m_1|z_0|A_6+k^2m_2|z_0|A_7+ \tag{38}$$

$$+L_{\alpha}(k^2m_1A_3A_6+k^2m_2A_3A_7)\Big]\leqq A_3,$$

$$\frac{1}{r_0}(|x_0|A_1+|y_0|A_2+|z_0|A_3)+\frac{L_{\alpha}}{2r_0}(A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2)\leqq A_4, \tag{39}$$

$$\frac{1}{s_0}(|x_0|A_1+|y_0|A_2+|z_0|A_3+RA_1)+\frac{L_{\alpha}}{2s_0}(A_1^2+A_2^2+$$

$$+A_3^2+2A_4^2+A_5^2)\leqq A_5, \tag{40}$$

$$\frac{3|u_0|}{r_0}A_4+\frac{2^{\alpha}L_{\alpha}}{r_0}A_4A_6+\frac{2^{\alpha-1}}{r_0H}(3|r_1|A_6+|u_1|A_4)\leqq A_6, \tag{41}$$

$$\frac{3|v_0|}{s_0}A_5+\frac{2^{\alpha}L_{\alpha}}{s_0}A_5A_7+\frac{2^{\alpha-1}}{s_0H}(3|s_1|A_7+|v_1|A_5)\leqq A_7. \tag{42}$$

Положительные числа A_6, A_7, H_0' и H_0'' выберем совершенно произвольно, причем будем считать, что

$$H_0'>3\cdot 2^{\alpha-1}\frac{|r_1|}{r_0} \quad \text{и} \quad H_0''>3\cdot 2_{\alpha}^{-1}\frac{|s_1|}{s_0}.$$

Положительное число A_5 выберем так, чтобы было

$$A_5<\min\left\{\frac{2s_0}{L_{\alpha}}, \quad \frac{A_7(s_0H_0''-3\cdot 2^{\alpha-1}|s_1|)}{H_0''(2^{\alpha}L_{\alpha}A_7+3|v_0|)+2^{\alpha-1}|v_1|}\right\}. \tag{43}$$

После этого выбираем положительное число A_4 настолько малым, чтобы было

$$A_4<\min\left\{\frac{2r_0}{L_{\alpha}}, \quad \sqrt{A_5\left(\frac{s_0}{L_{\alpha}}-\frac{1}{2}A_5\right)},\right.$$

$$\left.\frac{A_6(r_0H_0'-3\cdot 2^{\alpha-1}\cdot|r_1|}{H_0'(2^{\alpha}L_{\alpha}A_5+3|u_0|)+2^{\alpha-1}|u_1|}\right\}. \tag{44}$$

Фиксируя A_4, положительные числа A_1, A_2, A_3 возьмем настолько малыми, чтобы удовлетворялись неравенства:

$$|x_0|A_1+|y_0|A_2+|z_0|A_3+\frac{1}{2}L_{\alpha}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)\leqq A_4\left(r_0-\frac{L_{\alpha}}{2}A_4\right), \tag{45}$$

$$(R+|x_0|)A_1+|y_0|A_2+|z_0|A_3+\frac{L_{\alpha}}{2}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)\leqq$$

$$\leqq A_5s_0-\frac{L_{\alpha}}{2}(2A_4^2+A_5^2). \tag{46}$$

Наконец, положим

$$H_1=\frac{2^{\alpha}}{3}\left(|\lambda_0|+2\omega\frac{A_2}{A_1}+2^{\alpha-2}L_{\alpha}A_1\right)+\frac{2^{2\alpha-1}}{3}\Big[|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|+$$

$$+\omega|\lambda_0|\frac{A_2}{A_1}+|x_1|\frac{A_0}{A_1}+k^2m_1|x_0|\frac{A_6}{A_1}+k_2m_2|x_0|\frac{A_7'}{A_1}\omega+ \tag{47}$$

$$+|y_0|\frac{A_0}{A_1}+L_{\alpha}\left(k^2m_1A_6+k^2m_2A_7+\omega\frac{A_0A_2}{A_1}\right)\Big],$$

$$H_2=\frac{2^{\alpha}}{3}\left(|\lambda_0|+2\omega\frac{A_1}{A_2}+2^{\alpha-2}L_{\alpha}A_0\right)+\frac{2^{2\alpha-1}}{3}\Big[|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|+$$

$$+\omega|\lambda_0|\frac{A_1}{A_2}+|y_1|\frac{A_0}{A_2}+k^2m_1|y_0|\frac{A_6}{A_2}+\omega|x_0|\frac{A_0}{A_2}+ \tag{48}$$

$$+k^2m_2|y_0|\frac{A_7}{A_2}+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}\frac{A_0}{A_2}+L_{\alpha}\left(k^2m_1A_6+k^2m_2A_7+\frac{A_0A_1}{A_2}\right)\Big],$$

$$H^*=\max\{1,\ H_0,\ H_0',H_0'',\ H_1,\ H_2\}, \tag{49}$$

$$H\geqq H^*. \tag{50}$$

Если положительные числа $A_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ и H удовлетворяют условиям (44)—(47) и (51), то, как легко видеть, справедливы все неравенства (37)—(43).

Таким образом справедливость неравенств (28) установлена для любых $n=1, 2, 3, \ldots$.

6. Доказательство сходимости рядов (13) и оценка их остатков. Теперь допустим, что

$$0\leqq t\leqq\frac{1}{H^*}. \tag{51}$$

Тогда из (28), полагая $H=H^*$, следует, например, что

$$|x_n|t^n\leqq A_1\left(\frac{H^*}{H^*}\right)^n\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{A_1}{n^{\alpha}}$$

и сходимость первого из рядов (13) очевидна, ибо по условию $\alpha>1$.

Аналогично доказывается сходимость остальных из рядов (13).

Пусть

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n}x_kt^k+R_n(t).$$

Тогда, очевидно, что для остатка $R_n(t)$ получим оценку

$$|R_n(t)|\leqq\frac{A_1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}, \qquad n=1, 2, \ldots$$

равномерно при

$$0\leqq t\leqq\frac{1}{H^*}.$$

Аналогичные оценки получаются для остальных рядов (13).

Январь, 1960.

Кафедра астрономии Тбилисского государственного университета.

ON THE RESTRICTED SPACE PROBLEM OF THREE BODIES, WHEN THE MASS OF THE ATTRACTED BODY IS A GIVEN FUNCTION OF TIME

N. G. MAGNARADZE

ЛИТЕРАТУРА

1. Магнарадзе Н. Г., Об ограниченной задаче трех тел, когда притягиваемое тело имеет переменную массу, Бюлл. Абастуман. астрофиз. обс., 1959, № 24, 145—159.
2. Мещерский И. В., Работы по механике тел переменной массы, М., 1952.
3. Космодемьянский А. А., Курс теоретической механики, М., 1955.

შინაარსი—СОДЕРЖАНИЕ