ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии, Гос. изд. иностр. лит., М., 1947.
2. Торонджадзе А. Ф. Об использовании эмпирического закона распределения плотностей поглощающего вещества перпендикулярно галактической плоскости для учета поглощения. Бюлл. Абаст. астрофиз. обс. 1959, 24, 117.

აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 24. 1959
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 24, 1959

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

Р. М. ДЗИГВАШВИЛИ

Определение параметров функции распределения скоростей различных составляющих имеет важное значение для изучения многих вопросов кинематики и динамики Галактики. Параметры эллипсоида скоростей обычно определяются на основе вычисления моментов скоростей различных порядков. При этом, при вычислении моментов следует пользоваться данными о звездах, расположенных в достаточно малой окрестности рассматриваемой точки Галактики. В случае, когда объекты расположены на больших расстояниях друг от друга, моменты, вычисленные при условии объединения всех объектов в одну группу, не могут характеризовать движение центроидов и распределение скоростей в рассматриваемой точке Галактики и поэтому мало пригодны в качестве характеристик локальных движений этих объектов.

Наиболее подходящим материалом для исследования кинематических закономерностей Галактики являются данные о движениях и расстояниях тех объектов Галактики, которые заполняют достаточно большие пространства с довольно большой пространственной плотностью. В таком случае имеется возможность сгруппировать данные относительно объектов, расположенных в окрестностях различных точек Галактики и вычислить кинематические параметры для каждой отдельной точки. Знание значений указанных параметров для различных точек дает возможность составить представление о характере зависимости кинематических параметров от пространственных координат, что и является наиболее желательным результатом подобных исследований. При современных наблюдательных средствах накопление материала в достаточно больших объемах Галактики требует наблюдения объектов с большой светимостью. Но объекты с большими светимостями обычно распространены в Галактике со сравнительно малыми пространственными плотностями, что значительно затрудняет группирование данных относительно объектов, расположенных в близких окрестностях тех или иных точек Галактики.

Шаровые скопления являются именно такими объектами, которые наблюдаются в весьма большом объеме Галактики и предоставляют возможность исследования зависимости кинематических элементов от пространственных координат. Но малочисленность шаровых скоплений затрудняет группирование данных об объектах, расположенных в окрестностях данной точки Галактики, так как в любой достаточно малый объем попадает слишком малое количество шаровых скоплений, для того чтобы уверенно определить те или иные средние от компонентов движений. Для шаровых скоплений нам известны лучевые скорости и расстояния,

определенные фотометрическим путем. Эти данные неоднократно исполь-
зовались для изучения кинематики системы шаровых скоплений. Но ре-
зультаты всех работ отягчены ошибками, проистекающими или объеди-
нением в группы или очень малого количества объектов или объектов,
расположенных на очень больших расстояниях друг от друга. Для дина-
мической интерпретации полученных результатов часто, уже после опреде-
ления численных значений параметров, используются какие-нибудь упро-
щающие предположения или существующие динамические теории.

По нашему мнению, такие упрощающие допущения или результаты существующих теорий динамики звездных систем следует положить в основу определений кинематических параметров системы шаровых скоплений. Настоящая работа посвящается рассмотрению вопроса об определении кинематических параметров именно в этом аспекте.

В дальнейшем мы предположим, что для динамического описания характера движения шаровых скоплений справедливы результаты динамики нестационарной осесимметричной Галактики, полученные С. Чандрасекаром [1], при допущении, что распределение скоростей является функцией полинома второй степени относительно скоростей. Мы предположим, что эта функция является экспоненциальной. Рассуждая в общих чертах, можно представить себе путь решения задачи следующим образом. Согласно результатам теории и нашему предположению для функции распределения скоростей, имеем

$$\psi(u'v'w')=e^{-\theta}, \tag{1}$$

где

$$\theta=a_{200}u'^2+a_{020}v'^2+a_{002}w'^2+2a_{110}u'v'+2a_{101}u'w'+2a_{011}v'w' \tag{2}$$

Если преобразуем согласно обычной методике и определим функцию распределения лучевых скоростей, получим

$$\psi(v_R)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(v_R-v_{100})^2}{2\sigma^2}}, \tag{3}$$

где

$$v_{100}=v_R$$

$$\begin{aligned}\sigma^2=\mu_{200}\cos^2 b\cos^2(l-l_0)+\mu_{020}\cos^2 b\sin^2(l-l_0)+\mu_{002}\sin^2 b+\\+2\mu_{100}\cos^2 b\cos(l-l_0)\sin(l-l_0)+2\mu_{101}\cos b\sin b\cos(l-l_0)+\\+2\mu_{011}\cos b\sin b\sin(l-l_0)\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\mu_{200}, \mu_{020}\dots$ являются центральными моментами скорости шаровых скоплений.

v_{101} и σ^2 содержат нужные нам неизвестные параметры. Если для некоторого количества шаровых скоплений известны из наблюдений v_R и пространственные координаты, то применением некоторых подходящих способов математической статистики можно найти наиболее подходящие значения неизвестных параметров, наилучшим образом соответствущие наблюденным данным, т. е. для решения поставленного вопроса будем иметь дело с обычной параметрической задачей математической статистики.

Ниже даются конкретные выражения для всех нужных функций, описан способ решения задачи и на основе данных получены числовые значения некоторых кинематических параметров.

Назовем фундаментальной системой прямоугольную координатную систему x, y, z, с началом в центре Галактики. За плоскость xoy примем плоскость Галактики. Ось x направим от Солнца к центру Галактики, y под 90° к направлению x, z — к полюсу Галактики.

Введем следующие обозначения:

x, y, z — координаты объекта в фундаментальной координатной системе,
u, v, w — компоненты скорости объекта в фундаментальной системе,
u_0, v_0, w_0 — компоненты скорости центроида окрестности объекта в фундаментальной системе,
$x_\odot, y_\odot, z_\odot$ — координаты Солнца в фундаментальной системе,
$u_\odot, v_\odot, w_\odot$ — компоненты скорости Солнца в фундаментальной системе,
x^+, y^+, z^+ — координаты объекта относительно Солнца,
$u^+ v^+ w^+$ — компоненты скорости объекта относительно Солнца,
u', v', w' — компоненты скорости объекта относительно его же центроида,
$u'_\odot, v'_\odot, w'_\odot$ — компоненты скорости Солнца относительно его же центроида,
v_R^+, v_l^+, v_b^+ — компоненты скорости объекта относительно Солнца в сферической координатной системе,
v'_R, v'_l, v'_b — компоненты скорости объекта относительно его же центроида в сферической системе.

Заметим, что все прямоугольные координатные системы ориентированы так же как фундаментальная система

Нетрудно сообразить, что компоненты скорости объекта относительно Солнца в сферической системе можно представить так:

$$\left.\begin{aligned}V_R^+&=U^+\cos b\cos(l-l_0)+V^+\cos b\sin(l-l_0)+W^+\sin b,\\V_l^+&=-U^+\sin(l-l_0)+V^+\cos(l-l_0),\\V_b^+&=-U^+\sin b\cos(l-l_0)-V^+\sin b\sin(l-l_0)+W^+\cos b.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Согласно нашему обозначению:

$$\left.\begin{aligned}U^+&=U_0+U'-U_\odot^\circ-U'_\odot,\\V^+&=V_0+V'-V_\odot^\circ-V'_\odot,\\W^+&=W_0+W'-W_\odot^\circ-W'_\odot.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если выражения (6) подставим в (5), то после некоторого преобразования получим

$$\left.\begin{aligned}V_R^+-V'_R&=(U_0-U_\odot^\circ)\cos b\cos(l-l_0)+(V_0-V_\odot^\circ)\cos b\sin(l-l_0)+\\&+(W_0-W_\odot^\circ)\sin b-U'_\odot\cos b\cos(l-l_0)-V'_\odot\cos b\sin(l-l_0)-\\&-W'_\odot\sin b;\\V_l^+-V'_l&=-(U_0-U_\odot^\circ)\sin(l-l_0)+(V_0-V_\odot^\circ)\cos(l-l_0)+\\&+U'_\odot\sin(l-l_0)-V'_\odot\cos(l-l_0),\\V_b^+-V'_b&=-(U_0-U_\odot^\circ)\sin b\cos(l-l_0)-(V_0-V_\odot^\circ)\sin b\sin(l-l_0)+\\&+(W_0-W_\odot^\circ)\cos b+U'_\odot\sin b\cos(l-l_0)+V'_\odot\sin b\sin(l-l_0)-W'_\odot\cos b\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$U_0-U_\odot^\circ$, $V_0-V_\odot^\circ$, $W_0-W_\odot^\circ$ — являются разностями компонентов скоростей центроидов окрестности объекта и окрестности Солнца. Для выражения $U_0, V_0, W_0, U_\odot^\circ, V_\odot^\circ$ и $W_\odot^\circ$, согласно Чандрасекару [1] имеем:

$$
\left.
\begin{aligned}
U_0 &= \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi}\,x + \frac{\beta y}{\varphi^2 + k_2 (x^2 + y^2)},\\
V_0 &= \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi}\,y - \frac{\beta x}{\varphi^2 + k_2 (x^2 + y^2)}\\
W_0 &= \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi}\,z.
\end{aligned}
\right\} \tag{8}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
U_{\odot}^{\circ} &= \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\,x_{\odot} + \frac{\beta y_{\odot}}{\varphi^2 + k_2 (x_{\odot}^2 + y_{\odot}^2)},\\
V_{\odot}^{\circ} &= \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\,y_{\odot} - \frac{\beta x_{\odot}}{\varphi^2 + k_2 (x_{\odot}^2 + y_{\odot}^2)}\\
W_{\odot}^{\circ} &= \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi}\,z_{\odot}.
\end{aligned}
\right\} \tag{9}
$$

В нашей фундаментальной системе

$$
\left.
\begin{aligned}
x_{\odot} &= -R_{\odot},\ y_{\odot} = z_{\odot} = 0,\\
x &= -R_{\odot} + r\cos b\cos(l - l_0),\\
y &= r\cos b\sin(l - l_0),\\
z &= r\sin b.
\end{aligned}
\right\} \tag{10}
$$

Здесь $R_{\odot}$ обозначает расстояние Солнца от центра Галактики, r — расстояние от Солнца до объекта, l и b являются галактическими сферическими координатами объекта.

Принимая во внимание (8), (9), и (10), после некоторых преобразований получим

$$
U_0 - U_{\odot}^{\circ} = \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi}\,r\cos b\cos(l - l_0) + \frac{\beta r\cos b\sin(l - l_0)}{\varphi^2 + k_2 R_{\odot}^2 + k_2 r^2\cos^2 b - 2k_2 R_{\odot} r\cos b\cos(l - l_0)} - \tag{11}
$$

$$
V_0 - V_{\odot}^{\circ} = \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi}\,r\cos b\sin(l - l_0) - \frac{-\beta R_{\odot} + \beta r\cos b\cos(l - l_0)}{\varphi^2 + k_2 R_{\odot}^2 + k_2 r^2\cos^2 b - 2k_2 R_{\odot} r\cos b\cos(l - l_0)} - \frac{-\beta R}{(\varphi^2 + k_2 R_{\odot}^2)}. \tag{12}
$$

$$
W_0 - W_{\odot}^{\circ} = \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi}\,r\sin b. \tag{13}
$$

Используя выражения (11), (12) и (13) и подставляя их в (7), получим

$$
V_R^{+} - V'_R = \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi}\,r + \beta R_{\odot}\cos b\sin(l - l_0)\times
$$

$$
\times\left[\frac{1}{\varphi^2 + k_2 R_{\odot}^2 + k_2 r^2\cos^2 b\cdot 2k_2 R_{\odot} r\cos b\cos(l - l_0)} - \frac{1}{\varphi^2 + k_2 R_{\odot}^2}\right] -
$$

$$
- U'_{\odot}\cos b\cos(l - l_0) - V'_{\odot}\cos b\sin(l + l_0) - U'_{\odot}\sin b, \tag{14}
$$

$$
V_l^{+} - V'_l = \frac{\beta r\cos b}{\varphi^2 + k_2 P_{\odot}^2 + k_2 r^2\cos^2 b - 2k_2 R_{\odot} r\cos b\cos(l - l_0)} +
$$

$$
+ \beta R_{\odot}\cos(l - l_0)\left[\frac{1}{\varphi^2 + k_2 R_0^2 + k_2 r^2\cos^2 b - 2k_2 r R_{\odot}\cos b\cos(l - l_0)} - \frac{1}{\varphi^2 + k_2 R_{\odot}^2}\right], \tag{15}
$$

$$
V_b^{+} - V'_b = -\beta R_{\odot}\sin b\sin(l - l_0)\times
$$

$$
\times\left[\frac{1}{\varphi^2 + k_2 R_{\odot}^2 + k_2 r^2\cos^2 b - 2k_2 r K_{\odot}\cos b\cos(l - l_0)} - \frac{1}{\varphi^2 + k_2 R_{\odot}^2}\right] +
$$

$$
+ U'_{\odot}\sin b\cos(l - l_0) + V'_{\odot}\sin b\sin(l - l_0) - W'_{\odot}\cos b. \tag{16}
$$

Согласно (14)

$$
V_{100} = \bar{V}'_R = \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi}\,r + \beta R_{\odot}\cos b\sin(l - l_0)\times
$$

$$
\times\left[\frac{1}{\varphi^2 + k_2 R_{\odot}^2 + k_2 r^2\cos^2 b - 2k_2 R_{\odot} r\cos b\cos(l - l_0)} - \frac{1}{\varphi^2 + k_2 R_{\odot}^2}\right] -
$$

$$
- U'_{\odot}\cos b\cos(l - l_0) - V'_{\odot}\cos b\sin(l - l_0) - W'_{\odot}\sin b. \tag{17}
$$

Известно [2], что центральные моменты

$$
\mu_{ijk} = \frac{A_{ijk}}{A}, \tag{18}
$$

где

$$
A = \begin{vmatrix} a_{200} & a_{110} & a_{101}\\ a_{110} & a_{020} & a_{011}\\ a_{101} & a_{011} & a_{002} \end{vmatrix}, \tag{19}
$$

а вз. A_{ijk} —соответствующий минор A детерминанта.

В случае нестационарной Галактики с осевой симметрией коэффициенты a_{ijk} выражаются так [1].

$$
a_{200} = \varphi^2 + k_2 y^2,\ a_{020} = \varphi^2 + k_2 x^2,\ a_{002} = \varphi^2,\ a_{110} = -k_2,\ a_{101} = a_{011} = 0.
$$

Тогда по формуле (18) для центральных моментов пелучим

$$\left.\begin{aligned} &\mu_{200}=\frac{\varphi^2+k_2x^2}{\varphi^2[\varphi^2+k_2(x^2+y^2)]}, && \mu_{020}=\frac{\varphi^2+k_2y^2}{\varphi^2[\varphi^2+k_2(x^2+y^2)]},\\ &\mu_{110}=\frac{k_2xy}{\varphi^2[\varphi^2+k_2(x^2+y^2)]}, && \mu_{011}=0\\ &\mu_{101}=0 && \mu_{002}=\frac{1}{\varphi^2}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Если (20) подставим в (4), тогда после некоторых преобразований окончательно получим

$$\sigma^2=\frac{\varphi^2\cos^2 b+k_2r^2\cos^4 b-2k_2R_{\odot}r\cos^3 b\cos(l-l_0)+k_2R_{\odot}^2\cos^2 b\cos^2(l-l_0)}{\varphi^2[\varphi^2+k_2R_{\odot}^2+k_2r^2\cos^2 b-2k_2R_{\odot}r\cos b\cos(l-l_0)}+$$

$$+\frac{1}{\varphi^2}\sin^2 b \tag{21}$$

Следовательно параметры V_{100} и σ^2 функции распределения лучевых скоростей выражаются формулами (17) и (21).

Величины σ и V_{100} содержат неизвестные параметры φ^2, β, $\varphi^{\cdot}$, k_2, $U_{\odot}$, $V_{\odot}$ $W_{\odot}$.

Наша задача заключается в том, чтобы определить эти параметры по данным лучевых скоростей шаровых скоплений т. е. построить функцию распределения скоростей этих объектов.

Для определения этих неизвестных параметров мы применим хорошо известный метод математической статистики—метод максимума правдоподобия.

$\psi\ (V_R)\,d\ V_R$ есть вероятность того, что шаровое скопление имеет лучевую скорость, заключенную между V_R и V_R+dV_R.

Вероятность того, что все шаровые скопления имеют наблюденные лучевые скорости, будет

$$L=\prod_{i=1}^{n}\psi(V_{Ri})\,dV_{Ri}. \tag{22}$$

Здесь произведение распространяется на все шаровые скопления, лучевые скорости которых известны нам.

Выражение (22) можем написать так

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}e^{-\frac{(V_{Ri}-V_{100})^2}{2\sigma_i^2}}dV_{Ri}. \tag{23}$$

Логарифмируя выражение (22) получим

$$\lg L=\sum_{i=1}^{n}\lg\ \psi(V_{Ri})\,dV_{Ri}. \tag{24}$$

Мы должны определить те значения параметров φ^2, β, $\varphi^{\cdot}$, k_2, $U'_{\odot}$, $V'_{\odot}$ и $W'_{\odot}$, при которых функция $\lg L$ достигает своего максимального значения т. е. решить систему уравнений

$$\frac{\partial\lg L}{\partial\theta e}=0,$$

где

$$\theta_e=\varphi^2,\ \beta,\ k_2,\ \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi},\ U'_{\odot},\ V'_{\odot},\ W'_{\odot}. \tag{25}$$

Из (25) получим

$$\frac{\partial\lg L}{\partial\theta e}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\partial\psi}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\theta e}+\frac{\partial\psi}{\partial V_{100}}\cdot\frac{dV_{100}}{\partial\theta e}}{\psi(V_R)}=0. \tag{26}$$

Можно вычислить, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(V_R-V_{100})^2}{2\sigma^2}}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{(V_R-V_{100})^2}{2\sigma^4}\right], \tag{27}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial V_{100}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(V_R-V_{100})^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{V_R-V_{100}}{\sigma^2}. \tag{28}$$

Подставляя (27) и (28) в (26), получим

$$\frac{\partial\lg L}{\partial\theta e}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{(V_R-V_{100})^2}{2\sigma^4}\right)\frac{d\sigma^2}{\partial\theta e}+\frac{V_R-V_{100}}{\sigma^2}\cdot\frac{\partial V_{100}}{\partial\theta e}\right]=0. \tag{29}$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\varphi^2}=X\ \frac{\varphi^2}{k_2}+R_{\odot}^2=y,\quad \frac{\beta}{k_2}=z,\ \frac{\varphi^{\cdot}}{\varphi}=u,\\ &R_{\odot}^2\cos^2 b\sin^2(l-l_0)=a^2,\ r^2\cos^2 b-2R_{\odot}r\cos b\cos(l-l_0)=b,\\ &-U'_{\odot}\cos b\cos(l-l_0)-V'_{\odot}\cos b\sin(l-l_0)-W'_{\odot}\sin b=c. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Тогда выражения для σ^2 и V_{100} принимают вид:

$$\sigma^2=X-\frac{a^2x}{y+b},\ V_{100}=ur-\frac{zab}{y(y+b)}+c. \tag{31}$$

В новых обозначениях

$$\theta e=x,\ y,\ z,\ u,\ u'_{\odot},\ V'_{\odot}\ W'_{\odot}.$$

Принимая во внимание (30) и (31), после некоторых преобразований (29), получим систему уравнений

$$\frac{1}{n}\sum\frac{(V_R-V_{100})^2\,(y+b)}{y+b-a^2}=x, \qquad \mathrm{I}$$

$$xy\sum\frac{a^2}{(y+b\ a^2)(y+b)}+y\sum\frac{a^2(V_R-V_{100})^2}{(y+b-a^2)^2}+$$

$$+2z\sum\frac{(V_R-V_{100})\,ab}{(y+b-a^2)(y+b)}=0, \qquad \mathrm{II}$$

$$\sum\frac{abV_R}{v+b-a^2}-u\sum\frac{abr}{y+b-a^2}+z\sum\frac{a^2b^2}{(y+b-a^2)(y+b)y}-$$

$$-\sum\frac{abc}{y+b-a^2}=0, \qquad \mathrm{III}$$

$$\sum\frac{(y+b)V_R r}{y+b-a^2}-u\sum\frac{(y+b)\,r^2}{y+b-a^2}+z\sum\frac{abr}{(y+b-a^2)\,y}-$$

$$-\sum\frac{(y+b)\,rc}{y+b-a^2}=0. \qquad \mathrm{IV}$$

$$\sum\frac{(y+b)V_R}{y+b-a^2}\cos b\cos(l-l_0)-u\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}r\cos b\cos(l-l_0)+$$

$$+\frac{z}{y}\sum\frac{ab}{y+b-a^2}\cos b\cos(l-l_0)+u'_{\odot}\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}\cos^2 b\cos^2(l-l_0)+$$

$$+V'_{\odot}\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}\cos^2 b\cos(l-l_0)\sin(l-l_0)+$$

$$+W'_{\odot}\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}\cos b\sin b\cos(l-l_0)=0, \qquad (\mathrm{V})$$

$$\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}V_R\cos b\sin(l-l_0)-u\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}r\cos b\sin(l-l_0)+$$

$$+\frac{z}{y}\sum\frac{ab}{y+b-a^2}\cos b\sin(l-l_0)+u'_{\odot}\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}\cos^2 b\cos(l-$$

$$-l_0)\sin(l-l_0)+V'_{\odot}\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}\cos^2 b\sin^2(l-l_0)+$$

$$+W'_{\odot}\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}\cos b\sin(l-l_0)\sin b=0, \qquad \mathrm{VI}$$

$$\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}V_R\sin b-u\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}r\sin b+\frac{z}{y}\sum\frac{ab}{y+b-a^2}\sin b+$$

$$+u'_{\odot}\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}\sin b\cos b\cos(l-l_0)+$$

$$+V'_{\odot}\sum\frac{y+b}{y+b-a^2}\sin b\cos b\sin(l-l_0)+W'_{\odot}\sum\frac{y+b}{y'+b-a^2}\sin^2 b=0. \qquad \mathrm{VII}$$

(32)

Решение системы уравнений (32) относительно неизвестных параметров $x, y, z, u'_{\odot}, v'_{\odot}, w'_{\odot}$, дает ответ на поставленную задачу, но ввиду сложности этих уравнений мы решили упростить задачу применением способа последовательных приближений. II уравнение (32) разложим в окрестности y_0 в ряд Тейлора с сохранением членов только первого порядка малости.

$$-xy_0\sum\frac{a^2}{(y_0+b-a^2)\,(y+b)}+y_0\sum\frac{a^2(V_R-V_{100})^2}{y_0+b-a^2}+$$

$$+2z\sum\frac{(V_R-V_{100})\,ab}{(y_0+b)\,(y_0+b-a^2)}+\Big[-x\sum\frac{a^2}{(y_0+b-a^2)\,(y_0+b)}+$$

$$+xy_0\sum\frac{a^2}{(y_0+b-a^2)\,(y+b)}\left(\frac{1}{y_0+b-a^2}+\frac{1}{y_0+b}\right)+$$

$$+\sum\frac{a^2(V_R-V_{100})^2}{(y_0+b-a^2)}-2y_0\sum\frac{a^2(V_R-V_{100})^2}{(y_0+b-a^2)^2}-$$

$$-\frac{2z}{y_0}\sum\frac{a^3b\,(V_R-V_{100})}{(y_0+b-a^2)(y_0+b)}-2z\sum\frac{a^3b\,(V_R-V_{100}}{(y_0+b-a^2)^2\,(y+b)^2}-$$

$$-2z\sum\frac{ab\,(V_R-V_{100})}{(y_0+b-a^2)^2\,(y_0+b)}-$$

$$-2z\sum\frac{ab\,(V_R-V_{100})}{(y_0+b-a^2)\,(y_0+b)^2}-\frac{2z^2}{y_0^2}\sum\frac{a^2b^3}{(y_0+b-a^3)\,(y_0+b)^2}-$$

$$-\frac{2z^2}{y_0}\sum\frac{a^2b^3}{(y_0+b-a^3\ (y_0+b)^3}\Big]\Delta y=0. \qquad (33)$$

Введем обозначения

$$\frac{ab}{y+b-a^2}=\varepsilon_1,\ \frac{ab}{y+b}=\varepsilon_2,\ \frac{y+b}{y+b-a^2}=\varepsilon_3,\ \frac{1}{y+b-a^2}=\varepsilon_4,$$

$$\frac{1}{y+b}=\varepsilon_5,\ \cos b\cos(l-l_0)=\varepsilon_6,\ \cos b\sin(l-l_0)=\varepsilon_7,\ \sin b=\varepsilon_8. \qquad (34)$$

Принимая во внимание обозначения (34), систему уравнений (32) и (33), можем написать в окончательном виде

$$\frac{1}{n}\ \Sigma(V_R-V_{100})^2\,\varepsilon_3=x, \qquad \mathrm{I}$$

$$-u\,\Sigma\varepsilon_1 r+z\frac{1}{y}\,\Sigma\,\varepsilon_1\varepsilon_2+\Sigma\varepsilon_1\,(V_R-c)=0, \qquad \mathrm{II}$$

$$-u\,\Sigma\varepsilon_3 r^2+z\frac{1}{y}\,\Sigma\varepsilon_1 r+\Sigma r\,\varepsilon_3\,(V_R-c)=0, \qquad \mathrm{III}$$

$$-xy\,\Sigma a^2\varepsilon_4\varepsilon_5+y\,\Sigma a^2\varepsilon_4^2(V_R-V_{100})^2+2z\,\Sigma ab\,\varepsilon_4\varepsilon_5(V_R-V_{100})+$$

$$+[-x\,\Sigma a^2\varepsilon_4\varepsilon_5+xy\,\Sigma a^2\varepsilon_4\varepsilon_5(\varepsilon_4+\varepsilon_5)+\Sigma a^2\varepsilon_4^2(V_R-V_{100})^2-$$

$$-2y\,\Sigma a^2\varepsilon_4^3(V_R-V_{100})^2-\frac{2z}{y}\,\Sigma a^2b\,\varepsilon_4^2(V_R-V_{100})- \qquad (35)$$

$$-2z\Sigma a^2 b\,\varepsilon_4^2\varepsilon_5^2(V_R-V_{100})-2z\Sigma ab\,\varepsilon_4^2\varepsilon_5\,(V_R-V_{100})-$$

$$-2z\Sigma ab\,\varepsilon_4\varepsilon_5^2\,(V_R-V_{100})-\frac{2z^2}{y^2}\,\Sigma a^2b^2\varepsilon_4\varepsilon_5^2-$$

$$-\frac{2z^2}{y}\,\Sigma\varepsilon_4\varepsilon_5^2a^2b^2]\,\Delta y=0, \qquad \mathrm{IV}$$

$$\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_6V_R-u\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_6r+\frac{z}{r}\,\Sigma\varepsilon_1\varepsilon_6+U'_\odot\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_6^2+V'_\odot\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_6\varepsilon_7+$$

$$+W'_\odot\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_6\varepsilon_8=0. \qquad \mathrm{V} \qquad (35)$$

$$\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_7V_R-u\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_7r+\frac{z}{y}\,\Sigma\varepsilon_1\varepsilon_7+U'_\odot\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_6\varepsilon_7+V'_\odot\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_7^2+$$

$$+W'_\odot\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_7\varepsilon_8=0, \qquad \mathrm{VI}$$

$$\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_8V_R-u\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_9r+\frac{z}{y}\,\Sigma\varepsilon_1\varepsilon_8+U'_\odot\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_6\varepsilon_8+V'_\odot\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_7\varepsilon_8+$$

$$+W'_\odot\Sigma\varepsilon_3\varepsilon_8^2=0, \qquad \mathrm{VII}$$

Решение системы (35) относительно x, y, z, u, $U_\odot$, $V'_\odot W'_\odot$, возможно выполнить по методу интерации. Сперва возьмем приближенные (нулевые) значения для параметров y, $U'_\odot$, $V'_\odot$, $W'_\odot$. Зная нулевые значения этих параметров из уравнений I, II, III, можем определить значения параметров x, u, z. После этого по y_0, x, u, z из уравнений IV определим Δy т. е. получим первое приближение для y. Потом по y, x, u, z (для y возьмем уже исправленное значение) легко можно решить систему уравнений V, VI, VII, относительно $U'_\odot$, $V'_\odot$, $W'_\odot$. После этого начнем второе приближение и для параметров y, $U'_\odot$, $V'_\odot$, $W'_\odot$, возьмем значения, полученные в результате первого решения уравнений (35). Наблюденные данные о шаровых скоплениях мы взяли из работ [5] и [6]. В таблице 1 представлены эти данные.

Решение уравнений (35) выполним на основе этого материала. Начальное значение для y мы заимствовали из работы [3], для сферических подсистем, а для компонентов скорости Солнца $U_\odot$, $V'_\odot$, $W'_\odot$ взята стандартная скорость Солнца.

Следовательно, вначале мы взяли значения параметров:

$$Y=95,$$
$$U'_\odot=9.4,$$
$$V'_\odot=15.5,$$
$$W'_\odot=7.1.$$

Решением системы (35) получили:

Таблица 1

№№ пп	NGC	r	V_R	$l-l_0$	b
1	1851	13.2	+291	−113.30	−34.0
2	M (79) 1904	16.6	+231	−130.30	−28.0
3	2298	21.9	+ 64	−112.00	−15.0
4	2419	69.0	+ 14	−117.12	+26.35
5	4147	21.9	+191	− 98.54	+77.54
6	M (68) 4590	11.0	−116	− 56.36	+35.48
7	M (53) 5924	19 1	−112	− 18.54	+78.42
8	M (3) 5272	9.6	−150	−317.30	+77.18
9	5634	21.9	− 63	− 14.12	+48.00
10	5694	52.0	−187	− 25.36	+29 24
11	M (5) 5904	9.1	+ 45	+ 7.00	+45.24
12	5986	14.5	+ 2	− 20.00	+12.12
13	M (80) 6093	10.5	+ 18	− 4.12	+18.6
14	M (13) 6205	6.6	−228	−299. 6	+39.48
15	M (12) 6218	5.8	+ 36	+ 18.30	+24.48
16	6229	25.0	− 50	−284.42	+39.24
17	M (10) 6254	5.5	+ 73	+ 17.54	+21.36
18	M (62) 6266	6.3	− 81	− 3.36	+ 5.54
19	M (18) 6273	5.8	+102	− 0,18	+ 8.00
20	6284	17.4	+ 22	+ 1.12	+ 8.30
21	6293	13.8	− 73	+ 0.24	+ 6.30
22	6304	4.8	− 98	− 1.24	+ 4.00
23	M (9) 6333	6.3	+224	+ 8.18	+ 9.18
24	M (92) 6311	9.0	−118	−280.42	+33.54
25	6356	10.0	+ 31	+ 9.30	+33.54
26	M (14) 6402	6.3	−131	+ 24.00	+ 8.48
27	6440	2.6	−133	+ 10.24	+ 2.18
28	6441	6.9	− 70	− 3.36	− 6.18
29	6624	12.0	+ 69	+ 5.24	− 9.18
30	M (28) 6626	4.0	+ 1	+ 30.30	− 7.00
31	M (69) 6637	6.0	+ 95	+ 4.18	−11.36
32	6638	14.5	− 14	+ 10.24	− 8.36
33	6652	15.8	−124	+ 4.00	−12.42
34	M (22) 6656	3.0	−148	+ 12.30	− 9.00
35	M (70) 6681	20.0	+198	+ 5.30	−13.54
36	6712	76	−131	+ 28.00	− 5.48
37	M (54) 6715	10.5	+107	+ 8.18	−15.30
38	6723	10.5	− 3	+ 2.36	−18.42
39	M (56) 6779	13.8	−154	−294.48	+ 7.12
40	M (75) 6864	21.9	−222	+ 23.00	−27.12
41	6934	16.6	−360	−304.54	−20.00
42	M (72) 6981	191	−255	−321.54	−34.6
43	7006	46.0	−348	−293.12	−20.30
44	M (15) 7018	12.0	−114	−291.42	−28.18
45	M (2) 7089	14.5	− 3	−303. 6	−36.54
46	M (30) 7099	12.61	−164	+ 30 6	−48.18

$$x=18000,$$
$$y=102,$$
$$z=3590,$$
$$u=-2.7, \qquad (I)$$
$$U'_\odot=16,$$
$$V'_\odot=74,$$
$$W'_\odot=10.$$

Рассмотрение этих величин показывает, что значения компонентов скорости Солнца, относительно центроида шаровых скоплений в окрестностях Солнца, резко изменились по сравнению с первоначальным значением. Это следовало ожидать, так как для начального значения мы взяли стандартные элементы движения Солнца, которые получены главным образом по близким к Солнцу звездам.

В результате во втором приближении (35) мы получили

$$\begin{aligned} x&=21000, & U'_{\odot}&=17,\\ y&=115, & V'_{\odot}&=51,\\ z&=4000, & W'_{\odot}&=5.\\ u&=-3.0, \end{aligned} \tag{II}$$

Для лучшего уяснения вопроса о влиянии начальных значений на окончательные результаты при небольшом количестве степеней приближений, уравнения (35) мы решили так же для начальных данных:

$$y=87,\ U'_{\odot}=18.7,\ V'_{\odot}=74.4,\ W'_{\odot}=9.9 \tag{37}$$

В результате решения мы получили:

$$\begin{aligned} x&=21900, & U'_{\odot}&=22,\\ y&=97, & V'_{\odot}&=46,\\ z&=3600, & W'_{\odot}&=6.\\ u&=-3.2, \end{aligned} \tag{III}$$

Рассмотрение этих решений убеждает нас в том, что величина относительного изменения значений параметров сравнительно мала. Ход изменения значений параметров показывает, что дальнейшие приближения при таком ограниченном количестве использованных данных и довольно больших ошибках определений расстояний, не могут дать желательных результатов в смысле уточнения значений параметров. Это легко понять если принять во внимание, что в уравнения (35) входит бельшое число неизвестных параметров, которые очень сложно связаны между собой. Поэтому мы решили остановиться на средних значениях всех решений:

$$\begin{aligned} x&=20000\pm 1140, & U'_{\odot}&=18\pm 2,\\ y&=105\pm 6, & V'_{\odot}&=57\pm 9,\\ z&=3730\pm 135,\\ U&=-3.0\pm 0.1, & W'_{\odot}&=7\pm 2. \end{aligned} \tag{38}$$

Средние квадратичные ошибки определения параметров, указанные в (38), вычислены по сходимости результатов при различных данных начального приближения.

Займемся теперь вычислением некоторых других кинематических параметров, характеризующих движения шаровых скоплений и связанных с вычисленными нами постоянными. Из динамики звездных систем известно, что скорость центроида

$$V_{\theta}=\frac{C_3R}{C_1+C_2R^2}, \tag{39}$$

а дисперсии скоростей выражаются так:

$$\sigma^2_R=\frac{1}{2C_1},\quad \sigma^2_{\theta}=\sigma^2_R\cdot\frac{1}{1+\frac{C_2}{C_1}R^2}. \tag{40}$$

В наших обозначениях

$$V_{\theta}=\frac{Rz}{y-R^2_{\odot}+R^2},\ \sigma^2_R=\frac{x}{2},\ \sigma^2_{\theta}=\sigma^2_R\,\frac{y-R^2_{\odot}}{y+R^2-R^2_{\odot}}. \tag{41}$$

Легко можно вычислить, что

$$R_{max}=\sqrt{y-R^2_{\odot}},\ V_{\theta\,max}=\frac{z}{2}\frac{1}{\sqrt{y-R^2_{\odot}}}\cdot V\theta_{\odot}=\frac{z}{y}R_{\odot}. \tag{42}$$

Значения параметров (38) для величин (41) и (42) дают

$$\begin{aligned} V_{\theta\,max}&=250\pm 17,\\ V\theta_{\odot}&=250\pm 11,\\ R_{max}&=7.3\pm 0.4,\\ \sigma_{R\odot}&=101\pm 6,\\ \sigma\theta_{\odot}&=73\pm 5,\\ \frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_R}&=0.72\pm 0.02. \end{aligned} \tag{43}$$

Для параметров C_1, C_2, C_3 получаются.

$$\begin{aligned} C_1&=4,93\cdot 10^{-5},\\ C_2&=9,27\cdot 10^{-7},\\ C_3&=3,46\cdot 10^{-3}. \end{aligned} \tag{44}$$

Рассмотрение (43) и (44) дает возможность сделать следующие заключения.

1. Максимальная скорость центроида шаровых скоплений достигается в окрестностях Солнца т. е. в 7—8 КПС от центра Галактики (заметим, что для R_{max} в последнее время принято значение 1 кпс).

2. Значения для дисперсии скоростей и для отношения полуосей эллипсоида получаются в хорошем согласии с общепринятыми значениями этих величин для сферических подсистем.

Так как, использованные нами объекты малочисленны и решение уравнений (35) приближенно, значения (38) и (43) мы рассматриваем как предварительные. Несмотря на это полагаем, что вычисленные нами значения постоянных находятся в достаточно хорошем соответствии с нашими представлениями о кинематике Галактики. Приведем несколько соображений в пользу этого утверждения.

Расстояние, при котором скорость центроида достигает максимального значения, в наших обозначениях, выражается формулой

$$R_{max} = \sqrt{y - R_{\odot}^2}. \qquad (50)$$

Для того, чтобы получить значение $R_{max} \leq 2$ кпс должно

$$y - R_{\odot}^2 \leqq 4.$$

С другой стороны мы имеем

$$\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_R^2} = \frac{y - R_{\odot}^2}{y} \quad \text{(для окрестности Солнца)}. \qquad (52)$$

Отсюда

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_R} \leq 0.27;$$

т. е. для отношения осей эллипсоида скоростей получается маловероятное значение.

Для примера вычислим отношение полуосей эллипсоида по данным из работы [4], которые получены также на основе анализа движений шаровых скоплений.

$$\frac{C_1}{C_3} = 0.0020, \quad \frac{C_2}{C_3} = 0.0020, \quad R_{max} = 1 \text{ кпс}. \qquad (54)$$

Если применим формулу

$$\sigma_\theta^2 = \sigma_R^2 \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1} R^2}, \qquad (55)$$

для окрестности Солнца по данным (54) получается

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_R} = 0.14, \qquad (56)$$

что также маловероятно для отношения полуосей эллипсоида скоростей.

Следовательно, определенные нами значения параметров (38), дают более правдоподобные результаты, чем значения (54).

Март, 1958.

THE DETERMINATION OF PARAMETERS OF THE VELOCITU DISTRIBUTION FUNCTION FOR THE GLOBULAR CLUSTERS ON THE BASE OF THE MAXIMUM LIKELIHOOD PRINCIPLE

R. M. DZIGVASHVILY

(Summary)

The data on the globular clusters are taken from the papers (5) and (6) and are represented in the table I. on the base of solution the principal equations (35) the values of the ellipsoid velocity parameters are obtained in (44). The values of some kinematic parameters are given in (43).

March, 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Принципы звездной динамики. Москва, 1948
2. Trumpler R. J. Weaver H. F. Statistical Astronomy: Univ. Califor. Press, 1953.
3. Паренаго П. П. О движениях шаровых звездных скоплений. Астрон. Журн. 1947, 24 167—177.
4. Паренаго П. П. Курс звездной астрономии. 3-е изд. 1954.
5. Lohman W. Die Entfernungen der kugelförmigen Sternhaufen. Zs Aph. 1952, 30, 234
6. Sebastian H. Über die Bahnform der kugelförmigen Sternhaufen. Zs. Aph. 1954, 35, 255