ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ ЗВЕЗД НА ОСНОВЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Р. М. ДЗИГВАШВИЛИ

Исследования закономерностей в движениях звезд ведутся в основном по двум путям: изучением индивидуальных орбит звезд [1] и определением некоторых кинематических параметров, характеризующих движения [2], [3], [4].

Хотя изучение индивидуальных орбит звезд является необходимым и нужным, для выявления общих характеристик и особенностей звездных движений оно дает пока еще незначительные результаты, так как число известных орбит весьма мало по сравнению с числом звезд в Галактике.

Несмотря на то, что закон распределения скоростей установлен приближенно и точное аналитическое выражение гравитационного потенциала Галактики также не известно, по нашему мнению, можно построить функцию распределения элементов орбит звезд на основе эллипсоидального закона распределения скоростей, которая даст определенное решение данной задачи.

Предполагается, что распределение скоростей является эллипсоидальным:

$$\Phi(V_R, V_\theta - V_{\theta_0}) = K_1 e^{-\theta}, \tag{1}$$

где

$$\theta = \varphi^2 V_R^2 + b_\vartheta (V_\theta - V_{\theta_0})^2 \tag{2}$$

$$b_\vartheta = \varphi^2 + K_2 R^2. \tag{3}$$

Здесь V_R и V_θ — радиальная и трансверсальная компоненты скорости, звезды V_{θ_0} — скорость центроида, а φ^2 и K_2 некоторые постоянные.

Если для гравитационного потенциала Галактики возьмем потенциал П. П. Паренаго [5]

$$\Phi = \frac{\Phi_c}{1 + \varkappa R^2}, \tag{4}$$

тогда, как известно, между компонентами скорости и элементами орбит звезд ξ_1, ξ_2 существуют зависимости

$$V_R^2 = \frac{2\Phi_c (\xi_2 - \xi_0)(\xi_0 - \xi_1)}{\xi_0 (1 + \xi_0)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)}, \tag{5}$$

$$V_\theta^2 = \frac{2\Phi_c \xi_1 \xi_2}{\xi_0 (1 + \xi_0)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)}. \tag{6}$$

Здесь:

$$\xi_1 = \varkappa R_1^2; \quad \xi_2 = \varkappa R_2^2 \quad \text{и} \quad \xi_0 = \varkappa R_0^2; \tag{7}$$

R_1 и R_2 — апогалактическое и перигалактическое расстояния звезды. Величины R_1 и R_2 являются основными элементами орбиты звезды и характеризуют полосу возможного движения для данной звезды.

Если (7) подставим в выражения (5) и (6), получим:

$$V_R^2 = \frac{2\Phi_c \varkappa (R_2^2 - R_0^2)(R_0^2 - R_1^2)}{R_0^2(1 + \varkappa R_0^2)(1 + \varkappa R_1^2)(1 + \varkappa R_2^2)}. \tag{8}$$

$$V_\theta^2 = \frac{2\Phi_c \varkappa R_1^2 R_2^2}{R_0^2(1 + \varkappa R_0^2)(1 + \varkappa R_1^2)(1 + \varkappa R_2^2)}. \tag{9}$$

Согласно методам математической статистики, зная аналитическое выражение функции распределения скоростей (1) и зависимости (8), (9) между случайными величинами V_R, $V_\theta - V_{\theta_0}$ и R_1, R_2, можно построить функцию распределения R_1, R_2, которая имеет вид:

$$\psi(R_1, R_2) = K_1\, e^{-[\varphi^2 V_R^2 + b_\vartheta (V_\theta - V_{\theta_0})^2]}\; j\begin{pmatrix} V_R, V_\theta \\ R_1, R_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Можно показать, что

$$j\begin{pmatrix} V_R, & V_\theta \\ R_1, & R_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial V_R}{\partial R_1}, & \dfrac{\partial V_R}{\partial R_2} \\ \dfrac{\partial V_\theta}{\partial R_1}, & \dfrac{\partial V_\theta}{\partial R_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{8\Phi_c \varkappa \sqrt{1 + \varkappa R_0^2}\,(R_2 - R_1^2)}{(1 + \varkappa R_1^2)^2 (1 + \varkappa R_2^2)^2 (R_0^2 - R_1^2)^{1/2} (R_2^2 - R_0^2)^{1/2}} \tag{11}$$

и функция распределения элементов орбит R_1, R_2 принимает вид:

$$\psi(R_1, R_2) = K_1\, e^{-[\varphi^2 V_R^2 + b_\vartheta (V_\theta - V_{\theta_0})^2]} \times$$

$$\times \frac{8\Phi_c \varkappa \sqrt{1 + \varkappa R_0^2}\,(R_2^2 - R_1^2)}{(1 + \varkappa R_2^2)^2 (1 + \varkappa R_2^2)^2 (R_0^2 - R_1^2)^{1/2} (R_2^2 - R_0^2)^{1/2}} \tag{12}$$

Значение K_1 должно быть определено нормированием функции распределения скоростей (1):

$$\int_{-\infty}^{+8}\int_{-\infty}^{+\infty} K_1\, e^{-[\varphi^2 V_R^2 + b_\vartheta (V_\theta - V_{\theta_0})^2]}\, dv_R\, dv_\theta = 1. \tag{13}$$

Условие (13) для K_1 дает:

$$K_1 = \frac{\sqrt{\varphi^2 b_\vartheta}}{\pi}. \tag{14}$$

Подставляя значение (14) в (12), окончательно получим:

$$\psi(R_1, R_2) = \frac{\sqrt{\varphi^2 b_\theta}}{\pi}\, e^{-[\varphi^2 V_R^2 + b_\vartheta (V_\theta - V_{\theta_0})^2]} \times$$

$$\times \frac{8\varkappa \Phi_c \sqrt{1 + \varkappa R_0^2}\,(R_2^2 - R_1^2)}{(1 + \varkappa R_1^2)^2 (1 + \varkappa R_2^2)^2 (R_0^2 - R_1^2)^{1/2} (R_2^2 - R_0^2)^{1/2}}. \tag{15}$$

Здесь вместо величин V_R и V_θ надо подразумевать выражения (8) и (9).

(15) является аналитическим выражением функции распределения элементов орбит R_1, R_2.

Третьим основным элементом галактических орбит является аномалистический период P_a, который есть интервал времени между двумя последовательными апогалактическими положениями звезды.

Согласно [5], аномалистический период P_a является функцией ξ_1, ξ_2:

$$P_a = 2\,\frac{(1 + \xi_2)\sqrt{1 + \xi_1}}{\sqrt{2\varkappa\Phi_c}}\, E(90^\circ, \theta), \tag{16}$$

где E — эллиптический интеграл Лагранжа второго рода,

$$\sin\theta = K = \sqrt{\frac{\xi_2 - \xi_1}{1 + \xi_2}}. \tag{17}$$

(16) можно переписать таким образом:

$$P_a = \frac{\sqrt{1 + \xi_1}}{\sqrt{2\varkappa\Phi_c}}\,(1 + \xi_2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \sin^2\varphi}\; d\varphi. \tag{18}$$

Для того, чтобы построить функцию распределения величин ξ_1, P_a, сначала надо построить эту функцию для ξ_1, ξ_2.

Пользуясь выражениями (5) и (6), можно, на основе выражения функции распределения скоростей (1), построить функцию распределения величин ξ_1, ξ_2:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \frac{\sqrt{b_\vartheta \varphi^2}}{\pi}\, e^{-[\varphi^2 V_R^2 + b_\vartheta (V_\theta - V_{\theta_0})^2]} \times$$

$$\times \frac{2(\xi_2 - \xi_1)\,\Phi_c (1 + \xi_0)^{1/2}}{(1 + \xi_1)^2 (1 + \xi_0)^2 \sqrt{\xi_1 \xi_2 (\xi_0 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_1)}}. \tag{19}$$

Используя выражение (18), вместо ξ_1, ξ_2 можно ввести новые величины ξ_1 и P_a.

Вычислим якобиан

$$j\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & P_a \end{pmatrix} = \frac{1}{j'\begin{pmatrix} \xi_1 & P_a \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}}. \tag{20}$$

$$j'\begin{pmatrix} \xi_1 & P_a \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \xi_1}, & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial P_a}{\partial \xi_1}, & \dfrac{\partial P_a}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ \dfrac{\partial P_a}{\partial \xi_1}, & \dfrac{\partial P_a}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial P_a}{\partial \xi_2}\right|.$$

На основе выражения (18) вычислим:

$$\frac{\partial P_a}{\partial \xi_2} = 2\frac{\sqrt{1+\xi_1}}{\sqrt{2\Phi_c \varkappa}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi - \frac{\sqrt{1+\xi_1}}{\sqrt{2\Phi_c \varkappa}} \times$$

$$\times \frac{1+\xi_1}{1+\xi_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2\varphi}}. \tag{21}$$

Используя численные значения $\varkappa$, Φ_c из работы [5], можно найти:

$$\frac{1}{\sqrt{2\varkappa\Phi_c}} = 12.09. \tag{22}$$

Введя новую переменную $x = \sin\varphi$ и принимая во внимание (22) и (17), получим:

$$\frac{\partial P_a}{\partial \xi_2} = 24 \cdot 18 \sqrt{1+\xi_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi -$$

$$- 12.09 \frac{1+\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} K^2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}. \tag{23}$$

После некоторого преобразования, найдем:

$$K^2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = E(90^\circ, \theta) - K(90^\circ, \theta), \tag{24}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы Лагранжа первого и второго рода.

Подставляя (24) в (23), окончательно получим:

$$j\begin{pmatrix}\xi_1 & P_a\\ \xi_1 & \xi_2\end{pmatrix} = 24.18\sqrt{1+\xi_1}\, E(90^\circ, \theta) +$$

$$+ 12.09 \frac{1+\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} [E(90^\circ, \theta) - K(90^\circ, \theta)]. \tag{25}$$

На основе выражения (18) и (25) функцию распределения величин ξ_1, P_a можно написать так:

$$\psi(\xi_1, P_a) = e^{-[\varphi^2 V_K^2 + b\vartheta (V_\theta - V_{\theta_0})^2]} \times$$

$$\times \frac{2\sqrt{b\vartheta \varphi^2 \Phi_c}\,(\xi_2 - \xi_1)(1+\xi_0)^{1/2}}{(1+\xi_1)^2(1+\xi_0)^2 \sqrt{\xi_1\xi_2(\xi_0-\xi_1)(\xi_2-\xi_0)}\left[24.18\sqrt{1+\xi_1}\, E(90^\circ, \theta) + 12.09 \frac{1+\xi_1}{\xi_2-\xi_1}(E-k)\right]}. \tag{26}$$

Здесь величины V_K^2, V_θ^2, $E(90^\circ, \theta)$, $K(90^\circ, \Theta)$, ξ_2, являются функциями ξ_1, P_a.

$$V_K^2 = \frac{2\Phi_c(\xi_2 - \xi_0)(\xi_0 - \xi_1)}{\xi_0(1+\xi_0)(1+\xi_1)(1+\xi_2)} \tag{27}$$

$$V_\theta^2 = \frac{2\Phi_c \xi_1 \xi_2}{\xi_0(1+\xi_0)(1+\xi_1)(1+\xi_2)} \tag{28}$$

$$E(90^\circ, \theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi \tag{29}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}. \tag{30}$$

Вычисление значений функции распределения P_a, ξ, производится следующим образом: сначала по данным ξ_1, P_a определяется ξ_2 (для этого можно пользоваться таблицей XI из работы [4]), затем по формулам (27), (28), (29) и (30) вычисляются V_K^2, V_θ^2, $E(90^\circ, \theta)$, $K(90^\circ, \theta)$ и, наконец, по (26) вычисляются значения функции $\psi(\xi_1, P_a)$.

Постоянные K_2 и φ^2 имеют различные значения для различных составляющих.

Значения φ^2 и K_2 для сферической составляющей взяты из работы [6]:

$$\varphi^2 = C_1 = 0.336\ 10^{-4}, \qquad K_2 = C_2 = 0.336\ 10^{-4}, \tag{31}$$

а для плоской составляющей из работы [4]:

$$C_1 = \varphi^2 = 6.85\ 10^{-4}, \quad C_2 = K_2 = 2.01\ 10^{-5}, \quad C_3 = 5.58\ 10^{-2}. \tag{32}$$

Ниже даются результаты вычислений по формулам (15) и (26).

Таблица 1

R_1кпс	R_2кпс		
	7.6±0.4	8.5±0.5	9.5±0.5
44.5±0.5	0.061	0.0095	0.02
5.5±0.5	0.232	0.120	0.042
6.6±0.6	0.323	0.156	0.058

В таблице 1 приводятся значения функции распределения величин R_1, R_2 для звезд плоской составляющей.

В таблице 2 и 3 даются, соответственно, значения функций распределения R_1, R_2 и ξ_1, P_a для звезд сферической составляющей.

Таблица 2

R_1 кпс	R_2 кпс		
	7.6±0.4	8.5±0.5	9.5±0.5
0.5±0.5	0.116	0.050	0.033
1.5±0.5	0.127	0.057	0.035
2.5±0.5	0.107	0.050	0.037
3.5±0.5	0.071	0.039	0.025
4.5±0.5	0.042	0.024	0.017
5.5±0.5	0.029	0.014	0.011
6.6±0.6	0.012	0.009	0.007

Таблица 3

ξ_1	P_a милл. лет.				
	интервал для ξ_1	85±5	95±5	112±12	138±12
0.029	0.029—0.000	0.102	0.058	0.030	0.003
0.115	0.115—0.029	0.162	0.066	0.060	0.011
0.259	0.259—0.115	0.063	0.064	0.072	0.088
0.461	0.461—0.259	—	0.063	0.050	0.008
0.720	0.720—0.461	—	—	0.040	0.002
0.036	1.036—0.720	—	—	0.012	0.001

Рассмотрение этих таблиц дает наглядное представление о распределении звезд по элементам орбит R_1, R_2 и ξ_1, P_a.

Анализ таблиц 1 и 2 дает возможность сделать заключение, что большинство звезд плоской составляющей движется в узком интервале вокруг $R_0 = 7.2$ кпс (почти по круговым орбитам).

Звезды сферической составляющей распределены более равномерно по элементам орбит R_1, R_2 и ξ_1, P_a.

Октябрь, 1960.

ვარსკვლავთ ორბიტების ელემენტების განაწილების ფუნქციის აგება სიჩქარეთა განაწილების ფუნქციის საფუძველზე

რ. ძიგვაშვილი

(რეზუმე)

ვარსკვლავთ ორბიტების ელემენტების განაწილების ფუნქცია გარკვეულ წარმოდგენას იძლევა ზოგიერთ კანონზომიერებათა შესახებ ვარსკვლავთ მოძრაობაში.

შრომაში დაშვებულია, რომ სიჩქარეთა განაწილების ფუნქცია ელიფსოიდურია და მისი ანალიზური სახე მოცემულია (1), (2) და (3) გამოსახულებებით.

გალაქტიკის გრავიტაციული პოტენციალისათვის აღებულია პ. პარენაგოს გამოსახულება (4). დამოკიდებულება სიჩქარის კომპონენტებსა (V_R, V_θ) და ორბიტის ელემენტებს (R_1, R_2) შორის განსაზღვრულია (8) და (9) გამოსახულებებით.

R_1 და R_2 არის ვარსკვლავის აპოგალაქტიკური და პერიგალაქტიკური მანძილები. ისინი წარმოადგენენ ორბიტის ძირითად ელემენტებს და ახასიათებენ შესაძლო მოძრაობის ზოლს მოცემული ვარსკვლავისათვის.

(8) და (9) გამოსახულებათა საფუძველზე, ზოგიერთი გარდაქმნების ჩატარების შემდეგ, მიღებულია R_1 და R_2-ის განაწილების ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება (15).

ვარსკვლავთ ორბიტების მესამე ელემენტად აღებულია ანომალისტური პერიოდი P_a, რომელიც წარმოადგენს დროის ინტერვალს ორ თანმიმდევარ აპოგალაქტიკურ მდებარეობას შორის.

იმისათვის, რომ ავაგოთ P_a—ელემენტის განაწილების ფუნქცია, მიზანშეწონილია ჯერ მოვნახოთ ξ_1, ξ_2-ის განაწილების ფუნქცია (ξ_1 და ξ_2 განსაზღვრულია (7) ტოლობებით). (1), (2), (3), (5) და (6) დამოკიდებულებების გამოყენების საფუძველზე ამ ფუნქციისათვის მიღებულია (19) გამოსახულება.

(19)-გამოსახულების გარდაქმნის საფუძველზე, (16)-ის მხედველობაში მიღებით, მონახულია ξ_1, P_a—სიდიდეების განაწილების ფუნქცია (26).

განაწილების ფუნქციებში შემავალი მუდმივების – φ^2, K_2—მნიშვნელობები დამოკიდებულია ქვესისტემათა ტიპზე. სფერული შემადგენელისათვის აღებულია (32) მნიშვნელობები, ხოლო ბრტყელი შემადგენლისათვის (33).

განაწილების ფუნქციების – (15) და (26) მიხედვით შედგენილია I, II, და III ცხრილები. I და II ცხრილებში მოცემულია R_1, R_2—სიდიდეების განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობები შესაბამისად ბრტყელი და სფერული ქვესისტემების ვარსკვლავებისათვის. III ცხრილში მოცემულია ξ_1, P_a—სიდიდეების განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობები.

ცხრილების ანალიზი გვარწმუნებს, რომ უმრავლესობა ბრტყელი ქვესისტემის ვარსკვლავებისა მოძრაობს ვიწრო ზოლში (თითქმის წრიულ ორბიტებზე). რაც შეეხება სფერული ქვესისტემის ვარსკვლავებს, ისინი უფრო თანაბრად არიან განაწილებული ორბიტის ელემენტების R_1, R_2 და ξ_1, P_a მიხედვით.

ოქტომბერი, 1960.

THE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE ORBIT ELEMENTS OF STARS BASED ON THE VELOCITY DISTRIBUTION FUNCTION

R. M. DZIGVASHVILI

ЛИТЕРАТУРА

1. Schütte K. Calaktozentrische Bahnelemente von 1026 Fixsternen in der nächsten Umgebung der Sonne. Teil VI. Anz. Österr. Akad. Wiss. Math. Naturwiss. Kl., 1955, 92, No. 1—15, 220—221.
2. Паренаго П. П. Движения долгопериодических цефеид и галактическая динамика. Переменные звезды, 1948, 6, 102—126.

3. Паренаго П. П. Исследование пространственных скоростей звезд, Труды ГАИШ, 1951, **20**, 26—68.
4. Дзигвашвили Р. М. Изучение галактических орбит и некоторые закономерности в движениях звезд. Бюлл. Абастуман. астрофиз. обс., 1955, **18**, 115—179.
5. Паренаго П. П. О гравитационном потенциале Галактики. II, Астрон., ж. 1952, **29**, 245—287.
6. Паренаго П. П. Курс звездной астрономии. 3-е изд., 1954, 388—389.

აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 26, 1961
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 26, 1961

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ, КОГДА ПРИТЯГИВАЕМОЕ ТЕЛО ИМЕЕТ ПЕРЕМЕННУЮ МАССУ

Н. Г. МАГНАРАДЗЕ

Введение. Рассмотрим задачу трех тел в том случае, когда их движение происходит на некоторой заданной плоскости, при этом двое из них M_1 и M_2, имеющие постоянные массы m_1 и m_2, притягивают по закону притяжения Ньютона третье тело M, имеющее переменную массу m. Мы предположим, что M_2 движется относительно M_1 по кеплерову закону, а массу m будем считать настолько малой, что тела M_1 и M_2 не подвергаются притяжению телом M. Заданную фиксированную плоскость мы примем за координатную плоскость с абсолютной системой координат $\xi\Omega\eta$.

На этой плоскости введем подвижную систему координат xOy, начало которой O совпадает с M_1, а ось Ox проходит через M_2.

Пусть

$$\overline{M_1M_2}=R \quad \text{и} \quad \widehat{Ox,\Omega\xi}=\varphi.$$

Величины R и φ являются заданными функциями от времени t:

$$R=R(t) \quad \text{и} \quad \varphi=\varphi(t). \tag{1}$$

Требуется изучить движение точки M относительно подвижной системы координат xOy.

В том случае, когда масса m постоянна, расстояние R постоянно, а $\varphi=\omega t+\varphi_0$ (ось Ox с угловой скоростью ω равномерно вращается около точки M_1). Эта задача недавно была рассмотрена Стеффенсоном [1]. Для координат x и y движущейся точки $M(x, y)$ им построены степенные ряды по времени t и доказана их сходимость для достаточно малых значений t. Для определения коэффициентов разложений ему удалось построить рекуррентные соотношения, удобные для их вычисления современными вычислительными машинами.

В работе [2] мы исследовали ту же самую задачу в том случае, когда масса m является заданной функцией от времени, $R=$пост. и $\varphi=\omega t+\varphi_0$.

В настоящей работе мы исследуем эту задачу в том случае, когда масса m и величины (1) являются заданными аналитическими функциями от времени t.