

ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ, КОГДА ПРИТЯГИВАЕМОЕ ТЕЛО ИМЕЕТ ПЕРЕМЕННУЮ МАССУ

Н. Г. МАГНАРАДЗЕ

Е б е д е н и е. Рассмотрим задачу трех тел в том случае, когда их движение происходит на некоторой фиксированной плоскости, при этом двое из них M_1 и M_2 , имеющие постоянные массы m_1 и m_2 , с одинаковой угловой скоростью ω равномерно вращаются около их общего центра тяжести и притягивают по закону притяжения Ньютона третье тело M , имеющего переменную массу m . Массу m мы будем считать настолько малой, что тела M_1 и M_2 не подвергаются притяжению тела M .

Требуется изучить движение точки M относительно подвижной системы координат, одна из осей которой постоянно проходит через точки M_1 и M_2 .

В том частном случае, когда масса m постоянна, эта задача недавно была рассмотрена Стеффенсеном [1]. Для координат движущейся точки им построены степенные ряды по времени t и доказана их сходимости для достаточно малых значений t . При этом для определения коэффициентов разложений неизвестных величин ему удалось построить рекуррентные соотношения, удобные для их вычисления современными вычислительными машинами.

Цель настоящей работы исследовать ту же самую задачу в том случае, когда масса m является заданной функцией от времени.

Пользуясь схемой, предложенной Стеффенсеном [1] и в этом общем случае можно построить рекуррентные соотношения для коэффициентов разложений неизвестных величин, удобные при их вычислении вычислительными машинами.

При этом мы пользуемся несколько более общими мажорантными выражениями для коэффициентов разложений неизвестных функций в степенные ряды относительно времени t , чем Стеффенсен [1]. Это обусловливается тем, что мы исходим из аналогичных общих мажорантных выражений для коэффициентов разложений заданных функций в степенные ряды относительно t .

1. Вывод основных дифференциальных уравнений (6). В основу нашего исследования мы положим уравнения И. В. Мещерского [2]:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2, \quad (1)$$

где масса $m = m(t)$ — заданная функция от времени t , \vec{v} — скорость точки, \vec{F} — равнодействующая внешних сил, приложенных к точке, $\vec{\Phi}_1$ — реактивная сила, обусловленная отделением частиц, а $\vec{\Phi}_2$ — тормозящая сила, обусловленная присоединением частиц к движущейся точке.

Известно, что (см., например, [3]).

$$\vec{\Phi}_1 = \frac{d\mu_1}{dt} (\vec{u}_1 - \vec{v}), \quad \vec{\Phi}_2 = \frac{d\mu_2}{dt} (\vec{u}_2 - \vec{v}), \quad (2)$$

где $\mu_1 = \mu_1(t)$ и $\mu_2 = \mu_2(t)$ суть массы частиц, соответственно, отделившихся и присоединившихся к движущейся точке за промежуток времени $t - t_0$ от начального момента t_0 , $\vec{u}_1 - \vec{v}$ и $\vec{u}_2 - \vec{v}$ суть относительные скорости, соответственно, отделяющихся и присоединившихся частиц.

Очевидно, что

$$m(t) = \mu_0 - \mu_1(t) + \mu_2(t),$$

где μ_0 — масса движущейся точки в начальный момент $t = t_0$.

В дальнейшем мы будем считать, что векторы $\vec{u}_1 - \vec{v}$ и $\vec{u}_2 - \vec{v}$ коллинеарны вектору скорости \vec{v} :

$$\vec{u}_1 - \vec{v} = \lambda_1(t) \vec{v} \quad \text{и} \quad \vec{u}_2 - \vec{v} = \lambda_2(t) \vec{v}, \quad (3)$$

где $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ — заданные функции от времени t (в современной ракетной технике условия (3) называются гипотезой К. Э. Циолковского).

Из (1), (2) и (3) имеем, что

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F} + \lambda \vec{v}, \quad (4)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{m} \left(\lambda_1 \frac{d\mu_1}{dt} + \lambda_2 \frac{d\mu_2}{dt} \right).$$

Заданную фиксированную плоскость мы примем за координатную плоскость с абсолютной системой координат $\xi\Omega\eta$.

В этой системе координат из векторного равенства (4) имеем

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \lambda \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{m} F_\xi, \quad (5)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \lambda \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{m} F_\eta,$$

где F_ξ и F_η суть проекции внешней силы \vec{F} , соответственно, на осях $\Omega\xi$ и $\Omega\eta$.

Пусть теперь точка $M(\xi, \eta)$ притягивается по закону Ньютона двумя точками $M_1(\xi_1, \eta_1)$ и $M_2(\xi_2, \eta_2)$, лежащими на прямой, равномерно вращающейся с угловой скоростью ω около их центра тяжести $M_0(\xi_0, \eta_0)$, где

Тогда

$$\xi_0 = \frac{m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{m_1 + m_2} \quad \text{и} \quad \eta_0 = \frac{m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2}{m_1 + m_2}.$$

и

$$F_\xi = -k^2 m m_1 \frac{(\xi - \xi_1)}{r_1^3} - k^2 m m_2 \frac{(\xi - \xi_2)}{r_2^3},$$

$$F_\eta = -k^2 m m_1 \frac{(\eta - \eta_1)}{r_1^3} - k^2 m m_2 \frac{(\eta - \eta_2)}{r_2^3},$$

где

$$r_1 = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2}.$$

Теперь введем подвижную систему координат $\bar{x}M_0\bar{y}$, начало которой лежит в точке M_0 , а ось $M_0\bar{x}$ совпадает с упомянутой выше вращающейся прямой, полагая

$$\xi = \xi_0 + \bar{x} \cos \omega t - \bar{y} \sin \omega t, \\ \eta = \eta_0 + \bar{x} \sin \omega t + \bar{y} \cos \omega t.$$

Наконец, положим

$$\bar{x} = x - R, \quad \text{и} \quad \bar{y} = y,$$

где $R = M_1 M_0$ — расстояние между точками M_1 и M_0 .

Тогда уравнения движения (5) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \lambda \frac{dx}{dt} - 2\omega \frac{dy}{dt} + k^2 m_1 \frac{x}{r_1^3} + k^2 m_2 \frac{(x-R)}{r_2^3} - \\ - \omega^2 x + \lambda \omega y + R_1 \omega^2 = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \lambda \frac{dy}{dt} + 2\omega \frac{dx}{dt} + k^2 m_1 \frac{y}{r_1^3} + k^2 m_2 \frac{y}{r_2^3} - \\ - \omega^2 y - \lambda \omega x + \omega R_1 \lambda = 0, \end{aligned} \right\} (6)$$

где

$$R = M_1 M_2, \quad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(x-R)^2 + y^2}. \quad (7)$$

Принимая во внимание условия задачи, легко видеть, что

$$\omega^2 = \frac{k^2 (m_1 + m_2)}{R^3} \quad \text{и} \quad R_1 \omega^2 = \frac{k^2 m_2}{R^2}.$$

2. Преобразованные основные уравнения (9) — (11).
Теперь введя обозначения

$$r_1 = r, \quad r_2 = s, \quad r^{-3} = u, \quad s^{-3} = v, \quad (8)$$

для определения величин x , y , r , s , u , v , в силу (6), (7) и (8), получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \lambda \frac{dx}{dt} - 2\omega \frac{dv}{dt} + k^2 m_1 x u + k^2 m_2 (x-R) v - \omega^2 x + \lambda \omega y + \\ + \frac{k^2 m_2}{R^2} = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \lambda \frac{dy}{dt} + 2\omega \frac{dx}{dt} + k^2 m_1 y u + k^2 m_2 y v - \omega^2 y - \lambda \omega x + \\ + \frac{k^2 m_2}{\omega R^2} \lambda = 0, \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} r \frac{du}{dt} + 3u \frac{dr}{dt} &= 0, \\ s \frac{dv}{dt} + 3v \frac{ds}{dt} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2, \\ (x-R)^2 + y^2 &= s^2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Пусть при $t=t_0=0$ имеем

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0, \quad x'(0)=x'_0, \quad y'(0)=y'_0, \quad (12)$$

где x_0, y_0, x'_0 и y'_0 — произвольно заданные конечные числа, удовлетворяющие условиям:

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} > 0 \quad \text{и} \quad s_0 = \sqrt{(x_0 - R)^2 + y_0^2} > 0. \quad (13)$$

Далее, из (8) имеем, что

$$u_0 = r_0^{-3} > 0 \quad \text{и} \quad v_0 = s_0^{-3} > 0.$$

Требуется определить x, y, r, s, u, v как функции от t так, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям (9) — (10), конечным уравнениям (11) и начальным условиям (12) — (14).

3. Вывод основных рекуррентных равенств (26) — (29). Пусть

$$\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n, \quad (15)$$

В дальнейшем мы будем считать, что

$$|\lambda_n| \leq A_0 \frac{H_0^n}{n^2}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (16)$$

где $A_0 > 0, H_0 > 0$ и $\alpha > 1$ — заданные конечные числа.

Очевидно, что степенной ряд (15) сходится при $0 \leq t \leq H_0^{-1}$.

Для определения величин x, y, r, s, u, v положим

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n, & y &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n, & r &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n, \\ s &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n, & u &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n, & v &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$x_1 = x'_0 \quad \text{и} \quad y_1 = y'_0.$$

Подставляя (15) и (17) в уравнения (9) — (11) и приравнявая нулю коэффициенты при $t^n, n=0, 1, 2, \dots$, получим следующую рекуррентную систему для определения коэффициентов степенных рядов (12)

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - \lambda_0 x_1 - 2\omega y_1 + k^2 m_1 x_0 u_0 + k^2 m_2 x_0 v_0 - \omega^2 x_0 + \omega \lambda_0 y_0 + \frac{k^2 m_2}{R^2} &= 0, \\ 2y_1 - \lambda_0 y_1 + 2\omega x_1 + k^2 m_1 y_0 u_0 + k^2 m_2 y_0 v_0 - \omega^2 y_0 - \omega \lambda_0 x_0 + \frac{k^2 m_2}{\omega R^2} \lambda_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0 u_1 + 3u_0 r_1 &= 0, \\ s_0 v_1 + 3v_0 s_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 x'_0 + y_0 y'_0 - r_0 r_1 &= 0, \\ (x_0 - R) x'_0 + y_0 y'_0 - s_0 s_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)x_{n+2} - \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)\lambda_{n-\nu} x_{\nu+1} - 2\omega(n+1)y_{n+1} + k^2 m_1 \sum_{\nu=0}^n x_{\nu} u_{n-\nu} + \\ + k^2 m_2 \sum_{\nu=0}^n x_{\nu} v_{n-\nu} - \omega^2 x_n + \omega \sum_{\nu=0}^n \lambda_{n-\nu} y_{\nu} = 0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)y_{n+2} - \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)\lambda_{n-\nu} y_{\nu+1} + 2\omega(n+1)x_{n+1} + k^2 m_1 \sum_{\nu=0}^n y_{\nu} u_{n-\nu} + \\ + k^2 m_2 \sum_{\nu=0}^n y_{\nu} v_{n-\nu} - \omega^2 y_n - \omega \sum_{\nu=0}^n \lambda_{n-\nu} x_{\nu} + \frac{k^2 m_2}{\omega R^2} \lambda_n = 0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)r_{n-\nu} u_{\nu+1} + 3 \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)u_{n-\nu} r_{\nu+1} &= 0, \quad n \geq 0 \\ \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)s_{n-\nu} v_{\nu+1} + 3 \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)v_{n-\nu} s_{\nu+1} &= 0, \quad n \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n x_{n-\nu} x_{\nu} + \sum_{\nu=0}^n y_{n-\nu} y_{\nu} = \sum_{\nu=0}^n r_{n-\nu} r_{\nu}, \quad n \geq 0 \\ s_0^2 = r_0^2 - 2R x_0 + R^2. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Пользуясь равенствами (12), (13), (14) и (18), из (19) — (21) однозначно определяем $x_2, y_2, r_2, s_2, u_2, v_2$ через произвольно заданные начальные значения x_0, y_0, x'_0 и y'_0 .

Теперь рекуррентные соотношения представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)x_{n+2} - (n+1)\lambda_0 x_{n+1} - 2\omega(n+1)y_{n+1} + (k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2)x_n + \\ + \omega \lambda_0 y_n - \lambda_n x_1 + k^2 m_1 x_0 u_n + k^2 m_2 x_0 v_n + \omega \lambda_n y_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} [-(\nu+1)\lambda_{n-\nu} x_{\nu+1} + \\ + k^2 m_1 x_{\nu} u_{n-\nu} + k^2 m_2 x_{\nu} v_{n-\nu} + \omega \lambda_{n-\nu} y_{\nu}] = 0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (26)$$

$$(n+2)(n+1)y_{n+2} - (n+1)\lambda_0 y_{n+1} + 2\omega(n+1)x_{n+1} + (k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2)y_n - \omega\lambda_0 x_n - \lambda_n y_1 + k^2 m_1 y_0 u_n - \omega\lambda_n x_0 + k^2 m_2 v_n y_0 + \frac{k^2 m_2}{\omega R^2} \lambda_n + \quad (27)$$

$$+ \sum_{v=1}^{n-1} [-(v+1)\lambda_{n-v} y_{v+1} + k^2 m_1 y_v u_{n-v} + k^2 m_2 y_v v_{n-v} - \lambda_{n-v} x_v] = 0, \quad n \geq 1$$

$$2r_0 r_n - 2x_0 x_n - 2y_0 y_n + \sum_{v=1}^{n-1} (r_{n-v} r_v - x_{n-v} x_v - y_{n-v} y_v) = 0, \quad n \geq 2 \quad (28)$$

$$2s_0 s_n - 2r_0 r_n + 2R x_n + \sum_{v=1}^{n-1} (s_{n-v} s_v - r_{n-v} r_v) = 0, \quad n \geq 2$$

$$(n+1)r_0 u_{n+1} + 3r_1 u_n + 3(n+1)u_0 r_{n+1} + r_n u_1 + \sum_{v=0}^{n-1} (v+1)(r_{n-v} u_{v+1} + 3r_{v+1} u_{n-v}) = 0, \quad n \geq 1$$

$$(n+1)s_0 v_{n+1} + 3s_1 v_n + 3(n+1)v_0 s_{n+1} + s_n v_1 + \sum_{v=0}^{n-1} (v+1)(s_{n-v} v_{v+1} + 3s_{v+1} v_{n-v}) = 0, \quad n \geq 1. \quad (29)$$

4. Вывод основных рекуррентных неравенств (31) — (36). Пусть $H \geq H_0$ — достаточное большое число, значение которого будет уточнено ниже.

Докажем, что если λ_n ($n=1, 2, \dots$) удовлетворяет условию (16), то имеют место неравенства

$$\left. \begin{aligned} |x_n| &\leq \frac{A_1 H^n}{n^2}, & |y_n| &\leq \frac{A_2 H^n}{n^2}, & |r_n| &\leq \frac{A_3 H^n}{n^2}, \\ |s_n| &\leq \frac{A_4 H^n}{n^2}, & |u_n| &\leq \frac{A_5 H^n}{n^2}, & |v_n| &\leq \frac{A_6 H^n}{n^2}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$n=1, 2, \dots$

где A_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) — положительные постоянные, значение которых также будет уточнено ниже.

Очевидно, выбирая H достаточно большим, неравенства (30) можно удовлетворить для первых нескольких значений n .

Справедливость неравенств (30) для любых $n \geq 1$, мы докажем пользуясь принципом математической индукции.

Мы допустим справедливость неравенств (30) для x_v и y_v при $v=1, 2, \dots, n+1$ ($n \geq 1$), для r_v и s_v при $v=1, 2, \dots, n-1$ ($n \geq 2$), а для u_v и v_v при $v=1, 2, \dots$ ($n \geq 1$) и докажем их справедливость, соответственно, для $v=n+2$, $v=n$ и $v=n+1$.

Из (26) — (29) имеем, в силу допущения, что

$$(n+2)(n+1)|x_{n+2}| \leq |\lambda_0| A_1 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{2-1}} + 2\omega A_2 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{2-1}} + \quad (31)$$

$$|k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2| \frac{A_1 H^n}{n^2} + \omega |\lambda_0| A_2 \frac{H^n}{n^2} + |x_1| A_0 \frac{H^n}{n^2} +$$

$$k^2 m_1 |\lambda_0| A_5 \frac{H^n}{n^2} + k^2 m_2 |x_0| A_6 \frac{H^n}{n^2} + \omega y_0 A_0 \frac{H^n}{n^2} +$$

$$+ \sum_{v=1}^{n-1} \left[(v+1) \frac{A_0 A_1 H^{n+1}}{(n-v)^2 (v+1)^2} + k^2 m_1 \frac{A_1 A_5 H^n}{(n-v)^2 v^2} + k^2 m_2 \frac{A_1 A_6 H^n}{v^2 (n-v)^2} + \right.$$

$$\left. + \omega \frac{A_0 A_2 H^n}{v^2 (n-v)^2} \right],$$

$$(n+2)(n+1)|y_{n+2}| \leq |\lambda_0| A_2 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{2-1}} + 2\omega A_1 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{2-1}} +$$

$$+ |k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2| A_2 \frac{H^n}{n^2} + \omega |\lambda_0| A_1 \frac{H^n}{n^2} + |y_1| A_0 \frac{H^n}{n^2} +$$

$$+ k^2 m_1 |y_0| A_5 \frac{H^n}{n^2} + \omega |x_0| A_0 \frac{H^n}{n^2} + k^2 m_2 |y_0| A_6 \frac{H^n}{n^2} +$$

$$+ \frac{k^2 m_2}{\omega R^2} A_0 \frac{H^n}{n^2} + \sum_{v=1}^{n-1} \left[(v+1) A_0 A_2 \frac{H^{n+1}}{(v+1)^2 (n-v)^2} + k^2 m_1 A_2 A_5 \frac{H^n}{v^2 (n-v)^2} + \right.$$

$$\left. + k^2 m_2 A_2 A_6 \frac{H^n}{v^2 (n-v)^2} + A_0 A_1 \frac{H^n}{v^2 (n-v)^2} \right], \quad (32)$$

$$2r_0 |r_n| \leq 2|x_0| A_1 \frac{H^n}{n^2} + 2|y_0| A_2 \frac{H^n}{n^2} + \sum_{v=1}^{n-1} \left[A_3^2 \frac{H^n}{v^2 (n-v)^2} + \right.$$

$$\left. + A_1^2 \frac{H^n}{(n-v)^2 v^2} + A_2^2 \frac{H^n}{v^2 (n-v)^2} \right], \quad (33)$$

$$2s_0 |s_n| \leq 2r_0 |r_n| + 2R A_1 \frac{H^n}{n^2} + \sum_{v=1}^{n-1} \left[A_4^2 \frac{H^n}{v^2 (n-v)^2} + A_3^2 \frac{H^n}{(n-v)^2 v^2} \right], \quad (34)$$

$$(n+1)r_0 |u_{n+1}| \leq 3|r_1| \frac{A_5 H^n}{n^2} + 3(n+1)|u_0| \frac{A_3 H^{n+1}}{(n+1)^2} + |u_1| \frac{A_3 H^n}{n^2} +$$

$$+ \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) \left[\frac{A_3 H^{n-v}}{(n-v)^2} \frac{A_6 H^{v+1}}{(v+1)^2} + 3 \frac{A_3 H^{v+1}}{(v+1)^2} \frac{A_5 H^{n-v}}{(n-v)^2} \right], \quad (35)$$

$$(n+1)s_0 |v_{n+1}| \leq 3|s_1| \frac{A_6 H^n}{n^2} + 3(n+1)|v_0| \frac{A_4 H^{n+1}}{(n+1)^2} + |v_1| \frac{A_4 H^n}{n^2} +$$

$$+ \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) \left[\frac{A_1 H^{n-v}}{(n-v)^2} \frac{A_6 H^{v+1}}{(v+1)^2} + 3 \frac{A_4 H^{v+1}}{(v+1)^2} \frac{A_6 H^{n-v}}{(n-v)^2} \right]. \quad (36)$$

5. Два вспомогательных неравенства (44) и (46).
Для полноты изложения мы выведем оценки для сумм

$$S_n = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v^2 (n-v)^2}, \quad \alpha > 1, \quad n \geq 2 \quad (37)$$

и

$$\sigma_n = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v}{v^2 (n-v)^2}, \quad \alpha > 1, \quad n \geq 2. \quad (38)$$

Если n — нечетное положительное число ($n=3,5,\dots$), тогда, очевидно, имеем

$$S_n = \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{v^2 (n-v)^2} + \sum_{v=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \frac{1}{v^2 (n-v)^2} = 2 \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{v^2 (n-v)^2} \leq \frac{2^{\alpha+1}}{(n+1)^2} \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{v^2}, \quad (39)$$

ибо

$$n-v \geq n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Если же n — четное положительное число ($n=2,4,\dots$), тогда, очевидно, что

$$S_n = 2 \sum_{v=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{v^2 (n-v)^2} + \left(\frac{2^{2\alpha}}{n^{2\alpha}} \right) \leq \frac{2^{\alpha+1}}{n^2} \sum_{v=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{v^2} + \frac{2^{2\alpha}}{n^{2\alpha}}. \quad (40)$$

Но,

$$\sum_{v=1}^m \frac{1}{v^2} = 1 + \sum_{v=2}^m \frac{1}{v^2} < 1 + \sum_{v=2}^m \int_{v-1}^v \frac{dx}{x^2} = 1 + \int_1^m \frac{dx}{x^2} = 1 + \frac{1}{(\alpha-1)} \left(1 - \frac{1}{m^{\alpha-1}} \right) < \frac{\alpha}{\alpha-1} \quad (41)$$

при любом $m=1,2,\dots$

Поэтому из (39) и (40), в силу (41), будем иметь

$$S_n < \frac{\alpha 2^{\alpha+1}}{(\alpha-1)} \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{при } n=3,5,\dots \quad (42)$$

$$S_n < \frac{\alpha 2^{\alpha+1}}{(\alpha-1)} \frac{1}{n^2} + \frac{2^{2\alpha}}{n^{2\alpha}} = \frac{2^\alpha}{n^2} \left(\frac{2\alpha}{\alpha-1} + \frac{2^\alpha}{n^\alpha} \right) < \frac{2^\alpha}{n^2} \left(\frac{2\alpha}{\alpha-1} + 1 \right) = \frac{2^\alpha (3\alpha-1)}{(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{при } n=2,4,\dots \quad (43)$$

Но,

$$\frac{\alpha 2^{\alpha+1}}{\alpha-1} = \frac{2^\alpha 2\alpha}{\alpha-1} < \frac{2^\alpha}{\alpha-1} (3\alpha-1) \quad \text{при } \alpha > 1.$$

Следовательно,

$$S_n < \frac{L_\alpha}{n^2}, \quad \alpha > 1, \quad n=2,3,\dots, \quad (44)$$

где

$$L_\alpha = \frac{2^\alpha (3\alpha-1)}{\alpha-1}. \quad (45)$$

Аналогично, при $n=3,5,\dots$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{v}{v^2 (n-v)^2} + \sum_{v=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \frac{v}{v^2 (n-v)^2} = \\ &= \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{v}{v^2 (n-v)^2} + \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n-v}{(n-v)^2 v^2} = \\ &= n \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(n-v)^2 v^2} = n \frac{S_{n+1}}{2} = \frac{n}{2} S_n, \end{aligned}$$

а при $n=2,4,\dots$,

$$\begin{aligned} \sigma_n &= n \sum_{v=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{v^2 (n-v)^2} - \frac{n}{2} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{2\alpha}} = \\ &= \frac{n}{2} S_n - \left(\frac{2}{n}\right)^{2\alpha-1} < \frac{n}{2} S_n. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (44), имеем

$$\sigma_n < \frac{L_\alpha}{2} \frac{1}{n^{\alpha-1}}, \quad \alpha > 1, \quad n=2,3,\dots, \quad (46)$$

6. Приведение основных рекуррентных неравенств к видам (54)–(59). В силу оценок (44) и (46), из (31)–(36) имеем

$$(n+2)(n+1)|x_{n+2}| \leq (|\lambda_0|A_1 + 2\omega A_2) \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{2\alpha-1}} + (|k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2|) A_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \omega |\lambda_0| A_2 + |x_1| A_0 + k^2 m_1 |x_0| A_5 + k^2 m_2 |x_0| A_6 + \omega |y_0| A_0 \frac{H^n}{n^2} + \\
& + A_0 A_1 H^{n+1} \frac{L_2}{2} \frac{1}{n^{2-1}} + k^2 m_1 A_1 A_5 H^n \frac{L_2}{n^2} + k^2 m_2 A_1 A_6 H^n \frac{L_2}{n^2} + \\
& + \omega A_0 A_3 H^n \frac{L_2}{n^2}, \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+1)|y_{n+1}| & \leq (|\lambda_0| A_2 + 2\omega A_1) \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{2-1}} + \left(|k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2| A_2 + \right. \\
& + \omega |\lambda_0| A_1 + |y_1| A_0 + k^2 m_1 |y_0| A_5 + \omega |x_0| A_0 + k^2 m_2 |y_0| A_6 + \frac{k^2 m_2}{\omega R^2} A_0 \left. \right) \frac{H^n}{n^2} + \\
& + A_0 A_2 H^{n+1} \frac{L_2}{2n^{2-1}} + k^2 m_1 A_2 A_5 H^n \frac{L_2}{n^2} + k^2 m_2 A_2 A_6 H^n \frac{L_2}{n^2} + \\
& + A_0 A_1 H^n \frac{L_2}{n^2}, \quad (48)
\end{aligned}$$

$$2r_0 |r_n| \leq 2(|x_0| A_1 + |y_0| A_2) \frac{H^n}{n^2} + (A_1^2 + A_2^2 + A_3) H^n \frac{L_2}{n^2}, \quad (49)$$

$$2s_0 |s_n| \leq 2r_0 |r_n| + 2RA_1 \frac{H^n}{n^2} + (A_1^2 + A_2^2) H^n \frac{L_2}{n^2}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
(n+1)r_0 |u_{n+1}| & \leq 3|r_1| A_5 \frac{H^n}{n^2} + 3|u_0| A_3 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{2-1}} + |u_1| A_3 \frac{H^n}{n^2} + \\
& + 4A_3 A_5 H^{n+1} \frac{L_2}{2n^{2-1}}, \quad (51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+1)s_0 |v_{n+1}| & \leq 3|s_1| A_6 \frac{H^n}{n^2} + 3|v_0| A_4 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{2-1}} + |v_1| A_4 \frac{H^n}{n^2} + \\
& + 4A_4 A_6 H^{n+1} \frac{L_2}{2n^{2-1}}. \quad (52)
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что при $n \geq 1$ имеем

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq 2^2, \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{2^2}{(n+1)^2} \leq \frac{2^{2n}}{(n+2)^2},$$

$$\frac{1}{(n+1)^2 (n+2)} \leq \frac{2^2}{(n+2)^2 (n+2)} \leq \frac{2^2}{3(n+2)^2},$$

$$\frac{1}{n^2 (n+1) (n+2)} \leq \frac{2^{2n}}{(n+2)^2 (n+1) (n+2)} \leq \frac{2^{2n}}{6(n+2)^2}$$

и

$$\frac{1}{n^{2-1} (n+1) (n+2)} \leq \frac{2^{2-1}}{(n+1)^2 (n+2)} < \frac{2^{2n-1}}{(n+2)^2 (n+2)} \leq \frac{2^{2n}}{6(n+2)^2}.$$

Пользуясь этим, из (47) — (52) получаем

$$\begin{aligned}
|x_{n+2}| & \leq (|\lambda_0| A_1 + 2\omega A_2) \frac{H^{n+1} 2^n}{3(n+2)^2} + (|k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2| A_1 + \\
& + \omega |\lambda_0| A_2 + |x_1| A_0 + k^2 m_1 |x_0| A_5 + k^2 m_2 A_6 + \omega |y_0| A_0) \frac{H^n \cdot 2^{2n}}{6(n+2)^2} + \\
& + \frac{L_2}{2} A_0 A_1 \frac{H^{n+1} 2^{2n}}{6(n+2)^2} + (k^2 m_1 A_1 A_5 + k^2 m_2 A_1 A_6 + \omega A_0 A_1) \frac{L_2 H^n 2^{2n}}{6(n+2)^2}, \quad (54) \\
|y_{n+2}| & \leq (|\lambda_0| A_2 + 2\omega A_1) \frac{H^{n+1} 2^n}{3(n+2)^2} + (|k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2| A_2 + \\
& + \omega |\lambda_0| A_1 + |y_1| A_0 + k^2 m_1 |y_0| A_5 + \omega |x_0| A_0 + k^2 m_2 |y_0| A_6 + \frac{k^2 m_2}{\omega R^2} A_0) \frac{H^n \cdot 2^{2n}}{6(n+2)^2} + \\
& + \frac{L_2}{2} A_0 A_2 \frac{H^{n+1} 2^{2n}}{6(n+2)^2} + (k^2 m_1 A_2 A_5 + k^2 m_2 A_2 A_6 + A_0 A_1) \frac{L_2 H^n 2^{2n}}{6(n+2)^2}, \quad (55)
\end{aligned}$$

$$|u_n| \leq \left[\frac{1}{r_0} (|x_0| A_1 + |y_0| A_2) + \frac{L_2}{2r_0} (A_1^2 + A_2^2 + A_3) \right] \frac{H^n}{n^2}, \quad (56)$$

$$|s_n| \leq \frac{r_0}{s_0} |r_n| + \left[\frac{R}{s_0} A_1 + \frac{L_2}{2s_0} (A_1^2 + A_2^2) \right] \frac{H^n}{n^2}, \quad (57)$$

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| & \leq \frac{1}{r_0} (3|r_1| A_5 + |u_1| A_3) \frac{H^n 2^n}{(n+1)^2} + \frac{3|u_0|}{r_0} A_3 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^2} + \\
& + \frac{2L_2}{r_0} A_3 A_5 \frac{H^{n+1} 2^{2-1}}{(n+1)^{2-1} (n+1)}, \quad (58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|v_{n+1}| & \leq \frac{1}{s_0} (3|s_1| A_6 + |v_1| A_4) \frac{H^n 2^n}{(n+1)^2} + \frac{3|v_0|}{s_0} A_4 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^2} + \\
& + \frac{2L_2}{s_0} A_4 A_6 \frac{H^{n+2} 2^{2-1}}{(n+1)^{2-1} (n+1)}. \quad (59)
\end{aligned}$$

7. Вывод основных неравенств для коэффициентов (30) и доказательство сходимости рядов (17). Теперь для того чтобы показать справедливость неравенств

$$\left. \begin{aligned}
|x_{n+2}| & \leq A_1 \frac{H^{n+2}}{(n+2)^2}, \quad |y_{n+2}| \leq A_2 \frac{H^{n+2}}{(n+2)^2}, \quad |r_n| \leq A_3 \frac{H^n}{n^2}, \\
|s_n| & \leq A_4 \frac{H^n}{n^2}, \quad |u_{n+1}| \leq A_5 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^2}, \quad |v_{n+1}| \leq A_6 \frac{H^{n+1}}{(n+1)^2},
\end{aligned} \right\} \quad (60)$$

нужно показать существование положительных постоянных $H, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\frac{2^{\alpha}}{3H} (|\lambda_0|A_1 + 2\omega A_2 + \frac{L_2 2^{\alpha}}{4} A_0 A_1) + \frac{2^{2\alpha}}{6H^2} [k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2 |A_1 + \omega|\lambda_0|A_2 + |x_1|A_0 + k^2 m_1 |x_0|A_3 + k^2 m_2 |x_0|A_6 + \omega|y_0|A_0 + L_2 (k^2 m_1 A_1 A_3 + k^2 m_2 A_1 A_6 + \omega A_0 A_3)] \leq A_1, \quad (61)$$

$$\frac{2^{\alpha}}{3H} (|\lambda_0|A_2 + 2\omega A_1 + \frac{L_2 2^{\alpha}}{4} A_0 A_2) + \frac{2^{2\alpha}}{6H^2} [k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2 |A_2 + \omega|\lambda_0|A_1 + |y_1|A_0 + k^2 m_1 |y_0|A_5 + \omega|x_0|A_0 + k^2 m_2 |y_0|A_6 + \frac{k^2 m_2}{\omega R^2} A_0 + L_2 (k^2 m_1 A_2 A_5 + k^2 m_2 A_2 A_6 + \omega A_0 A_2)] \leq A_2, \quad (62)$$

$$\frac{1}{r_0} (|x_0|A_1 + |y_0|A_2) + \frac{L_2}{2r_0} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \leq A_3, \quad (63)$$

$$\frac{1}{s_0} (|x_0|A_1 + |y_0|A_2 + R A_3) + \frac{L_2}{2s_0} (A_1^2 + A_2^2 + 2A_3^2 + A_4^2) \leq A_4, \quad (64)$$

$$\frac{3|u_0|}{r_0} A_3 + \frac{2^{\alpha} L_2}{r_0} A_3 A_5 + \frac{2^{\alpha-1}}{r_0 H} (3|r_1|A_5 + |u_1|A_3) \leq A_5, \quad (65)$$

$$\frac{3|v_0|}{s_0} A_4 + \frac{2^{\alpha} L_2}{s_0} A_4 A_6 + \frac{2^{\alpha-1}}{s_0 H} (3|s_1|A_6 + |v_1|A_4) \leq A_6. \quad (66)$$

Пусть положительные числа A_5, A_6, H_0' и H_0'' произвольно зафиксированы, причем

$$H_0' > 3 \cdot 2^{\alpha-1} \frac{|r_1|}{r_0} \text{ и } H_0'' > 3 \cdot 2^{\alpha-1} \frac{|s_1|}{s_0}. \quad (67)$$

Пусть A_4 — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$A_4 < \min \left\{ \frac{2s_0}{L_2}, \frac{A_6 (s_0 H_0'' - 3 \cdot 2^{\alpha-1} |s_1|)}{H_0'' (2^{\alpha} L_2 A_6 + 3|v_0|) + 2^{\alpha-1} |v_1|} \right\}. \quad (68)$$

Зафиксировав A_4 , положительное число A_3 выберем настолько малым, чтобы было

$$A_3 < \min \left\{ \frac{2r_0}{L_2}, \sqrt{A_4 \left(\frac{s_0}{L_2} - \frac{1}{2} A_4 \right)}, \frac{A_5 (r_0 H_0' - 3 \cdot 2^{\alpha-1} |r_1|)}{H_0' (2^{\alpha} L_2 A_5 + 3|u_0|) + 2^{\alpha-1} |u_1|} \right\}. \quad (69)$$

Зафиксировав A_3 , положительные числа A_1 и A_2 выберем настолько малым, чтобы имели место следующие неравенства:

$$|x_0|A_1 + |y_0|A_2 + \frac{L_2}{2} (A_1^2 + A_2^2) \leq A_3 \left(r_0 - \frac{L_2}{2} A_3 \right), \quad (70)$$

$$(R + |x_0|) A_1 + |y_0| A_2 + \frac{L_2}{2} (A_1^2 + A_2^2) \leq A_4 s_0 - \frac{L_2}{2} (2A_3^2 + A_4^2). \quad (71)$$

Например, можно положить $0 < A_1 \leq 1$, $0 < A_2 \leq 1$ и

$$A_1 + A_2 < \min \left\{ \frac{A_3 (2r_0 - L_2 A_3)}{L_2 + 2r_0}, \frac{2A_4 s_0 - L_2 (A_3^2 + 2A_4^2)}{L_2 + 2(R + r_0)} \right\}. \quad (72)$$

Далее, положим

$$H_1 = \frac{2^{\alpha}}{3} \left(|\lambda_0| + 2\omega \frac{A_2}{A_1} + \frac{L_2 2^{\alpha}}{4} A_1 \right) + \frac{2^{2\alpha}}{6} [k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2 | + \omega|\lambda_0| \frac{A_2}{A_1} + |x_1| \frac{A_0}{A_1} + k^2 m_1 |x_0| \frac{A_5}{A_1} + k^2 m_2 |x_0| \frac{A_6}{A_1} \omega + |y_0| \frac{A_0}{A_1} + L_2 (k^2 m_1 A_5 + k^2 m_2 A_6 + \omega A_0 \frac{A_2}{A_1})], \quad (73)$$

$$H_2 = \frac{2^{\alpha}}{3} \left(|\lambda_0| + 2\omega \frac{A_1}{A_2} + \frac{L_2 2^{\alpha}}{4} A_0 \right) + \frac{2^{2\alpha}}{6} [k^2 m_1 u_0 + k^2 m_2 v_0 - \omega^2 | + \omega|\lambda_0| \frac{A_1}{A_2} + |y_1| \frac{A_0}{A_2} + k^2 m_1 |y_0| \frac{A_5}{A_2} + \omega|x_0| \frac{A_0}{A_2} + k^2 m_2 |y_0| \frac{A_6}{A_2} + \frac{k^2 m_2}{\omega k^2} \frac{A_0}{A_2} + L_2 (k^2 m_1 A_5 + k^2 m_2 A_6 + A_0 \frac{A_1}{A_2})], \quad (74)$$

$$H^* = \max \{1, H_0, H_0', H_0'', H_1, H_2\}, \quad (75)$$

$$H \cong H^*. \quad (76)$$

Теперь нетрудно проверить, что если положительные постоянные $A_i (i=1, 2, \dots, 6)$ и H удовлетворяют условиям (68) — (71) и (76), то справедливы все неравенства (61) — (66).

Для этого сперва заметим, что если $\frac{b}{a} < z_0 \leq z < +\infty$, то дробно-линейная функция $\frac{az-b}{cz+d}$ при положительных a, b, c и d достигает

для $z=z_0$ своего положительного минимума $\frac{az_0-b}{cz_0+d}$.

Поэтому из (68) будем иметь

$$A_4 < \frac{A_6 (s_0 H_0'' - 3 \cdot 2^{\alpha-1} |s_1|)}{H_0'' (2^{\alpha} L_2 A_6 + 3|v_0|) + 2^{\alpha-1} |v_1|}$$

или, при $H \cong H_0''$,

$$A_4 < \frac{A_6 (s_0 H - 3 \cdot 2^{\alpha-1} |s_1|)}{H (2^{\alpha} L_2 A_6 + 3|v_0|) + 2^{\alpha-1} |v_1|} = \frac{A_6 \left(1 - \frac{3 \cdot 2^{\alpha-1} |s_1|}{H s_0} \right)}{\frac{2^{\alpha} L_2 A_6}{s_0} + \frac{3|v_0|}{s_0} + \frac{2^{\alpha-1} |v_1|}{s_0 H}}.$$

Отсюда, очевидно, следует неравенство (66). Из (69) имеем, что

$$A_3 < \frac{A_3(r_0 H_0 - 3 \cdot 2^{n-1} |r_1|)}{H_0(2^n L_n A_3 + 3|u_0|) + 2^{n-1} |u_1|} < \frac{A_3(r_0 H - 3 \cdot 2^{n-1} |r_1|)}{H(2^n L_n A_3 + 3|u_0|) + 2^{n-1} |u_1|} =$$

$$= \frac{A_3 \left(1 - 3 \cdot 2^{n-1} \frac{r_1}{H r_0} \right)}{\frac{2^n L_n}{r_0} A_3 + \frac{3|u_0|}{r_0} + \frac{2^{n-1} |u_1|}{r_0 H}}.$$

Отсюда следует (65).

Из (70) и (71), очевидно, вытекают (63) и (64).

В частности, если A_1 и A_2 удовлетворяют условиям (72), то тогда имеем

$$(A_1 + A_2)(L_n + 2r_0) < A_3(2r_0 - L_n A_3)$$

и

$$A_1 + A_2(L_n + 2R + 2r_0) < 2A_3 r_0 - L_n(A_1^2 + 2A_2^2).$$

Отсюда, в силу того, что $|x_0| \leq r_0$, $|y_0| \leq r_0$, $A_1^2 \leq A_1$ и $A_2^2 \leq A_2$, следуют неравенства (63) и (64).

Наконец, принимая во внимание (73) — (76), легко получить неравенства (61) — (62).

Таким образом мы доказали справедливость неравенств (30) для любых $n=1, 2, \dots$

Теперь, очевидно, что степенные ряды (17) сходятся при

$$0 \leq t \leq \frac{1}{H^*}. \quad (*)$$

Тем самым доказано существование решений (6), удовлетворяющих начальным условиям (12), в виде степенных рядов относительно времени t , сходящихся на промежутке (*).

В одной из следующих статей, мы приведем численные примеры для применения вышеизложенных результатов.

Сентябрь, 1958

ON THE RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM FOR THE CASE WHEN THE ATTRACTED BODY HAS THE VARIABLE MASS

N. G. MAGNARADZE

ЛИТЕРАТУРА

1. Steffensen T. F. On the restricted problem of three bodies. Kgl. danske videnskab. selskab. Mat.-fys. medd., 1956, 30, № 18, p. 17.
2. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы, Москва, 1952.
3. Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики, Москва, 1955.
4. Дубошин Г. Н. Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени, Астр. журн. 1925, 2, № 4, 5—11; 1927, 4, № 2, 123—142; 1928, 5, № 2—3, 153—172; 1929, 6, № 2, 162—179.

5. Дубошин Г. Н. О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами, Астр. журн., 1930, 7, № 3—4, 153—172.
6. Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels, В II, Berlin, 1927.
7. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, Л., т. 2, 1937.
8. Магнардзе Н. Г. Некоторые замечания к задаче движения материальной точки под действием силы, зависящей от времени, Бюл. Абастуманской астрофиз. обс., 1958, № 22, 139—144.