

3. Паренаго П. П. Исследование пространственных скоростей звезд. Труды ГАИШ, 1951, **20**, 26–68.
4. Дзигвавиани Р. М. Изучение галактических орбит и некоторые закономерности в движении звезд. Бюлл. Абастуман. астрофиз. обс., 1955, **18**, 115–179.
5. Паренаго П. П. О гравитационном потенциале Галактики. II. Астрон., ж. 1952, **29**, 245–287.
6. Паренаго П. П. Курс звездной астрономии. 3-е изд., 1954, 388–389.

### ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ, КОГДА ПРИТЯГИВАЕМОЕ ТЕЛО ИМЕЕТ ПЕРЕМЕННУЮ МАССУ

Н. Г. МАГНАРАДЗЕ

**Введение.** Рассмотрим задачу трех тел в том случае, когда их движение происходит на некоторой заданной плоскости, при этом двое из них  $M_1$  и  $M_2$ , имеющие постоянные массы  $m_1$  и  $m_2$ , притягивают по закону притяжения Ньютона третье тело  $M$ , имеющее переменную массу  $m$ . Мы предположим, что  $M_2$  движется относительно  $M_1$  по кеплерову закону, а массу  $m$  будем считать настолько малой, что тела  $M_1$  и  $M_2$  не подвергаются притяжению телом  $M$ . Заданную фиксированную плоскость мы примем за координатную плоскость с абсолютной системой координат  $\xi\Omega\eta$ .

На этой плоскости выберем подвижную систему координат  $xOy$ , начало которой  $O$  совпадает с  $M_1$ , а ось  $Ox$  проходит через  $M_2$ .

Пусть

$$M_1 M_2 = R \text{ и } Ox, \Omega\xi = \varphi.$$

Величины  $R$  и  $\varphi$  являются заданными функциями от времени  $t$ :

$$R=R(t) \text{ и } \varphi=\varphi(t). \quad (1)$$

Требуется изучить движение точки  $M$  относительно подвижной системы координат  $xOy$ .

В том случае, когда масса  $m$  постоянна, расстояние  $R$  постоянно, а  $\varphi=\omega t + \varphi_0$  (ось  $Ox$  с угловой скоростью  $\omega$  равномерно вращается около точки  $M_1$ ). Эта задача недавно была рассмотрена Стеффенсоном [1]. Для точки  $M(x, y)$  им построены степенные координат  $x$  и  $y$  движущейся точки  $M(x, y)$  им построены степенные ряды по времени  $t$  и доказана их сходимость для достаточно малых значений  $t$ . Для определения коэффициентов разложений ему удалось построить рекуррентные соотношения, удобные для их вычисления современными вычислительными машинами.

В работе [2] мы исследовали ту же самую задачу в том случае, когда масса  $m$  является заданной функцией от времени,  $R=\text{пост.}$  и  $\varphi=\omega t + \varphi_0$ .

В настоящей работе мы исследуем эту задачу в том случае, когда масса  $m$  и величина (1) являются заданными аналитическими функциями от времени  $t$ .

Пользуясь схемами, предложенными в работах [1] и [2], и в этом общем случае удается построить рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения неизвестных величин, удобные для их вычисления вычислительными машинами.

### 1. Вывод основных дифференциальных уравнений

Как и в работе [2], в основу нашего исследования мы положим уравнение И. В. Мещерского [3]:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2, \quad (2)$$

где масса  $m=m(t)$ —заданная функция от времени  $t$ ,  $\vec{v}$ —скорость точки,  $\vec{F}$ —равнодействующая внешних сил, приложенных к точке,  $\vec{\Phi}_1$ —реактивная сила, обусловленная отдалением частиц, а  $\vec{\Phi}_2$ —тормозящая сила, обусловленная присоединением частиц к движущейся точке.

Как хорошо известно,

$$\vec{\Phi}_1 = \frac{d\mu_1}{dt} (\vec{u}_1 - \vec{v}), \quad \vec{\Phi}_2 = \frac{d\mu_2}{dt} (\vec{u}_2 - \vec{v}), \quad (3)$$

где  $\mu_1=\mu_1(t)$  и  $\mu_2=\mu_2(t)$  суть массы частиц, соответственно, отделившихся и присоединившихся к движущейся точке за промежуток времени  $t-t_0$  от начального момента  $t_0$ , а  $\vec{u}_1-\vec{v}$  и  $\vec{u}_2-\vec{v}$  суть относительные скорости, соответственно, отделяющихся и присоединяющихся частиц.

Очевидно, что

$$m(t) = \mu_0 + \mu_1(t) + \mu_2(t),$$

где  $\mu_0$ —масса движущейся точки в начальный момент  $t=t_0$ . Предположим, что векторы  $\vec{u}_1-\vec{v}$  и  $\vec{u}_2-\vec{v}$  коллинеарны вектору скорости  $\vec{v}$ :

$$\vec{u}_1 - \vec{v} = \lambda_1(t) \vec{v} \quad \text{и} \quad \vec{u}_2 - \vec{v} = \lambda_2(t) \vec{v}, \quad (4)$$

где  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$ —заданные функции от времени  $t$  (гипотеза К. Э. Циolkовского).

Из (2), (3) и (4), очевидно, следует, что

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F} + \lambda \vec{v}, \quad (5)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{m} \left( \lambda_1 - \frac{d\mu_1}{dt} + \lambda_2 - \frac{d\mu_2}{dt} \right).$$

Из векторного равенства (5) имеем:

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} - \lambda \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{m} F_\xi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} - \lambda \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{m} F_\eta, \end{cases} \quad (6)$$

где  $F_\xi$  и  $F_\eta$  суть проекции силы  $\vec{F}$ , соответственно, на осях  $\Omega\xi$  и  $\Omega\eta$ .

Предположим теперь, что точка  $M(\xi, \eta)$  притягивается по закону Ньютона двумя точками  $M_1(\xi_1, \eta_1)$  и  $M_2(\xi_2, \eta_2)$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} F_\xi &= -k^2 m m_1 \frac{(\xi - \xi_1)}{r_1^3} - k^2 m m_2 \frac{(\xi - \xi_2)}{r_2^3}, \\ F_\eta &= -k^2 m m_1 \frac{(\eta - \eta_1)}{r_1^3} - k^2 m m_2 \frac{(\eta - \eta_2)}{r_2^3}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$r_1 = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2}. \quad (8)$$

Далее, положим

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 + x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ \eta = \eta_1 + x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases} \quad (9)$$

В силу (7), (8) и (9), уравнения движения (6) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \lambda \frac{dx}{dt} - 2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dy}{dt} - \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 x - \left( \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \lambda \frac{d\varphi}{dt} \right) y + \\ + k^2 m_1 \frac{x}{r_1^3} + k^2 m_2 \frac{(x-R)}{r_2^3} = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \lambda \frac{dy}{dt} + 2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dx}{dt} - \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 y + \left( \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \lambda \frac{d\varphi}{dt} \right) x + \\ + k^2 m_1 \frac{y}{r_1^3} + k^2 m_2 \frac{y}{r_2^3} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где теперь

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(x-R)^2 + y^2}. \quad (11)$$

### 2. Преобразованные основные уравнения

Вводя обозначения

$$r_1 = r, \quad r_2 = s, \quad r^{-3} = u, \quad s^{-3} = v, \quad (12)$$

для определения  $x$ ,  $y$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $v$ , в силу (10), (11) и (12), получаем систему уравнений:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda \frac{dx}{dt} - 2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dy}{dt} - \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 x - \left( \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \lambda \frac{d\varphi}{dt} \right) y + k^2 m_1 x u + k^2 m_2 (x-R) v = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \lambda \frac{dy}{dt} + 2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dx}{dt} - \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 y + \left( \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \lambda \frac{d\varphi}{dt} \right) x + k^2 m_1 y u + k^2 m_2 y v = 0, \quad (14)$$

$$\begin{cases} r \frac{du}{dt} + 3u \frac{dr}{dt} = 0, \\ s \frac{dv}{dt} + 3v \frac{ds}{dt} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ (x-R)^2 + y^2 = s^2. \end{cases} \quad (15)$$

Предположим, что при  $t=t_0=0$  имеем

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0, \quad x'(0)=x'_0, \quad y'(0)=y'_0, \quad (16)$$

где  $x_0, y_0, x'_0$  и  $y'_0$ —произвольно заданные конечные числа, удовлетворяющие условиям:

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} > 0 \quad \text{и} \quad s_0 = \sqrt{(x_0 - R)^2 + y_0^2} > 0. \quad (17)$$

Из (12) имеем, что

$$u_0 = r_0^{-3} > 0 \quad \text{и} \quad v_0 = s_0^{-3} > 0. \quad (18)$$

Теперь мы должны определить  $x, y, r, s, u, v$  как функции от  $t$  так, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям (13)–(14), конечным уравнениям (15) и начальными условиям (16).

### 3. Вывод основных рекуррентных равенств

Пусть

$$\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n, \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n t^n, \quad R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n t^n. \quad (19)$$

Мы будем предполагать, что

$$|\lambda_n| \leq A_0 \frac{H_0^n}{n^z}, \quad |\varphi_n| \leq B_0 \frac{H_0^n}{n^z}, \quad |R_n| \leq C_0 \frac{H_0^n}{n^z}, \quad (20)$$

где  $A_0 > 0, B_0 > 0, C_0 > 0, H_0 > 0$  и  $z > 1$ —заданные конечные числа, а  $n=1, 2, \dots$

Очевидно, что степенные ряды (19) сходятся при  $0 \leq t \leq H_0^{-1}$ .

Для определения  $x, y, r, s, u, v$  положим

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n, & y &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n, \\ r &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n, & s &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n, \\ u &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n, & v &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$x_1 = x'_0 \quad \text{и} \quad y_1 = y'_0. \quad (22)$$

Подставляя (19) и (21) в уравнения (13)–(15) и приравнивая к нулю коэффициенты при  $t^n, n=0, 1, 2, \dots$ , получим следующую рекуррентную систему для определения коэффициентов степенных рядов (21):

$$2x_1 - \lambda_0 x_1 - 2\varphi_1 y_1 - \varphi_1^2 v_0 - (2\varphi_2 - \lambda_0 \varphi_1) y_0 + k^2 m_1 x_0 u_0 + k^2 m_2 (x_0 - R_0) v_0 = 0, \quad (23)$$

$$2y_1 - \lambda_0 y_1 + 2\varphi_1 x_1 - \varphi_1^2 y_0 + (2\varphi_2 - \lambda_0 \varphi_1) x_0 + k^2 m_1 y_0 u_0 + k^2 m_2 y_0 v_0 = 0,$$

$$r_0 u_1 + 3u_0 r_1 = 0,$$

$$s_0 v_1 + 3v_0 s_1 = 0, \quad (24)$$

Об одном случае ограниченной задачи трех тел...

$$\begin{aligned} x_0 x_1 + y_0 y_1 - r_0 r_1 &= 0, \\ (x_0 - R_0)(x_1 - R_1) + y_0 y_1 - s_0 s_1 &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$(n+2)(n+1)x_{n+2} - \sum_{v=0}^n (\gamma+1)\lambda_{n-v} x_{v+1} - 2 \sum_{v=0}^n (\gamma+1)(n+$$

$$+1-\gamma)\varphi_{n+1-\gamma} y_{v+1} - \sum_{v=0}^n \bar{\varphi}_{n-v} x_v - \sum_{v=0}^n (n+2-\gamma)(n+1-\gamma)\varphi_{n+2-\gamma} y_v +$$

$$+ \sum_{v=0}^n \bar{\lambda}_{n-v} y_v + k^2 m_1 \sum_{v=0}^n u_{n-v} x_v + k^2 m_2 \sum_{v=0}^n v_{n-v} x_v -$$

$$- k^2 m_2 \sum_{v=0}^n R_v v_{n-v} = 0, \quad n \geq 1.$$

$$(n+2)(n+1)y_{n+2} - \sum_{v=0}^n (\gamma+1)\lambda_{n-v} y_{v+1} + 2 \sum_{v=0}^n (\gamma+1)(n+$$

$$+1-\gamma)\varphi_{n+1-\gamma} x_{v+1} - \sum_{v=0}^n \bar{\varphi}_{n-v} y_v + \sum_{v=0}^n (n+2-\gamma)(n+1-\gamma)$$

$$- \gamma)\varphi_{n+2-\gamma} x_v - \sum_{v=0}^n \bar{\lambda}_{n-v} x_v + k^2 m_1 \sum_{v=0}^n u_{n-v} y_v + k^2 m_2 \sum_{v=0}^n v_{n-v} y_v = 0, \quad n \geq 1$$

$$\sum_{v=0}^n (\gamma+1)r_{n-v} u_{v+1} + 3 \sum_{v=0}^n (\gamma+1)u_{n-v} r_{v+1} = 0, \quad n \geq 2$$

$$\sum_{v=0}^n (\gamma+1)s_{n-v} v_{v+1} + 3 \sum_{v=0}^n (\gamma+1)v_{n-v} s_{v+1} = 0, \quad n \geq 2$$

$$\sum_{v=0}^n x_{n-v} x_v + \sum_{v=0}^n y_{n-v} y_v = \sum_{v=0}^n r_{n-v} r_v, \quad n \geq 1$$

$$\sum_{v=0}^n (x_{n-v} - R_{n-v})(x_v - R_v) + \sum_{v=0}^n y_{n-v} y_v = \sum_{v=0}^n s_{n-v} s_v, \quad n \geq 1$$

при этом

$$\bar{\lambda}_n = \sum_{v=0}^n (\gamma+1)\varphi_{v+1}\lambda_{n-v} \quad \text{и} \quad \bar{\varphi}_n = \sum_{v=0}^n (\gamma+1)(n+1-\gamma)\varphi_{v+1}\varphi_{n+1-\gamma}. \quad (30)$$

Пользуясь равенствами (16), (17), (18) и (22) из (23)–(25) однозначно определяем  $x_1, y_1, r_1, s_1, u_1$  и  $v_1$  через начальные значения  $x_0, y_0, x'_0$  и  $y'_0$ .

Рекуррентные соотношения (26), (27), (28) и (29) представим в следующей форме:-

$$(n+2)(n+1)x_{n+2} - \lambda_n x_1 - (n+1)\lambda_0 x_{n+1} = 2(n+1)\varphi_{n+1}y_1 - 2(n+1)\varphi_1 y_{n+1} - \bar{\varphi}_n x_0 - \bar{\varphi}_0 x_n - (n+2)(n+1)\varphi_{n+2}y_0 - 2\varphi_2 y_n + \bar{\lambda}_n y_0 + \bar{\lambda}_0 y_n + k^2 m_1 u_n v_0 + k^2 m_1 u_0 v_n + k^2 m_2 v_n x_0 + k^2 m_2 v_0 x_n - k^2 m_2 R_0 v_n - k^2 m_2 R_n v_0 + \sum_{v=1}^{n-1} [-(\gamma+1)\lambda_{n-v} x_{v+1} - 2(\gamma+1)(n+1-\gamma)\varphi_{n+1-v} y_v +$$
(31)

$$+ \bar{\lambda}_{n-v} y_v + k^2 m_1 u_{n-v} x_v + k^2 m_2 v_{n-v} x_v - k^2 m_2 R_v v_{n-v}] = 0, \quad n \geq 1$$

$$(n+2)(n+1)y_{n+2} - \lambda_n y_1 - (n+1)\lambda_0 y_{n+1} + 2(n+1)\varphi_{n+1}x_1 + 2(n+1)\varphi_1 x_{n+1} - \bar{\varphi}_n y_0 - \bar{\varphi}_0 y_n + (n+2)(n+1)\varphi_{n+2}x_0 + 2\varphi_2 x_n - \bar{\lambda}_n x_0 - \bar{\lambda}_0 x_n + k^2 m_1 u_n y_0 + k^2 m_1 u_0 y_n + k^2 m_2 v_n y_0 + k^2 m_2 v_0 y_n + \sum_{v=1}^{n-1} [-(\gamma+1)\lambda_{n-v} y_{v+1} + 2(\gamma+1)(n+1-\gamma)\varphi_{n+1-v} x_{v+1} - \bar{\varphi}_{n-v} y_v + (n+2-\gamma)(n+1-\gamma)\varphi_{n+2-v} x_v - \bar{\lambda}_{n-v} x_v + + k^2 m_1 u_{n-v} y_v + k^2 m_2 v_{n-v} y_v] = 0, \quad n \geq 1$$
(32)

$$2r_0 r_n - 2x_0 x_n - 2y_0 y_n + \sum_{v=0}^{n-1} (r_{n-v} r_v - x_{n-v} x_v - y_{n-v} y_v) = 0, \quad n \geq 2$$

$$2s_0 s_n - 2r_0 r_n + 2R_0 x_0 + 2R_0 x_n - 2R_0 R_n + \sum_{v=1}^{n-1} (s_{n-v} s_v - r_{n-v} r_v + 2R_{n-v} x_v - R_v R_{n-v}) = 0, \quad n \geq 2$$
(33)

$$(n+1)r_0 u_{n+1} + 3r_1 u_n + 3(n+1)u_0 r_{n+1} + r_n u_1 + \sum_{v=1}^{n-1} (\gamma+1)(r_{n-v} u_{v+1} + 3r_{v+1} u_{n-v}) = 0, \quad n \geq 1$$
(34)

$$(n+1)s_0 v_{n+1} + 3s_1 v_n + 3(n+1)v_0 s_{n+1} + s_n v_1 + \sum_{v=1}^{n-1} (\gamma+1)(s_{n-v} v_{v+1} + 3s_{v+1} v_{n-v}) = 0 \quad n \geq 1.$$

#### 4. Вывод основных рекуррентных неравенств

Пусть  $H > H_0$  — достаточно большое число, нижняя граница которого будет уточнена ниже.

Докажем, что если  $\lambda_n, \varphi_n$  и  $R_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) удовлетворяют условиям (20), то имеет место неравенства

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq A_1 \frac{H^n}{n^\alpha}, & |y_n| &\leq A_2 \frac{H^n}{n^\alpha}, \\ |r_n| &\leq A_3 \frac{H^n}{n^\alpha}, & |s_n| &\leq A_4 \frac{H^n}{n^\alpha}, \\ |u_n| &\leq A_5 \frac{H^n}{n^\alpha}, & |v_n| &\leq A_6 \frac{H^n}{n^\alpha}, \end{aligned} \quad n=1, 2, \dots, \quad (35)$$

где  $A_i, i=1, 2, 3, 4, 5, 6$  — положительные постоянные, границы которых будут также уточнены ниже.

Выбрав  $H$  достаточно большим, неравенства (35), очевидно, можно удовлетворить для первых нескольких значений  $n$ . Теперь пользуясь принципом математической индукции, докажем справедливость неравенств (35) для любых  $n \geq 1$ . С этой целью допустим справедливость неравенств (35) для  $x_v$  и  $y_v$  при  $v=1, 2, \dots, n+1$  ( $n \geq 1$ ), для  $r_v$  и  $s_v$  при  $v=1, 2, \dots, n-1$  ( $n \geq 2$ ), а для  $u_v$  и  $v_v$  при  $v=1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 1$ ), и докажем их справедливость, соответственно, для  $v=n+2$ ,  $v=n$  и  $v=n+1$ .

Из (31) — (34), в силу (20) и (35), имеем

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)|x_{n+2}| &\leq |x_1|A_0 \frac{H_0^n}{n^\alpha} + (n+1)|\lambda_0|A_1 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha} + \\ &+ 2(n+1)|y_1|B_0 \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^\alpha} + 2(n+1)|\varphi_1|A_2 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha} + |y_0| |\bar{\varphi}_n| + \\ &+ |\bar{\varphi}_0|A_1 \frac{H^n}{n^\alpha} + (n+2)(n+1)|y_0|B_0 \frac{H_0^{n+2}}{(n+2)^\alpha} + 2|\varphi_2|A_2 \frac{H^n}{n^\alpha} + \\ &+ |y_1| |\bar{\lambda}_n| + |\bar{\lambda}_0| \frac{A_3 H^n}{n^\alpha} + k^2 m_1 |x_0| A_5 \frac{H^n}{n^\alpha} + k^2 m_1 |u_0| A_1 \frac{H^n}{n^\alpha} + \\ &+ k^2 m_2 |x_0| A_6 \frac{H^n}{n^\alpha} + k^2 m_2 |v_0| A_1 \frac{H^n}{n^\alpha} + k^2 m_2 |R_0| A_0 \frac{H^n}{n^\alpha} + \\ &+ k^2 m_2 |v_0| C_0 \frac{H^n}{n^\alpha} + \sum_{v=1}^{n-1} \left[ (\gamma+1)A_0 \frac{H_0^{n-v}}{(n-v)^\alpha} A_1 \frac{H^{v+1}}{(v+1)^\alpha} + \right. \\ &+ 2(\gamma+1)(n+1-v)B_0 \frac{H_0^{n-v+1}}{(n-v+1)^\alpha} A_2 \frac{H^{v+1}}{(v+1)^\alpha} + \\ &+ |\bar{\varphi}_{n-v}| A_1 \frac{H^v}{v^\alpha} + (n+2-v)(n+1-v)B_0 \frac{H_0^{n+2-v}}{(n+2-v)^\alpha} A_3 \frac{H^v}{v^\alpha} + \\ &+ |\bar{\lambda}_{n-v}| A_2 \frac{H^v}{v^\alpha} + k^2 m_1 A_5 \frac{H^{n-v}}{(n-v)^\alpha} A_1 \frac{H^v}{v^\alpha} + k^2 m_2 A_6 \frac{H^{n-v}}{(n-v)^\alpha} A_1 \frac{H^v}{v^\alpha} + \\ &\left. + k^2 m_2 C_0 \frac{H_0^{n-v}}{(n-v)^\alpha} A_6 \frac{H^{n-v}}{(n-v)^\alpha} \right], \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+1)|y_{n+1}| &\leq A_0 \frac{H_0^n}{n^\alpha} |y_1| + (n+1) |\lambda_0| A_3 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha} + \\
&+ 2(n+1) |x_1| B_0 \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^\alpha} + 2(n+1) |\varphi_1| A_1 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha} + \\
&+ |\bar{\varphi}_n| |y_0| + |\bar{\varphi}_0| A_2 \frac{H^n}{n^\alpha} + (n+2)(n+1) |x_0| B_0 \frac{H_0^{n+2}}{(n+2)^\alpha} + \\
&+ 2|\varphi_2| A_1 \frac{H^n}{n^\alpha} + |x_0| |\bar{\lambda}_n| + |\bar{\lambda}_0| A_1 \frac{H^n}{n^\alpha} + k^2 m_1 |y_0| A_5 \frac{H^n}{n^\alpha} + \\
&+ k^2 m_1 |u_0| A_2 \frac{H^n}{n^\alpha} + k^2 m_2 |y_0| A_6 \frac{H^n}{n^\alpha} + k^2 m_2 |v_0| A_2 \frac{H^n}{n^\alpha} + \\
&+ \sum_{v=1}^{n-1} \left[ (v+1) A_0 \frac{H_0^{n-v}}{(n-v)^\alpha} A_3 \frac{H^{v+1}}{(v+1)^\alpha} + \right. \\
&+ 2(v+1)(n+1-v) B_0 \frac{H_0^{n+1-v}}{(n+1-v)^\alpha} A_1 \frac{H^{v+1}}{(v+1)^\alpha} + \\
&+ |\bar{\varphi}_{n-v}| A_2 \frac{H^v}{v^\alpha} + (n+2-v)(n+1-v) B_0 \frac{H_0^{n+2-v}}{(n+2-v)^\alpha} A_1 \frac{H^v}{v^\alpha} + \\
&+ |\bar{\lambda}_{n-v}| A_1 \frac{H^v}{v^\alpha} + k^2 m_1 A_5 \frac{H^{n-v}}{(n-v)^\alpha} A_2 \frac{H^v}{v^\alpha} + \\
&\left. + k^2 m_2 A_6 \frac{H^{n-v}}{(n-v)^\alpha} A_2 \frac{H^v}{v^\alpha} \right], \quad n \geq 1. \tag{37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2r_0|r_n| &\leq 2|x_0| A_1 \frac{H^n}{n^\alpha} + 2|y_0| A_2 \frac{H^n}{n^\alpha} + \sum_{v=1}^{n-1} \left[ A_0^2 \frac{H^{n-v}}{(n-v)^\alpha} \frac{H^v}{v^\alpha} + \right. \\
&\left. + A_1^2 \frac{H^{n-v} H^v}{(n-v)^\alpha v^\alpha} + A_2^2 \frac{H^{n-v} H^v}{(n-v)^\alpha v^\alpha} \right], \quad n \geq 2 \tag{38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2s_0|s_n| &\leq 2r_0|r_n| + 2|x_0| C_0 \frac{H_0^n}{n^\alpha} + 2|R_0| A_1 \frac{H^n}{n^\alpha} + 2|R_0| C_0 \frac{H_0^n}{n^\alpha} + \\
&+ \sum_{v=1}^{n-1} \left( A_0^2 \frac{H^n}{(n-v)^\alpha v^\alpha} + A_1^2 \frac{H^n}{(n-v)^\alpha v^\alpha} + 2C_0 \frac{H_0^{n-v}}{(n-v)^\alpha} A_1 \frac{H^v}{v^\alpha} + \right. \\
&\left. + C_0^2 \frac{H_0^n}{(n-v)^\alpha v^\alpha} \right), \quad n \geq 2 \tag{39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+1)r_0|u_{n+1}| &\leq 3|r_1| A_5 \frac{H^n}{n^\alpha} + 3(n+1) |u_0| A_3 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha} + \\
&+ |u_1| A_3 \frac{H^n}{n^\alpha} + \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) \left[ A_3 \frac{H^{n-v}}{(n-v)^\alpha} A_5 \frac{H^{v+1}}{(v+1)^\alpha} + \right. \\
&\left. + 3A_3 \frac{H^{v+1}}{(v+1)^\alpha} A_5 \frac{H^{n-v}}{(n-v)^\alpha} \right], \quad n \geq 1 \tag{40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+1)s_0|v_{n+1}| &\leq 3|\varphi_1| A_6 \frac{H^n}{n^\alpha} + 3(n+1) |v_0| A_4 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha} + \\
&+ |v_1| A_4 \frac{H^n}{n^\alpha} + \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) \left[ A_4 \frac{H^{n-v}}{(n-v)^\alpha} A_6 \frac{H^{v+1}}{(v+1)^\alpha} + \right. \\
&\left. + 3A_4 \frac{H^{v+1}}{(v+1)^\alpha} A_6 \frac{H^{n-v}}{(n-v)^\alpha} \right], \quad n \geq 1. \tag{41}
\end{aligned}$$

## 5. Преобразование основных рекуррентных неравенств

Теперь мы упростим неравенства (36)–(41). С этой целью введем две суммы:

$$s_n = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v^\alpha (n-v)^\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad n \geq 2 \tag{42}$$

$$\sigma_n = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v}{v^\alpha (n-v)^\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad n \geq 2. \tag{43}$$

Легко показать (см., например, [2]), что

$$s_n < \frac{L_\alpha}{n^2} \tag{44}$$

и

$$\sigma_n < \frac{L_\alpha}{2} \frac{1}{n^{2-\alpha}}, \tag{45}$$

где

$$L_\alpha = \frac{2^\alpha (\beta \alpha - 1)}{\alpha - 1}. \tag{46}$$

Далее, из (30), в силу (20), имеем

$$\begin{aligned}
|\bar{\lambda}_n| &< \sum_{v=0}^{n-1} (v+1) B_0 \frac{H_0^{v+1}}{(v+1)^\alpha} A_0 \frac{H_0^{n-v}}{(n-v)^\alpha} + (n+1) |\varphi_{n+1}| |\lambda_0| \\
|\bar{\varphi}_n| &< \sum_{v=0}^n (v+1)(n+1-v) B_0 \frac{H_0^{v+1}}{(v+1)^\alpha} B_0 \frac{H_0^{n+1-v}}{(n+1-v)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$|\bar{\lambda}_n| < A_0 B_0 H_0^{n+1} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(v+1)}{(v+1)^\alpha (n-v)^\alpha} + |\lambda_0| B_0 \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^\alpha}$$

и

$$|\bar{\varphi}_n| < B_0^2 H_0^{n+2} \sum_{v=0}^n \frac{(v+1)(n+1-v)}{(v+1)^\alpha (n+1-v)^\alpha}.$$

Но, в силу (43) и (45), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^{n-1} \frac{(\gamma+1)}{(\gamma+1)^{\alpha} (\gamma-\nu)^{\alpha}} &= \sum_{\gamma=1}^n \frac{\gamma}{\gamma^{\alpha} (\gamma-1-\nu)^{\alpha}} < \frac{L_a}{2(n+1)^{\alpha-1}} \\ \sum_{\gamma=0}^n \frac{(\gamma+1)(n+1-\nu)}{(\gamma+1)^{\alpha} (n+1-\nu)^{\alpha}} &< (n+1) \sum_{\gamma=0}^n \frac{(\gamma+1)}{(\gamma+1)^{\alpha} (n+1-\nu)^{\alpha}} = \\ &= (n+1) \sum_{\gamma=1}^{n+1} \frac{\gamma}{\gamma^{\alpha} (n+2-\nu)^{\alpha}} < \frac{L_a(n+1)}{2(n+2)^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\bar{\lambda}_n| &< A_0 B_0 H_0^{n+1} \cdot \frac{L_a}{2(n+1)^{\alpha-1}} + |\lambda_0| B_0 \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} = \\ &= \left( \frac{A_0 L_a}{2} + |\lambda_0| \right) B_0 \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (47)$$

$$|\bar{\varphi}_n| < \frac{1}{2} B_0^2 H_0^{n+2} L_a \frac{(n+1)}{(n+2)^{\alpha-1}}. \quad (48)$$

Кроме того

$$|\bar{\lambda}_0| = |\lambda_0| |\varphi_1| \quad \text{и} \quad |\bar{\varphi}_0| = |\varphi_1|^2. \quad (49)$$

Теперь неравенства (36)–(41) примут вид

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)|x_{n+2}| &\leq A_0|x_1| \frac{H_0^n}{n^{\alpha}} + A_1|\lambda_0| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + \\ &+ 2B_0|y_1| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + 2A_2|\varphi_1| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + \frac{L_a}{2} B_0^2 |x_0| \frac{H_0^{n+2}(n+1)}{(n+2)^{\alpha-1}} + \\ &+ A_1\varphi_1 \frac{H^n}{n^{\alpha}} + B_0|y_0| \frac{H_0^{n+2}(n+1)}{(n+2)^{\alpha-1}} + 2A_2|\varphi_2| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + \left( \frac{A_0 L_a}{2} + \right. \\ &\left. + |\lambda_0| \right) B_0|y_0| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + A_2|\lambda_0||\varphi_1| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + A_5 k^2 m_1 |x_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + \\ &+ A_1 k^2 m_1 |u_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + A_6 k^2 m_2 |x_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + A_1 k^2 m_1 |v_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} &+ A_6 k^2 m_2 |R_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + C_0 k^2 m_2 |v_0| \frac{H_0^n}{n^{\alpha}} + \sum_{\gamma=1}^{n-1} \left[ A_0 A_1 \frac{H_0^{n-\gamma} H^{n+1} (n+1-\nu)}{(\gamma+1)^{\alpha} (\gamma-\nu)^{\alpha}} + \right. \\ &\left. + 2A_2 B_0 \frac{H_0^{n-\gamma+1} H^{n+1} (n+1-\nu)}{(\gamma+1)^{\alpha} (n-\nu+1)^{\alpha}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} L_a A_1 B_0 \frac{H_0^{n+2-\gamma} H^\gamma (n-\nu+1)}{(n-\nu+2)^{\alpha-1} \gamma^{\alpha}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ A_2 B_0 \frac{H_0^{n+2-\gamma} H^\gamma (n+2-\nu) (n+1-\nu)}{(n+2-\nu)^{\alpha-1} \nu^{\alpha}} + \\ &+ \left( \frac{A_0 L_a}{2} + |\lambda_0| \right) A_2 B_0 \frac{H_0^{n-\gamma+1} H^\gamma}{(n-\nu+1)^{\alpha-1} \nu^{\alpha}} + A_1 A_5 k^2 m_1 \frac{H^n}{(n-\nu)^{\alpha-1} \nu^{\alpha}} + \\ &+ A_1 A_6 k^2 m_2 \frac{H^n}{(n-\nu)^{\alpha-1} \nu^{\alpha}} + A_6 C_0 k^2 m_2 \frac{H_0^{n-\nu}}{\nu^{\alpha} (n-\nu)^{\alpha}} \right], \quad n \geq 1, \\ &(n+2)(n+1)|y_{n+2}| \leq A_0|y_1| \frac{H_0^n}{n^{\alpha}} + A_2|\lambda_0| \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 2B_0|x_1| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + 2A_1|\varphi_1| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + \frac{L_a}{2} B_0^2 |y_0| \frac{H_0^{n+2}(n+1)}{(n+2)^{\alpha-1}} + \\ &+ A_2 \varphi_1^2 \frac{H^n}{n^{\alpha}} + B_0|x_0| \frac{H_0^{n+2}(n+1)}{(n+2)^{\alpha-1}} + 2A_1|\varphi_2| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + \\ &+ \left( \frac{A_0 L_a}{2} + |\lambda_0| \right) B_0|x_0| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + A_1|\lambda_0||\varphi_1| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + \\ &+ A_5 k^2 m_1 |y_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + A_2 k^2 m_1 |u_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + A_6 k^2 m_2 |y_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} &+ A_2 k^2 m_2 |v_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + \sum_{\gamma=1}^{n-1} \left[ A_0 A_2 \frac{H_0^{n-\gamma} H^{n+1} (n+1-\nu)}{(n-\nu)^{\alpha} (n+1)^{\alpha}} + \right. \\ &\left. + 2A_1 B_0 \frac{H_0^{n+1-\gamma} H^{n+1} (n+1-\nu) (n+1)}{(n+1-\nu)^{\alpha} (n+1)^{\alpha}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{L_a}{2} A_2 B_0 \frac{H^\gamma H_0^{n-\gamma+2} (n-\nu+1)}{\nu^{\alpha} (n-\nu+2)^{\alpha-1}} + A_1 B_0 \frac{H_0^{n-\gamma} H^\gamma (n+2-\nu) (n+1-\nu)}{\nu^{\alpha} (n+2-\nu)^{\alpha}} + \\ &+ \left( \frac{A_0 L_a}{2} + |\lambda_0| \right) A_1 B_0 \frac{H_0^{n-\gamma+1} H^\gamma}{\nu^{\alpha} (n-\nu+1)^{\alpha-1}} + \\ &+ A_2 A_5 k^2 m_1 \frac{H^n}{\nu^{\alpha} (n-\nu)^{\alpha}} + A_2 A_6 k^2 m_2 \frac{H^n}{\nu^{\alpha} (n-\nu)^{\alpha}} \right], \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2r_0|r_n| \leq 2A_1|x_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + 2A_2|y_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + \\ &+ (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) H^n \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^{\alpha} (n-\nu)^{\alpha}}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} &2s_0|s_n| \leq 2r_0|r_n| + 2C_0|x_0| \frac{H_0^n}{n^{\alpha}} + 2A_1|R_0| \frac{H^n}{n^{\alpha}} + 2C_0|R_0| \frac{H_0^n}{n^{\alpha}} + \\ &+ (A_1^2 + A_2^2) H^n \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{1}{(\nu-\nu)^{\alpha} \nu^{\alpha}} + 2A_1 C_0 \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H_0^{n-\gamma} H^\gamma}{(\nu-\nu)^{\alpha} \nu^{\alpha}} + \end{aligned} \quad (53)$$

$$+ C_0^2 H_0^n \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{1}{(\nu-\nu)^{\alpha} \nu^{\alpha}}, \quad n \geq 2.$$

$$(n+1)r_0|u_{n+1}| \leq 3A_3|r_1|\frac{H^n}{n^a} + 3A_3|u_0|\frac{H^{n+1}}{(n+1)^{a-1}} + A_3|u_1|\frac{H^n}{n^a} + \\ + 4A_3A_5H^{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{(v+1)}{(v+1)^a(n-v)^a}, \quad n \geq 1 \quad (54)$$

$$(n+1)s_0|v_{n+1}| \leq 3A_6|s_1|\frac{H^n}{n^a} + 3A_4|v_0|\frac{H^{n+1}}{(n+1)^{a-1}} + A_4|v_1|\frac{H^n}{n^a} + \\ + 4A_4A_6H^{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{(v+1)}{(v+1)^a(n-v)^a}, \quad n \geq 1. \quad (55)$$

Заметим, что, вообще, если  $A > B > 0$ , то при нечетном  $n$  имеем

$$\sum_{v=1}^{n-1}\frac{A^vB^{n-v}}{v^a(n-v)^a} = \left(\sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{v=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\right)\frac{A^vB^{n-v}}{v^a(n-v)^a} = \\ = \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(A^vB^{n-v} + A^{n-v}B^v)}{v^a(n-v)^a}.$$

Но

$$A^vB^{n-v} + A^{n-v}B^v = B^n\left(\frac{A}{B}\right)^v + A^n\left(\frac{B}{A}\right)^v \leq \\ \leq B^n\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{n-1}{2}} + A^n\frac{B}{A} = A^{\frac{n-1}{2}}B^{\frac{n+1}{2}} + A^{n-1}B,$$

т. е.

$$A^vB^{n-v} + A^{n-v}B^v \leq A^{\frac{n-1}{2}}B^{\frac{n+1}{2}} + A^{n-1}B, \quad 1 \leq v \leq \frac{n-1}{2}.$$

Поэтому, при нечетном  $n > 1$  имеем

$$\sum_{v=1}^{n-1}\frac{A^vB^{n-v}}{v^a(n-v)^a} \leq \left(A^{\frac{n-1}{2}}B^{\frac{n+1}{2}} + A^{n-1}B\right) \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{v^a(n-v)^a}$$

или, в силу (42) и (44),

$$\sum_{v=1}^{n-1}\frac{A^vB^{n-v}}{v^a(n-v)^a} \leq \left(A^{\frac{n-1}{2}}B^{\frac{n+1}{2}} + A^{n-1}B\right) \frac{L_a}{2n^a}. \quad (56)$$

Аналогично, при четном  $n > 2$  имеем

$$\sum_{v=1}^{n-1}\frac{A^vB^{n-v}}{v^a(n-v)^a} = \left(\sum_{v=1}^{\frac{n}{2}} + \sum_{v=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\right)\frac{A^vB^{n-v}}{v^a(n-v)^a} = \\ = \sum_{v=1}^{\frac{n}{2}}\frac{A^vB^{n-v}}{v^a(n-v)^a} + \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{A^{n-v}B^v}{(n-v)^a v^a} = \\ = \sum_{v=1}^{\frac{n}{2}}\frac{(A^vB^{n-v} + A^{n-v}B^v)}{v^a(n-v)^a} - \frac{A^{\frac{n}{2}}B^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{2a}}.$$

Но

$$A^vB^{n-v} + A^{n-v}B^v = B^n\left(\frac{A}{B}\right)^v + A^n\left(\frac{B}{A}\right)^v \leq B^n\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{n}{2}} + \\ + A^n\left(\frac{B}{A}\right) = A^{\frac{n}{2}}B^{\frac{n}{2}} + A^{n-1}B,$$

т. е.

$$A^vB^{n-v} + A^{n-v}B^v \leq (AB)^{\frac{n}{2}} + A^{n-1}B, \quad 1 \leq v \leq \frac{n}{2}.$$

Поэтому, при четном  $n > 2$  получим

$$\sum_{v=1}^{n-1}\frac{A^vB^{n-v}}{v^a(n-v)^a} \leq \left[(AB)^{\frac{n}{2}} + A^{n-1}B\right] \sum_{v=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1}{v^a(n-v)^a}.$$

или, в силу (42) и (44),

$$\sum_{v=1}^{n-1}\frac{A^vB^{n-v}}{v^a(n-v)^a} \leq \frac{L_a}{2}\left[(AB)^{\frac{n}{2}} + A^{n-1}B\right]\frac{1}{n^a}. \quad (57)$$

Из (56) и (57) имеем, что

$$\sum_{v=1}^{n-1}\frac{A^vB^{n-v}}{v^a(n-v)^a} \leq \left(A^{\frac{n}{2}}B^{\frac{n}{2}} + A^{n-1}B\right) \frac{L_a}{2n^a} \quad (58)$$

для любого  $n = 2, 3, 4, \dots$

Далее, имеем

$$\sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{A^\gamma B^{n-\gamma} \gamma}{\gamma^2 (n-\gamma)^2} < (n-1) \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{A^\gamma B^{n-\gamma}}{\gamma^2 (n-\gamma)^2} < \left( A^{\frac{n}{2}} B^{\frac{n}{2}} + A^{n-1} B \right) \frac{L_a(n-1)}{2n^2}, \quad (59)$$

при любом  $n = 2, 3, 4, \dots$ .

На основании неравенств (58) и (59) можем написать

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H_\theta^\gamma H^{n-\gamma}}{\gamma^2 (n-\gamma)^2} &= \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H^\gamma H_\theta^{n-\gamma}}{\gamma^2 (n-\gamma)^2} \leq \left( H^{\frac{n}{2}} H_\theta^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_\theta \right) \frac{L_a}{2n^2}, \\ \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{\gamma H_\theta^\gamma H^{n-\gamma}}{\gamma^2 (n-\gamma)} &= \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{(n-\gamma) H^\gamma H_\theta^{n-\gamma}}{\gamma^2 (n-\gamma)^2} \leq \left( H^{\frac{n}{2}} H_\theta^{\frac{n}{2}} + H^n H_\theta \right) \frac{L_a n}{2n^2}, \\ \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{(\gamma+1) H^{\gamma+1} H_\theta^{n-\gamma}}{(\gamma+1)^2 (n-\gamma)^2} &\leq H_n \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H^\gamma H_\theta^{n-\gamma}}{\gamma^2 (n-\gamma)^2} \leq \\ &\leq \left( H^{\frac{n}{2}+1} H_\theta^{\frac{n}{2}} + H^n H_\theta \right) \frac{L_a n}{2n^2}, \\ \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H_\theta^{n-\gamma+1} H^{\gamma+1} (\gamma+1)(n+1-\gamma)}{(\gamma+1)^2 (n-\gamma+1)^2} &< H_0 H (n+1)n \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H_\theta^{n-\gamma} H^\gamma}{\gamma^2 (n-\gamma)^2} \leq \\ &\leq \left( H^{\frac{n}{2}+1} H_\theta^{\frac{n}{2}} + H^n H_\theta \right) \frac{H_0 L_a n (n+1)}{2n^2}, \\ \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H_\theta^{n+\gamma} H^\gamma (n-\gamma+1)}{(n-\gamma+2)^{n-1} \gamma^2} &\leq H_\theta^n (n+1) (n+2) \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H_\theta^{n-\gamma} H^\gamma}{\gamma^2 (n-\gamma)^2} \leq \\ &\leq H_\theta^n L_a \left( H^{\frac{n}{2}} H_\theta^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_\theta \right) \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}, \\ \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H_\theta^{n+2-\gamma} H^\gamma (n+2-\gamma)(n+1-\gamma)}{(n+2-\gamma)^2 \gamma^2} &\leq \\ &\leq H_\theta^n (n+1) (n+2) \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H_\theta^{n-\gamma} H^\gamma}{\gamma^2 (n-\gamma)^2} \leq \\ &\leq H_\theta^n L_a \left( H^{\frac{n}{2}} H_\theta^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_\theta \right) \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H_\theta^{n-\gamma+1} H^\gamma}{(n-\gamma+1)^{n-1} \gamma^2} &\leq H_0 (n+1) \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{H^\gamma H_\theta^{n-\gamma}}{\gamma^2 (n-\gamma)^2} \leq \\ &\leq H_0 \left( H^{\frac{n}{2}} H_\theta^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_\theta \right) \frac{L_a (n+1)}{2n^2}. \end{aligned}$$

Принимая все это во внимание, неравенства (50) — (55) можно представить так

$$\begin{aligned} |x_{n+2}| &\leq A_0 |x_1| \frac{H_\theta^n}{(n+1)(n+2)n^2} + A_1 |\lambda_0| \frac{H^{n+1}}{(n+1)^2(n+2)} + \\ &+ 2B_0 |\gamma_1| \frac{H_\theta^{n+1}}{(n+1)^2(n+2)} + 2A_2 |\varphi_1| \frac{H^{n+1}}{(n+1)^2(n+2)} + \\ &+ \frac{L_a}{2} B_0^2 |x_0| \frac{H_\theta^{n+2}}{(n+2)^2} + A_1 \varphi_1^2 \frac{H^n}{(n+1)(n+2)n^2} + B_0 |y_0| \frac{H_\theta^{n+2}}{(n+2)^2} + \\ &+ 2A_2 |\varphi_2| \frac{H^n}{n^2(n+1)(n+2)} + \left( \frac{A_0 L_a}{2} + |\lambda_0| \right) B_0 |y_0| \frac{H_\theta^{n+1}}{(n+1)^2(n+2)} + \\ &+ A_2 |\lambda_0| |\varphi_1| \frac{H^n}{n^2(n+1)(n+2)} + A_5 k^2 m_1 |x_0| \frac{H^n}{n^2(n+1)(n+2)} + \\ &+ A_1 k^2 m_1 |u_0| \frac{H^n}{n^2(n+1)(n+2)} + A_6 k^2 m_2 |x_0| \frac{H^n}{n^2(n+1)(n+2)} + \\ &+ A_1 K^2 m_2 |v_0| \frac{H^n}{n^2(n+1)(n+2)} + A_6 k^2 m_2 |R_0| \frac{H^n}{n^2(n+1)(n+2)} + \\ &+ C_0 k^2 m_2 |v_0| \frac{H_\theta^n}{n^2(n+1)(n+2)} + A_0 A_1 \left( H^{\frac{n}{2}+1} H_\theta^{\frac{n}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + H^n H_\theta \right) \frac{L_a n}{2n^2(n+1)(n+2)} + 2A_2 B_0 \left( H^{\frac{n}{2}+1} H_\theta^{\frac{n}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + H^n H_\theta \right) \frac{H_0 L_a n (n+1)}{2n^2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} L_a A_1 B_0^2 H_\theta^2 L_a^2 \left( H^{\frac{n}{2}} H_\theta^{\frac{n}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + H^n H_\theta \right) \frac{H_0 L_a n (n+1)}{2n^2(n+1)(n+2)} + A_2 B_0 H_\theta^2 L_a \left( H^{\frac{n}{2}} H_\theta^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_\theta \right) \frac{L_a}{2n^2} + \\ &+ \left( \frac{A_0 L_a}{2} + |\lambda_0| \right) A_2 B_0 H_0 \left( H^{\frac{n}{2}} H_\theta^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_\theta \right) \frac{L_a (n+1)}{2n^2(n+1)(n+2)} + \\ &+ (A_1 A_5 k^2 m_1 + A_1 A_6 k^2 m_2) \frac{L_a H^n}{n^2(n+1)(n+2)} + \\ &+ A_6 C_0 k^2 m_2 \left( H^{\frac{n}{2}} H_\theta^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_\theta \right) \frac{L_a}{2n^2(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
|y_{n+2}| &\leq A_0 |y_1| \frac{H_0^n}{n^a(n+1)(n+2)} + A_1 |\lambda_0| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^a(n+2)} + \\
&+ 2B_0 |x_1| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^a(n+2)} + 2A_1 |\varphi_1| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^a(n+2)} + \\
&+ \frac{L_a}{2} B_0^2 |y_0| \frac{H_0^{n+2}}{(n+2)^a} + A_2 \varphi_1^2 \frac{H^n}{n^a(n+1)(n+2)} + B_0 |x_0| \frac{H_0^{n+2}}{(n+2)^a} + \\
&+ 2A_1 |\varphi_2| \frac{H^n}{n^a(n+1)(n+2)} + \left( \frac{A_0 L_a}{2} + |\lambda_0| \right) B_0 |x_0| \frac{H_0^{n+1}}{(n+1)^a(n+2)} + \\
&+ A_1 |\lambda_0| |\varphi_1| \frac{H^n}{n^a(n+1)(n+2)} + A_5 k^2 m_1 |y_0| \frac{H^n}{n^a(n+1)(n+2)} + \\
&+ A_2 k^2 m_1 |u_0| \frac{H^n}{n^a(n+1)(n+2)} + A_6 k^2 m_2 |y_0| \frac{H^n}{n^a(n+1)(n+2)} + \\
&+ A_2 k^2 m_2 |v_0| \frac{H^n}{n^a(n+1)(n+2)} + \quad \quad \quad (61) \\
&+ A_0 A_2 \left( H^{\frac{n}{2}+1} H_0^{\frac{n}{2}} + H^n H_0 \right) \frac{L_a n}{2n^a(n+1)(n+2)} + \\
&+ 2A_1 B_0 \left( H^{\frac{n}{2}+1} H_0^{\frac{n}{2}} + H^n H_0 \right) \frac{H_0 L_a n (n+1)}{2n^a(n+1)(n+2)} + \\
&+ \frac{L_a}{2} A_2 B_0^2 H_0^2 L_a \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{1}{2n^a} + \\
&+ A_1 B_0 H_0^2 L_a \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{1}{2n^a} + \\
&+ \left( \frac{A_0 L_a}{2} + |\lambda_0| \right) A_1 B_0 H_0 \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{L_a (n+1)}{2n^a(n+1)(n+2)} + \\
&+ (A_2 A_5 k^2 m_1 + A_2 A_6 k^2 m_2) \frac{L_a H^n}{n^a(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|r_n| &\leq A_1 \frac{|x_0|}{r_0} \frac{H^n}{n^a} + A_2 \frac{|y_0|}{r_0} \frac{H^n}{n^a} + (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) H^n \frac{L_a}{2r_0 n^a}, \quad n \geq 2 \quad (62) \\
|r_n| &\leq \frac{r_0}{s_0} |r_n| + C_0 \frac{|x_0|}{s_0} \frac{H_0^n}{n^a} + A_1 \frac{|R_0|}{s_0} \frac{H^n}{n^a} + C_0 \frac{|R_0|}{s_0} \frac{H_0^n}{n^a} + \\
&+ (A_1^2 + A_2^2) H^n \frac{L_a}{2s_0 n^a} + A_1 C_0 \frac{1}{s_0} \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{L_a}{2n^a} + \quad (63) \\
&+ C_0^2 H_0^n \frac{1}{2s_0} \frac{L_a}{n^a}, \quad n \geq 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| &\leq 3A_5 \frac{|r_1|}{r_0} \frac{H^n}{n^a(n+1)} + 3A_3 \frac{|u_0|}{r_0} \frac{H^{n+1}}{(n+1)^a} + \\
&+ A_3 \frac{|u_1|}{r_0} \frac{H^n}{n^a(n+1)} + 4A_3 A_5 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^a} \frac{L_a}{2r_0}, \quad n \geq 1 \quad (64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|v_{n+1}| &\leq 3A_6 \frac{|s_1|}{s_0} \frac{H^n}{n^a(n+1)} + 3A_4 \frac{|v_0|}{s_0} \frac{H^{n+1}}{(n+1)^a} + \\
&+ A_4 \frac{|v_1|}{s_0} \frac{H^n}{n^a(n+1)} + 4A_4 A_6 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^a} \frac{L_a}{2s_0}, \quad n \geq 1. \quad (65)
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^a}{n^a} &= \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^a \leq 2^a, \quad \frac{1}{n^a} \leq \frac{2^a}{(n+1)^a} \leq \frac{2^{2a}}{(n+2)^a}, \quad n \geq 1 \\
\frac{1}{(n+1)^a(n+2)} &\leq \frac{2^a}{(n+2)^a(n+2)} \leq \frac{2^a}{3(n+2)^a}, \quad n \geq 1 \\
\frac{1}{n^a(n+1)(n+2)} &\leq \frac{2^{2a}}{(n+1)(n+2)(n+2)^a} \leq \frac{2^{2a}}{6(n+2)^a}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Поэтому неравенства (60)–(65) примут вид:

$$\begin{aligned}
|x_{n+2}| &\leq A_0 |x_1| \frac{2^{2a} H_0^n}{6(n+2)^a} + A_1 |\lambda_0| \frac{2^a H_0^{n+1}}{3(n+2)^a} + 2B_0 |y_1| \frac{2^a H_0^{n+1}}{3(n+2)^a} + \\
&+ 2A_2 |\varphi_1| \frac{2^a H_0^{n+1}}{3(n+2)^a} + \frac{1}{2} L_a B_0^2 |x_0| \frac{H_0^{n+2}}{(n+2)^a} + A_1 \varphi_1^2 \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + \\
&+ B_0 |y_0| \frac{H_0^{n+2}}{(n+2)^a} + 2A_1 |\varphi_2| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + \right. \\
&\left. + |\lambda_0| \right) B_0 |y_0| \frac{2^a H_0^{n+1}}{3(n+2)^a} + A_2 |\lambda_0| |\varphi_1| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + \quad (66) \\
&+ A_5 k^2 m_1 |x_0| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + A_1 k^2 m_1 |u_0| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + A_6 k^2 m_2 |x_0| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + \\
&+ A_1 k^2 m_2 |v_0| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + A_6 k^2 m_2 |R_0| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + C_0 k^2 m_2 |v_0| \frac{2^{2a} H_0^n}{6(n+2)^a} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ A_0 A_1 \left( H^{\frac{n}{2}+1} H_0^{\frac{n}{2}} + H^n H_0 \right) \frac{2^{2a} L_a}{2 \cdot 3 \cdot (n+2)^a} + \\
&+ 2A_1 B_0 \left( H^{\frac{n}{2}+1} H_0^{\frac{n}{2}} + H^n H_0 \right) \frac{H_0 L_a 2^{2a}}{2(n+2)^a} + \\
&+ \frac{1}{2} A_1 B_0^2 H_0^2 \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{L_a 2^{2a}}{2(n+2)^a} + \\
&+ A_2 B_0 H_0^2 \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{L_a 2^{2a}}{2(n+2)^a} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) A_2 B_0 H_0 \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{L_a 2^{2a}}{2 \cdot 3 \cdot (n+2)^a} + \\
& + (A_1 A_5 k^2 m_1 + A_1 A_6 k^2 m_2) H^n \frac{2^{2a} L_a}{6(n+2)^a} + \\
& + A_6 C_0 k^2 m_2 \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{2^{2a} L_a}{2 \cdot 6 \cdot (n+2)^a}, \quad n \geq 1, \\
|y_{n+2}| & \leq A_0 |y_1| \frac{2^{2a} H_0^n}{6(n+2)^a} + A_2 |\lambda_0| \frac{2^a H_0^{n+1}}{3(n+2)^a} + 2B_0 |x_1| \frac{2^a H_0^{n+1}}{3(n+2)^a} + \\
& + 2A_1 |\varphi_1| \frac{2^a H_0^{n+1}}{3(n+2)^a} + \frac{1}{2} L_a B_0^2 |y_0| \frac{H_0^{n+2}}{(n+2)^a} + A_2 \varphi_1^2 \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + \\
& + B_0 |x_0| \frac{H_0^{n+2}}{(n+2)^a} + 2A_1 |\varphi_2| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + \\
& + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) B_0 |x_0| \frac{2^a H_0^{n+1}}{3(n+2)^a} + A_1 |\lambda_0| |\varphi_1| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + \\
& + A_6 k^2 m_1 |y_0| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + A_4 k^2 m_1 |u_0| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + \\
& + A_6 k^2 m_2 |y_0| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + A_2 k^2 m_2 |v_0| \frac{2^{2a} H^n}{6(n+2)^a} + \\
& + A_0 A_2 \left( H^{\frac{n}{2}+1} H_0^{\frac{n}{2}} + H^n H_0 \right) \frac{2^{2a} L_a}{2 \cdot 3 \cdot (n+2)^a} + \quad (67) \\
& + 2A_1 B_0 \left( H^{\frac{n}{2}+1} H_0^{\frac{n}{2}} + H^n H_0 \right) \frac{H_0 L_a 2^{2a}}{2(n+2)^a} + \\
& + \frac{1}{2} L_a A_2 B_0^2 H_0^2 \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{2^{2a}}{2(n+2)^a} + \\
& + A_4 B_0 H_0^2 L_a \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{2^{2a}}{2(n+2)^a} + \\
& + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) A_1 B_0 H_0 \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right) \frac{L_a 2^{2a}}{2 \cdot 3 \cdot (n+2)^a} + \\
& + (A_2 A_5 k^2 m_1 + A_2 A_6 k^2 m_2) \frac{2^{2a} L_a H^n}{6(n+2)^a}, \quad n \geq 1. \\
|r_n| & \leq \frac{1}{r_0} \left[ (A_1 |x_0| + A_2 |y_0|) + \frac{1}{2} L_a (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \right] \frac{H^n}{n^a}, \quad n \geq 2 \quad (68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|r_n| & \leq \frac{1}{r_0} \left[ (A_1 |x_0| + A_2 |y_0|) + \frac{1}{2} L_a (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + A_1 |R_0| + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} L_a (A_3^2 + A_4^2) \right] \frac{H^n}{n^a} + \frac{1}{r_0} \left[ C_0 |x_0| + C_0 |R_0| + \frac{1}{2} L_a C_0^2 \right] \frac{H_0^n}{n^a} + \quad (69) \\
& + \frac{L_a}{2r_0} A_1 C_0 \left( H^{\frac{n}{2}} H_0^{\frac{n}{2}} + H^{n-1} H_0 \right), \quad n \geq 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| & \leq 3A_3 \frac{|u_0|}{r_0} \frac{H^{n+1}}{(n+1)^a} + A_3 \frac{|u_1|}{r_0} \frac{2^a H^n}{2(n+1)^a} + \\
& + 3A_5 \frac{|r_1|}{r_0} \frac{2^a H^n}{2(n+1)^a} + 2L_a A_3 A_5 \frac{H^{n+1}}{r_0 (n+1)^a}, \quad n \geq 1 \quad (70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|v_{n+1}| & \leq 3A_4 \frac{|v_0|}{r_0} \frac{H^{n+1}}{(n+1)^a} + A_4 \frac{|v_1|}{r_0} \frac{2^a H^n}{2(n+1)^a} + 3A_6 \frac{|s_1|}{r_0} \frac{2^a H^n}{2(n+1)^a} + \\
& + 2L_a A_4 A_6 \frac{H^{n+1}}{r_0 (n+1)^a}, \quad n \geq 1. \quad (71)
\end{aligned}$$

#### 6. Вывод основных неравенств для коэффициентов и доказательство сходимости рядов

Теперь установим справедливость неравенств

$$\begin{aligned}
|x_{n+2}| & \leq A_1 \frac{H^{n+2}}{(n+2)^a}, & |y_{n+2}| & \leq A_2 \frac{H^{n+2}}{(n+2)^a}, \\
|r_n| & \leq A_3 \frac{H^n}{n^a}, & |s_n| & \leq A_4 \frac{H^n}{n^a}, \\
|u_{n+1}| & \leq A_5 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^a}, & |v_{n+1}| & \leq A_6 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^a}. \quad (72)
\end{aligned}$$

Для этого достаточно показать существование положительных постоянных  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  и  $H$ , удовлетворяющих следующим неравенствам:

$$\begin{aligned}
& A_0 |x_1| \frac{2^{2a} H_0}{6H^3} + A_1 |\lambda_0| \frac{2^a}{3H} + 2B_0 |y_1| \frac{2^a H_0^2}{3H^3} + 2A_1 |\varphi_1| \frac{2^{2a}}{3H} + \\
& + A_0 |x_1| \frac{2^{2a} H_0}{6H^3} + A_1 |\lambda_0| \frac{2^a}{3H} + 2B_0 |y_1| \frac{2^a H_0^2}{3H^3} + 2A_1 |\varphi_1| \frac{2^{2a}}{3H} + \\
& + \frac{1}{2} L_a B_0^2 |x_0| \frac{H_0^2}{H^3} + A_1 \varphi_1^2 \frac{2^{2a}}{6H^2} + B_0 |y_0| \frac{H_0^2}{H^3} + A_2 |\varphi_2| \frac{2^{2a}}{3H^2} + \\
& + \frac{1}{2} L_a B_0^2 |x_0| \frac{H_0^2}{H^3} + A_1 \varphi_1^2 \frac{2^{2a}}{6H^2} + B_0 |y_0| \frac{H_0^2}{H^3} + A_2 |\varphi_2| \frac{2^{2a}}{3H^2} + \\
& + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) B_0 |y_0| \frac{2^a H_0^2}{3H^3} + A_2 |\lambda_0| |\varphi_1| \frac{2^a}{6H^2} + A_5 k^2 m_1 |x_0| \frac{2^{2a}}{6H^2} + \\
& + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) B_0 |y_0| \frac{2^a H_0^2}{3H^3} + A_2 |\lambda_0| |\varphi_1| \frac{2^a}{6H^2} + A_5 k^2 m_1 |x_0| \frac{2^{2a}}{6H^2} + \\
& + A_1 k^2 m_1 |u_0| \frac{2^{2a}}{6H^2} + A_6 k^2 m_2 |x_0| \frac{2^{2a}}{6H^2} + A_4 k^2 m_2 |v_0| \frac{2^{2a}}{6H^2} + \\
& + A_6 k^2 m_2 |R_0| \frac{2^{2a}}{6H^2} + C_0 k^2 m_2 |v_0| \frac{2^{2a} H_0}{6H^3} +
\end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
& + A_0 A_1 \left( \frac{H_0^{1/2}}{H^{3/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) \frac{2^{2a} L_a}{6} + A_2 B_0 \left( \frac{H_0^{1/2}}{H^{3/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) \frac{H_0 2^{2a} L_a}{6} + \\
& + A_1 B_0^2 \left( \frac{H_0^{1/2}}{H^{3/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) \frac{H_0^2}{H} \frac{2^{2a} L_a}{4} + A_2 B_0 \left( \frac{H_0^{1/2}}{H^{3/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) \frac{H_0^2}{H} \frac{2^{2a} L_a}{2} + \\
& + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) A_1 B_0 \frac{H_0}{H} \left( \frac{H_0^{1/2}}{H^{3/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) \frac{2^{2a} L_a}{6} + \\
& + (A_1 A_5 k^2 m_1 + A_1 A_6 k^2 m_2) \frac{2^{2a} L_a}{6 H^2} + \\
& + A_6 C_0 k^2 m_2 \frac{1}{H} \left( \frac{H_0^{1/2}}{H^{3/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) 2^{2a} L_a \leq A_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_0 |y_1| \frac{2^{2a} H_0}{6 H^2} + A_2 |\lambda_0| \frac{2^a}{3H} + 2 B_0 |x_1| \frac{2^a H_0^2}{3H^3} + 2 A_1 |\varphi_1| \frac{2^a}{3H} + \\
& + \frac{1}{2} L_a B_0^2 |y_0| \frac{H_0^3}{H^3} + A_2 \varphi_1^2 \frac{2^{2a}}{6H^2} + B_0 |x_0| \frac{H_0^3}{H^3} + A_1 |\varphi_2| \frac{2^{2a}}{3H^2} + \\
& + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) B_0 |x_0| \frac{2^a H_0^2}{3H^3} + A_1 |\lambda_0| |\varphi_1| \frac{2^{2a}}{6H^2} + A_5 k^2 m_1 |y_0| \frac{2^{2a}}{6H^2} + \\
& + A_4 k^2 m_1 |u_0| \frac{2^{2a}}{6H^2} + A_6 k^2 m_2 |y_0| \frac{2^{2a}}{6H^2} + A_3 k^2 m_2 |v_0| \frac{2^{2a}}{6H^2} + \quad (74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_0 A_1 \left( \frac{H_0^{3/2}}{H^{1/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) \frac{2^{2a} L_a}{6} + A_1 B_0 \left( \frac{H_0^{1/2}}{H^{3/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) H_0 2^{2a} L_a + \\
& + A_2 B_0^2 \left( \frac{H_0^{1/2}}{H^{3/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) \frac{H_0^2}{H} \frac{2^{2a} L_a}{4} + A_1 B_0 \left( \frac{H_0^{1/2}}{H^{3/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) \frac{H_0^2}{H} \frac{2^{2a} L_a}{2} + \\
& + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) A_1 B_0 \left( \frac{H_0^{1/2}}{H^{3/2}} + \frac{H_0}{H^2} \right) \frac{H_0 2^{2a} L_a}{6H} + \\
& + (A_2 A_5 k^2 m_1 + A_2 A_6 k^2 m_2) \frac{2^{2a} L_a}{6 H^2} \leq A_3,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{r_0} \left( A_1 |x_0| + A_2 |y_0| \right) + \frac{L_a}{2r_0} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \leq A_3, \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{s_0} (A_1 |x_0| + A_2 |y_0|) + \frac{L_a}{2s_0} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + A_1 \frac{|R_0|}{s_0} + \\
& + \frac{L_a}{2s_0} (A_1^2 + A_2^2) + \frac{1}{s_0} \left( C_0 |x_0| + c_0 |R_0| + \frac{L_a}{2} C_0^2 \right) \frac{H_0^2}{H^2} + \\
& + A_1 C_0 \frac{L_a}{s_0} \frac{H_0}{H} \leq A_4,
\end{aligned} \quad (76)$$

$$3A_3 \frac{|u_0|}{r_0} + A_3 \frac{|u_1|}{r_0} \frac{2^{a-1}}{H} + 3A_5 \frac{|r_1|}{r_0} \frac{2^{a-1}}{H} + 2 \frac{L_a}{r_0} A_3 A_5 \leq A_5, \quad (77)$$

$$3A_4 \frac{|v_0|}{s_0} + A_4 \frac{|v_1|}{s_0} \frac{2^{a-1}}{H} + 3A_6 \frac{|s_1|}{s_0} \frac{2^{a-1}}{H} + \frac{2L_a}{s_0} A_4 A_6 \leq A_6. \quad (78)$$

Пусть положительные числа  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $H_0'$  и  $H_0$  произвольно зафиксированы, при этом пусть

$$H_0' > 3 \cdot 2^{a-1} \frac{|r_1|}{r_0} \quad \text{и} \quad H_0 > 3 \cdot 2^{a-1} \frac{|s_1|}{s_0}. \quad (79)$$

Далее, пусть  $A_4$  — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$A_4 < \min \left\{ \frac{2s_0}{L_a}, \frac{A_6 (H_0' s_0 - 3 \cdot 2^{a-1} |s_1|)}{H_0' (3|v_0| + 2L_a A_6) + 2^{a-1} |v_1|} \right\}. \quad (80)$$

Теперь, зафиксировав  $A_5$ , положительное число  $A_3$  выберем настолько малым, чтобы было

$$\begin{aligned}
A_3 & < \min \left\{ \frac{2r_0}{L_a}, \sqrt{A_4 \left( \frac{s_0}{L_a} - \frac{1}{2} A_4 \right)}, \right. \\
& \left. \frac{A_5 (H_0' r_0 - 3 \cdot 2^{a-1} |r_1|)}{H_0' (3|u_0| + 2L_a A_5) + 2^{a-1} |u_1|} \right\}.
\end{aligned} \quad (81)$$

Далее, пусть  $H_3$  — произвольное положительное число, удовлетворяющее условию:

$$H_3 > \frac{H_0 C_0 (|x_0| + |R_0| + \frac{1}{2} L_a C_0)}{A_4 \left( s_0 - \frac{1}{2} L_a A_4 \right) - L_a A_3^2}. \quad (82)$$

Фиксируя числа  $A_3$ ,  $A_4$  и  $H_3$ , положительные числа  $A_1$  и  $A_2$  выберем настолько малым, чтобы имели место следующие неравенства:

$$A_1 |x_0| + A_2 |y_0| + \frac{1}{2} L_a (A_1^2 + A_2^2) \leq A_3 \left( r_0 - \frac{L_a}{2} A_3 \right) \quad (83)$$

и

$$\begin{aligned}
& A_1 (|x_0| + |R_0| + C_0 L_a) + A_2 |y_0| + \frac{1}{2} L_a (A_1^2 + A_2^2) \leq \\
& \leq A_4 \left( s_0 - \frac{1}{2} L_a A_4 \right) - L_a A_3^2 - \frac{H_0 C_0}{H_3} \left( |x_0| + |R_0| + \frac{1}{2} L_a C_0 \right). \quad (84)
\end{aligned}$$

Например, можно считать, что  $0 < A_1 < 1$ ,  $0 < A_2 < 1$  и

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 & < \min \left\{ \frac{A_3 \left( r_0 - \frac{1}{2} L_a A_3 \right)}{r_0 + \frac{1}{2} L_a}, \right. \\
& \left. \frac{A_4 \left( s_0 - \frac{1}{2} L_a A_4 \right) - L_a A_3^2 - \frac{H_0 C_0}{H_3} \left( |x_0| + |R_0| + \frac{1}{2} L_a C_0 \right)}{r_0 + |R_0| + C_0 L_a + \frac{1}{2} L_a} \right\}.
\end{aligned} \quad (85)$$

Теперь положим

$$\begin{aligned}
 H_1 = & \frac{2^{2a}}{6} \frac{A_0}{A_1} |x_1| + \frac{2^a}{3} |\lambda_0| + \frac{2^{a+1}}{3} \frac{B_0}{A_1} |y_1| + \frac{2^{a+1}}{3} \frac{A_2}{A_1} |\varphi_1| + \\
 & + \frac{L_a}{2} \frac{B_0^2}{A_1} |x_0| + \frac{2^{2a}}{6} \varphi_1^2 + \frac{B_0}{A_1} |y_0| + \frac{2^{2a}}{3} \frac{A_2}{A_1} |\varphi_2| + \\
 & + \frac{2^a}{3} \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) \frac{B_0}{A_1} |y_0| + \frac{2^{2a}}{6} \frac{A_2}{A_1} |\lambda_0| |\varphi_1| + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_1 \frac{A_5}{A_1} + \\
 & + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_1 |u_0| + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_2 \frac{A_5}{A_1} |x_0| + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_2 |v_0| + \quad (86) \\
 & + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_2 |R_0| \frac{A_6}{A_1} + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_2 |v_0| \frac{C_0}{A_1} + \frac{2^{2a}}{3} L_a A_0 + 2^{2a+1} L_a B_0 \frac{A_1}{A_1} + \\
 & + 2^{2a-1} L_a^2 B_0^2 + 2^{2a} L_a B_0 \frac{A_2}{A_1} + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) \frac{2^{2a}}{3} L_a B_0 \frac{A_2}{A_1} + \\
 & + (A_5 k^2 m_1 + A_6 k^2 m_2) \frac{2^{2a}}{6} L_a + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_2 L_a C_0 \frac{A_6}{A_1}, \\
 H_2 = & \frac{2^{2a}}{6} |y_1| \frac{A_0}{A_2} + \frac{2^a}{3} |\lambda_0| + \frac{2^{a+1}}{3} |x_1| \frac{B_0}{A_2} + \frac{2^{a+1}}{3} |\varphi_1| \frac{A_1}{A_2} + \\
 & + \frac{1}{2} L_a \frac{B_0^2}{A_2} |y_0| + \frac{2^{2a}}{6} \varphi_1^2 + \frac{B_0}{A_2} |x_0| + \frac{2^{2a}}{3} |\varphi_2| \frac{A_1}{A_2} + \\
 & + \frac{2^a}{3} \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) \frac{B_0}{A_2} |x_0| + \frac{2^{2a}}{6} |\lambda_0| |\varphi_1| \frac{A_1}{A_2} + \\
 & + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_1 |y_0| \frac{A_5}{A_2} + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_1 |u_0| + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_2 |y_0| \frac{A_6}{A_2} + \quad (87) \\
 & + \frac{2^{2a}}{6} k^2 m_2 |v_0| + \frac{2^{2a}}{3} L_a A_0 + 2^{2a+1} L_a B_0 \frac{A_1}{A_2} + 2^{2a-1} L_a^2 B_0^2 + \\
 & + 2^{2a} L_a B_0 \frac{A_1}{A_2} + \left( \frac{1}{2} A_0 L_a + |\lambda_0| \right) \frac{2^{2a}}{3} L_a B_0 \frac{A_1}{A_2} + \\
 & + (A_5 k^2 m_1 + A_6 k^2 m_2) \frac{2^{2a}}{6} L_a, \\
 H^* = & \max \{ 1, H_0, H_0^*, H_0', H_0', H_1, H_2, H_3 \} \quad (88)
 \end{aligned}$$

и

$$H > H^*. \quad (89)$$

Проверим, что если положительные постоянные  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  и  $H$  удовлетворяют условиям (80), (81), (83), (84), (89), то выполняются все неравенства (73)–(78).

С этой целью заметим, что если  $\frac{b}{a} < \zeta_0 \leq \zeta < +\infty$ , то дробно-линейная функция  $\frac{a\zeta - b}{c\zeta + d}$  при положительных  $a, b, c$  и  $d$  достигает

для  $\zeta = \zeta_0$  своего положительного минимума  $\frac{a\zeta_0 - b}{c\zeta_0 + d}$ . Принимая это во внимание, из (80) при  $H > H_0^*$  имеем

$$A_4 < \frac{A_5(Hs_0 - 3 \cdot 2^{a-1} |s_1|)}{H(3|v_0| + 2L_a A_6) + 2^{a-1} |v_1|}.$$

Отсюда, очевидно, следует неравенство (78). Аналогично из (81) получим, что  $A_3 < \frac{A_5(Hr_0 - 3 \cdot 2^{a-1} |r_1|)}{H(3|u_0| + 2L_a A_5) + 2^{a-1} |u_1|}$ . Отсюда следует (77).

Далее, принимая во внимание, что  $H > H_0$ ,  $H > H_0^2$  и  $H > H_3$ , из (83) и (84), очевидно, вытекают (75) и (76).

В частности, если  $A_1$  и  $A_2$  удовлетворяют неравенствам  $0 < A_1 < 1$ ,  $0 < A_2 < 1$  и условию (85), то тогда имеем

$$\left( r_0 + \frac{1}{2} L_a \right) (A_1 + A_2) < A_3 \left( r_0 - \frac{1}{2} L_a A_3 \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \left( r_0 + |R_0| + C_0 L_a + \frac{1}{2} L_a \right) (A_1 + A_2) < \\
 & < A_4 \left( s_0 - \frac{1}{2} L_a A_4 \right) - L_a A_5^2 - \frac{H_0 C_0}{H_3} \left( |x_0| + |R_0| + \frac{1}{2} L_a C_0 \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда следуют неравенства (75) и (76), если принять во внимание, что  $|x_0| \leq r_0$ ,  $|y_0| \leq r_0$ ,  $H > H_0$ ,  $H > H_0^2$ ,  $H > H_3$ ,  $A_1^2 \leq A_1$  и  $A_2^2 \leq A_2$ .

Наконец, в силу (86)–(89), легко получить неравенства (73) и (74).

Таким образом мы установили справедливость неравенств (35) для любого  $n = 1, 2, 3\dots$

Теперь, очевидно, что степенные ряды (21) сходятся для всех значений времени  $t$ , удовлетворяющих неравенству

$$0 \leq t \leq \frac{1}{H^*}.$$

Отсюда следует существование решения системы дифференциальных уравнений (10), удовлетворяющего начальным условиям (16), в виде степенных рядов (21).

В одной из следующих работ, полученные выше результаты мы применим к изучению движения ракет.

Декабрь, 1959.  
Кафедра астрономии Тбилисского государственного университета.

ON ONE CASE OF THE RESTRICTED PROBLEM OF THREE  
BODIES WHEN THE ATTRACTED BODY HAS A  
VARIABLE MASS

N. G. MAGNARADZE

ЛИТЕРАТУРА

1. Steffensen T. F. On the restricted problem of three bodies. Kgl. Danske videnskab. selskab. Mat.-fys. medd. 1956, **30**, № 18, 17.
2. Магнарадзе Н. Г. Об ограниченной задаче трех тел, когда притягиваемое тело имеет переменную массу. Бюлл. Абастуман. астрофиз. обс., 1959, № 24, 145—159.
3. Мещерский И. Ф. Работы по механике тел переменной массы. 1952.

БЫЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 26, 1961

Н. Г. МАГНАРАДЗЕ

ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ  
ТРЕХ ТЕЛ, КОГДА МАССА ПРИТЯГИВАЕМОГО ТЕЛА  
ЯВЛЯЕТСЯ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ

Введение. В одной из предыдущих работ [1] нами была исследована задача трех тел в том случае, когда двое из них,  $M_1$  и  $M_2$ , имеющие постоянные массы  $m_1$  и  $m_2$ , расположены на прямой линии, вращающейся с постоянной скоростью  $\omega$  около их общего центра тяжести на некоторой фиксированной плоскости, и притягивающие по закону притяжения Ньютона третье тело  $M$ , имеющее переменную массу  $m$  и движущееся в этой плоскости. Массу  $m$  мы считали настолько малой, что тела  $M_1$  и  $M_2$  не подвергаются притяжению тела  $M$ .

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда при указанных условиях тело  $M$  совершает пространственное движение.

При этом в основном будем пользоваться обозначениями, введенными нами в предыдущей работе [1].

1. Вывод основных дифференциальных уравнений  
(2). Заданную фиксированную плоскость, на которой расположена упомянутая выше вращающаяся прямая линия, мы примем за координатную плоскость  $\xi\Omega\eta$  абсолютной прямоугольной прямоугольной системы координат  $\xi\eta\zeta\Omega$ , с началом в произвольной фиксированной точке  $\Omega$ .

По условию точка  $M(\xi, \eta, \zeta)$  притягивается по закону Ньютона двумя точками  $M_1(\xi_1, \eta_1, \phi)$  и  $M_2(\xi_2, \eta_2, \phi)$ , лежащими на прямой линии, равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  около их центра тяже-

ти  $M_0(\xi_0, \eta_0, \phi)$ , где

$$\xi_0 = \frac{m_1\xi_1 + m_2\xi_2}{m_1 + m_2} \quad \text{и} \quad \eta_0 = \frac{m_1\eta_1 + m_2\eta_2}{m_1 + m_2}.$$

Точки  $M_1$  и  $M_2$  притягивают точку  $M(\xi, \eta, \zeta)$  по закону Ньютона силой  $\vec{F}$ , проекции которой на осях  $\Omega\xi$ ,  $\Omega\eta$ ,  $\Omega\zeta$  имеют вид

$$F = -k^2 m m_1 \frac{(\xi - \xi_1)}{r_1^3} - k^2 m m_2 \frac{(\xi - \xi_2)}{r_2^3},$$

$$F_\eta = -k^2 m m_1 \frac{(\eta - \eta_1)}{r_1^3} - k^2 m m_2 \frac{(\eta - \eta_2)}{r_2^3},$$

$$F_\zeta = -k^2 m m_1 \frac{\zeta}{r_1^3} - k^2 m m_2 \frac{\zeta}{r_2^3},$$