აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 24, 1959
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 24, 1959

# ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ, КОГДА ПРИТЯГИВАЕМОЕ ТЕЛО ИМЕЕТ ПЕРЕМЕННУЮ МАССУ

Н. Г. МАГНАРАДЗЕ

Введение. Рассмотрим задачу трех тел в том случае, когда их движение происходит на некоторой фиксированной плоскости, при этом двое из них $M_1$ и $M_2$, имеющие постоянные массы $m_1$ и $m_2$, с одинаковой угловой скоростью $\omega$ равномерно вращаются около их общего центра тяжести и притягивают по закону притяжения Ньютона третьего тела $M$, имеющего переменную массу $m$. Массу $m$ мы будем считать настолько малой, что тела $M_1$ и $M_2$ не подвергаются притяжению тела $M$.

Требуется изучить движение точки $M$ относительно подвижной системы координат, одна из осей которой постоянно проходит через точки $M_1$ и $M_2$.

В том частном случае, когда масса $m$ постоянна, эта задача недавно была рассмотрена Стеффенсеном [1]. Для координат движущейся точки им построены степенные ряды по времени $t$ и доказана их сходимость для достаточно малых значений $t$. При этом для определения коэффициентов разложений неизвестных величин ему удалось построить рекуррентные соотношения, удобные для их вычисления современными вычислительными машинами.

Цель настоящей работы исследовать ту же самую задачу в том случае, когда масса $m$ является заданной функцией от времени.

Пользуясь схемой, предложенной Стеффенсеном [1] и в этом общем случае можно построить рекуррентные соотношения для коэффициентов разложений неизвестных величин, удобные при их вычислении вычислительными машинами.

При этом мы пользуемся несколько более общими мажорантными выражениями для коэффициентов разложений неизвестных функций в степенные ряды относительно времени $t$, чем Стеффенсен [1]. Это обусловливается тем, что мы исходим из аналогичных общих мажорантных выражений для коэффициентов разложений заданных функций в степенные ряды относительно $t$.

1. Вывод основных дифференциальных уравнений (6). В основу нашего исследования мы положим уравнения И. В. Мещерского [2]:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\vec{\Phi}_1+\vec{\Phi}_2, \tag{1}$$

где масса $m=m(t)$—заданная функция от времени $t$, $\vec{v}$ — скорость точки, $\vec{F}$ —равнодействующая внешних сил, приложенных к точке, $\vec{\Phi}_1$— реактивная сила, обусловленная отделением частиц, а $\vec{\Phi}_2$ — тормозящая сила, обусловленная присоединением частиц к движущейся точке.

Известно, что (см., например, [3]).

$$\vec{\Phi}_1=\frac{d\mu_1}{dt}(\vec{u}_1-\vec{v}),\quad \vec{\Phi}_2=\frac{d\mu_2}{dt}(\vec{u}_2-\vec{v}), \tag{2}$$

где $\mu_1=\mu_1(t)$ и $\mu_2=\mu_2(t)$ суть массы частиц, соответственно, отделивших-ся и присоединившихся к движущейся точке за промежуток времени $t-t_0$ от начального момента $t_0$, $\vec{u}_1-\vec{v}$ и $\vec{u}_2-\vec{v}$ суть относительные ско-рости, соответственно, отделяющихся и присоединившихся частиц.

Очевидно, что

$$m(t)=\mu_0-\mu_1(t)+\mu_2(t),$$

где $\mu_0$— масса движущейся точки в начальный момент $t=t_0$.

В дальнейшем мы будем считать, что векторы $\vec{u}_1-\vec{v}$ и $\vec{u}_2-\vec{v}$ коллинеарны вектору скорости $\vec{v}$:

$$\vec{u}_1-\vec{v}=\lambda_1(t)\,\vec{v}\quad \text{и}\quad \vec{u}_2-\vec{v}=\lambda_2(t)\,\vec{v}, \tag{3}$$

где $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ — заданные функции от времени $t$ (в современной ракетной технике условия (3) называются гипотезой К. Э. Циолковского).

Из (1), (2) и (3) имеем, что

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{1}{m}\vec{F}+\lambda\vec{v}, \tag{4}$$

где

$$\lambda=\frac{1}{m}\left(\lambda_1\frac{d\mu_1}{dt}+\lambda_2\frac{d\mu_2}{dt}\right).$$

Заданную фиксированную плоскость мы примем за координатную плоскость с абсолютной системой координат $\xi\Omega\eta$.

В этой системе координат из векторного равенства (4) имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2}-\lambda\frac{d\xi}{dt}&=\frac{1}{m}F_\xi,\\ \frac{d^2\eta}{dt^2}-\lambda\frac{d\eta}{dt}&=\frac{1}{m}F_\eta,\end{aligned} \tag{5}$$

где $F_\xi$ и $F_\eta$ суть проекции внешней силы $\vec{F}$, соответственно, на осях $\Omega\xi$ и $\Omega\eta$.

Пусть теперь точка $M(\xi,\eta)$ притягивается по закону Ньютона двумя точками $M_1(\xi_1,\eta_1)$ и $M_2(\xi_2,\eta_2)$, лежащими на прямой, равномерно вращающейся с угловой скоростью $\omega$ около их центра тяжести $M_0(\xi_0,\eta_0)$, где



$$\xi_0=\frac{m_1\xi_1+m_2\xi_2}{m_1+m_2}\quad \text{и}\quad \eta_0=\frac{m_1\eta_1+m_2\eta_2}{m_1+m_2}.$$

Тогда

$$F_\xi=-k^2mm_1\frac{(\xi-\xi_1)}{r_1^3}-k^2mm_2\frac{(\xi-\xi_2)}{r_2^3},$$

и

$$F_\eta=-k^2mm_1\frac{(\eta-\eta_1)}{r_1^3}-k^2mm_2\frac{(\eta-\eta_2)}{r_2^3},$$

где

$$r_1=\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2}\quad \text{и}\quad r_2=\sqrt{(\xi-\xi_2)^2+(\eta-\eta_2)^2}.$$

Теперь введем подвижную систему координат $\bar{x}M_0\bar{y}$, начало которой лежит в точке $M_0$, а ось $M_0\bar{x}$ совпадает с упомянутой выше вращающейся прямой, пологая

$$\xi=\xi_0+\bar{x}\cos\omega t-\bar{y}\sin\omega t,$$
$$\eta=\eta_0+\bar{x}\sin\omega t+\bar{y}\cos\omega t.$$

Наконец, положим

$$\bar{x}=x-R_1\quad \text{и}\quad \bar{y}=y,$$

где $R_1=M_1M_0$—расстояние между точками $M_1$ и $M_0$.

Тогда уравнения движения (5) примут вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}-\lambda\frac{dx}{dt}-2\omega\frac{dy}{dt}+k^2m_1\frac{x}{r_1^3}+k^2m_2\frac{(x-R)}{r_2^3}-\\ &\qquad-\omega^2x+\lambda\omega y+R_1\omega^2=0,\\ &\frac{d^2y}{dt^2}-\lambda\frac{dy}{dt}+2\omega\frac{dx}{dt}+k^2m_1\frac{y}{r_1^3}+k^2m_2\frac{y}{r_2^3}-\\ &\qquad-\omega^2y-\lambda\omega x+\omega R_1\lambda=0,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$R=M_1M_2,\quad r_1=\sqrt{x^2+y^2}\quad \text{и}\quad r_2=\sqrt{(x-R)^2+y^2}. \tag{7}$$

Принимая во внимание условия задачи, легко видеть, что

$$\omega^2=\frac{k^2(m_1+m_2)}{R^3}\quad \text{и}\quad R_1\omega^2=\frac{k^2m_2}{R^2}.$$

2. Преобразованные основные уравнения (9)—(11). Теперь введя обозначения

$$r_1=r,\quad r_2=s,\quad r^{-3}=u,\quad s^{-3}=v, \tag{8}$$

для определения величин $x$, $y$, $r$, $s$, $u$, $v$, в силу (6), (7) и (8), получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}-\lambda\frac{dx}{dt}-2\omega\frac{dy}{dt}+k^2m_1xu+k^2m_2(x-R)v-\omega^2x+\omega\lambda y+\\ &\qquad+\frac{k^2m_2}{R^2}=0,\\ &\frac{d^2y}{dt^2}-\lambda\frac{dy}{dt}+2\omega\frac{dx}{dt}+k^2m_1yu+k^2m_2yv-\omega^2y-\omega\lambda x+\\ &\qquad+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}\lambda=0,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$
\left.\begin{aligned}
& r\frac{du}{dt}+3u\frac{dr}{dt}=0,\\
& s\frac{dv}{dt}+3v\frac{ds}{dt}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& x^2+y^2=r^2,\\
& (x-R)^2+y^2=s^2.
\end{aligned}\right\} \tag{11}
$$

Пусть при $t=t_0=0$ имеем

$$
x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ x'(0)=x'_0,\ y'(0)=y'_0, \tag{12}
$$

где $x_0$, $y_0$, $x'_0$ и $y'_0$—произвольно заданные конечные числа, удовлетворяющие условиям:

$$
r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}>0 \quad \text{и} \quad s_0=\sqrt{(x_0-R)^2+y_0^2}>0. \tag{13}
$$

Далее, из (8) имеем, что

$$
u_0=r_0^{-3}>0 \ \text{и}\ v_0=s_0^{-3}>0.
$$

Требуется определить $x, y, r, s, u, v$ как функции от $t$ так, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям (9)—(10), конечным уравнениям (11) и начальным условиям (12)—(14).

3. Вывод основных рекуррентных равенств (26)—(29). Пусть

$$
\lambda(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n t^n, \tag{15}
$$

В дальнейшем мы будем считать, что

$$
|\lambda_n|\leqq A_0\frac{H_0^n}{n^{\alpha}},\ n=1,\ 2,\cdots, \tag{16}
$$

где $A_0>0$, $H_0>0$ и $\alpha>1$ — заданные конечные числа.

Очевидно, что степенной ряд (15) сходится при $0\leqq t\leqq H_0^{-1}$.

Для определения величин $x, y, r, s, u, v$ положим

$$
\left.\begin{aligned}
& x=\sum_{n=0}^{\infty}x_n t^n, \quad y=\sum_{n=0}^{\infty}y_n t^n, \quad r=\sum_{n=0}^{\infty}r_n t^n,\\
& s=\sum_{n=0}^{\infty}s_n t^n, \quad u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n t^n, \quad v=\sum_{n=0}^{\infty}v_n t^n,
\end{aligned}\right\} \tag{17}
$$

где

$$
x_1=x'_0 \ \text{и}\ y_1=y'_0.
$$

Подставляя (15) и (17) в уравнения (9) — (11) и приравнивая нулю коэффициенты при $t^n$, $n=0, 1, 2,\cdots$, получим следующую рекуррентную систему для определения коэффициентов степенных рядов (12)



$$
\left.\begin{aligned}
& 2x_2-\lambda_0x_1-2\omega y_1+k^2m_1x_0u_0+k^2m_2x_0v_0-\omega^2x_0+\omega\lambda_0y_0+\frac{k^2m_2}{R^2}=0,\\
& 2y_2-\lambda_0y_1+2\omega x_1+k^2m_1y_0u_0+k^2m_2y_0v_0-\omega^2y_0-\omega\lambda_0x_0+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}\lambda_0=0,
\end{aligned}\right\} \tag{19}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& r_0u_1+3u_0r_1=0,\\
& s_0v_1+3v_0s_1=0,
\end{aligned}\right\} \tag{20}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& x_0x'_0+y_0y'_0-r_0r_1=0,\\
& (x_0-R)x'_0+y_0y'_0-s_0s_1=0,
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&(n+2)(n+1)x_{n+2}-\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)\lambda_{n-\nu}x_{\nu+1}-2\omega(n+1)y_{n+1}+k^2m_1\sum_{\nu=0}^{n}x_\nu u_{n-\nu}+\\
&+k^2m_2\sum_{\nu=0}^{n}x_\nu v_{n-\nu}-\omega^2x_n+\omega\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_{n-\nu}y_\nu=0,\quad n\geqq 1,
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&(n+2)(n+1)y_{n+2}-\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)\lambda_{n-\nu}y_{\nu+1}+2\omega(n+1)x_{n+1}+k^2m_1\sum_{\nu=0}^{n}y_\nu u_{n-\nu}+\\
&+k^2m_2\sum_{\nu=0}^{n}y_\nu v_{n-\nu}-\omega^2y_n-\omega\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_{n-\nu}x_\nu+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}\lambda_n=0,\quad n\geqq 1.
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)r_{n-\nu}u_{\nu+1}+3\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)u_{n-\nu}r_{\nu+1}=0,\quad n\geqq 0\\
& \sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)s_{n-\nu}v_{n+1}+3\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)v_{n-\nu}s_{\nu+1}=0,\quad n\geqq 0
\end{aligned}\right\} \tag{24}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{n}x_{n-\nu}x_\nu+\sum_{\nu=0}^{n}y_{n-\nu}y_\nu=\sum_{\nu=0}^{n}r_{n-\nu}r_\nu,\quad n\geqq 0\\
& s_0^2=r_0^2-2Rx_0+R^2.
\end{aligned}\right\}. \tag{25}
$$

Пользуясь равенствами (12), (13), (14) и (18), из (19) — (21) однозначно определяем $x_2$, $y_2$, $r_1$, $s_1$, $u_1$, $v_1$ через произвольно заданные начальные значения $x_0$, $y_0$, $x'_0$ и $y'_0$.

Теперь рекуррентные соотношения представим в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
&(n+2)(n+1)x_{n+2}-(n+1)\lambda_0x_{n+1}-2\omega(n+1)y_{n+1}+(k^2m_1u_0+k^2m_2v_2-\omega^2)x_n+\\
&+\omega\lambda_0y_n-\lambda_nx_1+k^2m_1x_0u_n+k^2m_2x_0v_n+\omega\lambda_ny_0+\sum_{\nu=1}^{n-1}[-(\nu+1)\lambda_{n-\nu}x_{\nu+1}+\\
&k^2m_1x_\nu u_{n-\nu}+k^2m_2x_\nu v_{n-\nu}+\omega\lambda_{n-\nu}y^\nu]=0,\quad n\geqq 1,
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
&(n+2)(n+1)\,y_{n+2}-(n+1)\lambda_0 y_{n+1}+2\omega(n+1)\,x_{n+1}+(k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2)\,y_n-\\
&\quad-\omega\lambda_0x_n-\lambda_ny_1+k^2m_1y_0u_n-\omega\lambda_nx_0+k^2m_2v_ny_0+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}\lambda_n+\\
&\quad+\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[-(\nu+1)\lambda_{n-\nu}y_{\nu+1}+k^2m_1y_\nu u_{n-\nu}+k^2m_2y_\nu v_{n-\nu}-\lambda_{n-\nu}x_\nu\right]=0,\quad n\geqq 1
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&2r_0r_n-2x_0x_n-2y_0y_n+\sum_{\nu=1}^{n-1}(r_{n-\nu}r_\nu-x_{n-\nu}x_\nu-y_{n-\nu}y_\nu)=0,\quad n\geqq 2\\
&2s_0s_n-2r_0r_n+2Rx_n+\sum_{\nu=1}^{n-1}(s_{n-\nu}s_\nu-r_{n-\nu}r_\nu)=0,\quad n\geqq 2
\end{aligned}
\right\}
\tag{28}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&(n+1)\,r_0u_{n+1}+3r_1u_n+3(n+1)u_0r_{n+1}+r_nu_1+\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(r_{n-\nu}u_{\nu+1}+\\
&\qquad+3r_{\nu+1}u_{n-\nu})=0,\quad n\geqq 1\\
&n+1)\,s_0v_{n+1}+3s_1v_n+3(n+1)v_0s_{n+1}+s_nv_1+\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(s_{n-\nu}v_{n+1}+\\
&\qquad+3s_{\nu+1}v_{n-\nu})=0,\quad n\geqq 1.
\end{aligned}
\right\}
\tag{29}
$$

4. Вывод основных рекурентных неравенств (31)—(36). Пусть $H\geqq H_0$ — достаточное большое число, значение которого будет уточнено ниже.

Докажем, что если $\lambda_n$ $(n=1,2,\cdots)$ удовлетворяет условию (16), то имеют место неравенства

$$
\left.
\begin{aligned}
&|x_n|\leqq\frac{A_1H^n}{n^\alpha},\quad |y_n|\leqq\frac{A_2H^n}{n^\alpha},\quad |r_n|\leq\frac{A_3H^n}{n^\alpha},\\
&|s_n|\leqq\frac{A_4H^n}{n^\alpha},\quad |u_n|\leqq\frac{A_5H^n}{n^\alpha},\quad |v_n|\leqq\frac{A_6H^n}{n^\alpha},\\
&\qquad\qquad n=1,2,\cdots
\end{aligned}
\right\}
\tag{30}
$$

где $A_i$ $(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ — положительные постоянные, значение которых также будет уточнено ниже.

Очевидно, выбирая $H$ достаточно большим, неравенства (30) можно удовлетворить для первых нескольких значений $n$.

Справедливость неравенств (30) для любых $n\geqq 1$, мы докажем пользуясь принципом математической индукции.

Мы допустим справедливость неравенств (30) для $x_\nu$ и $y_\nu$ при $\nu=1,2,\cdots,n+1$ $(n\geqq 1)$, для $r_\nu$ и $s_\nu$ при $\nu=1,2,\cdots,n-1$ $n\geqq 2$, а для $u_\nu$ и $v_\nu$ при $\nu=1,2,\cdots$ $(n\geqq 1)$ и докажем их справедливость, соответственно, для $\nu=n+2$, $\nu=n$ и $\nu=n+1$.



Из (26) — (29) имеем, в силу допущения, что

$$
\begin{aligned}
&(n+2)(n+1)\,|x_{n+2}|\leqq|\lambda_0|A_1\frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}}+2\omega A_2\frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}}+\\
&|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|\frac{A_1H^n}{n^\alpha}+\omega|\lambda_0|A_2\frac{H^n}{n^\alpha}+|x_1|A_0\frac{H^n}{n^\alpha}+\\
&k^2m_1|\lambda_0|A_5\frac{H^n}{n^\alpha}+k^2m_2|x_0|A_6\frac{H^n}{n^\alpha}+\omega y_0A_0\frac{H^n}{n^\alpha}+\\
&+\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[(\nu+1)\frac{A_0A_1H^{n+1}}{(n-\nu)^\alpha(\nu+1)^\alpha}+k^2m_1\frac{A_1A_5H^n}{(n-\nu)^\alpha\nu^\alpha}+k^2m_2\frac{A_1A_6H^\alpha}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}+\right.\\
&\qquad\left.+\omega\frac{A_0A_2H^n}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}\right],
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
&(n+2)(n+1)\,y_{n+2}\leqq|\lambda_0|A_2\frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}}+2\omega A_1\frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}}+\\
&+|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|A_2\frac{H^n}{n^\alpha}+\omega|\lambda_0|A_1\frac{H^n}{n^\alpha}+|y_1|A_0\frac{H^n}{n^\alpha}+\\
&+k^2m_1|y_0|A_5\frac{H^n}{n^\alpha}+\omega|x_0|A_0\frac{H^n}{n^\alpha}+k^2m_2|y_0|A_6\frac{H^n}{n^\alpha}+\\
&+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}A_0\frac{H^n}{n^\alpha}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[(\nu+1)A_0A_2\frac{H^{n+1}}{(\nu+1)^\alpha(n-\nu)^\alpha}+k^2m_1A_2A_5\frac{H^n}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}+\right.\\
&\qquad\left.+k^2m_2A_2A_6\frac{H^n}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}+A_0A_1\frac{H^n}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}\right],
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
&2r_0|r_n|\leqq 2|x_0|A_1\frac{H^n}{n^\alpha}+2|y_0|A_2\frac{H^n}{n^\alpha}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[A_3^2\frac{H^n}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}+\right.\\
&\qquad\left.+A_1^2\frac{H^n}{(n-\nu)^\alpha\nu^\alpha}+A_2^2\frac{H^n}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}\right],
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$
2s_0|s_n|\leqq 2r_0|r_n|+2RA_1\frac{H^n}{n^\alpha}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[A_4^2\frac{H^n}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}+A_3^2\frac{H^n}{(n-\nu)^\alpha\nu^\alpha}\right],
\tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
&(n+1)\,r_0|u_{n+1}|\leqq 3|r_1|\frac{A_5H^n}{n^\alpha}+3(n+1)|u_0|\frac{A_3H^{n+1}}{(n+1)^\alpha}+|u_1|\frac{A_3H^n}{n^\alpha}+\\
&+\sum_{\nu=1}^{n-1}(\nu+1)\left[\frac{A_3H^{n-\nu}}{(n-\nu)^\alpha}\,\frac{A_5H^{\nu+1}}{(\nu+1)^\alpha}+3\frac{A_3H^{\nu+1}\,A_5H^{n-\nu}}{(\nu+1)^\alpha\,(n-\nu)^\alpha}\right],
\end{aligned}
\tag{35}
$$

$$
(n+1)\,s_0|v_{n+1}|\leqq 3|s_1|\frac{A_6H^n}{n^\alpha}+3(n+1)|v_0|\frac{A_4H^{n+1}}{(n+1)^\alpha}+|v_1|\frac{A_4H^n}{n^\alpha}+
$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n-1}(\nu+1)\left[\frac{A_1 H^{n-\nu}}{(n-\nu)^\alpha}\,\frac{A_6 H^{\nu+1}}{(\nu+1)^\alpha}+3\,\frac{A_1 H^{\nu+1}}{(\nu+1)^\alpha}\,\frac{A_6 H^{n-\nu}}{(n-\nu)^\alpha}\right]. \qquad (36)$$

5. Два вспомогательных неравенства (44) и (46). Для полноты изложения мы выведем оценки для сумм

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha},\ \alpha>1,\ n\geqq 2 \qquad (37)$$

и

$$\sigma_n=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\nu}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha},\ \alpha>1,\ n\geqq 2. \qquad (38)$$

Если $n$—нечетное положительное число ($n=3,5,..$), тогда, очевидно, имеем

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}+\sum_{\frac{n+1}{2}}^{n-1}\frac{1}{\nu^\alpha(n-1)^\alpha}=2\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}\leq$$

$$\leq\frac{2^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha}\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\nu^\alpha}, \qquad (39)$$

ибо

$$n-\nu\geqq n-\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

Если же $n$—четное положительное число ($n=2,4,..$), тогда, очевидно, что

$$S_n=2\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}}{}'\frac{1}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}+\left(\frac{2^{2\alpha}}{n^{2\alpha}}\right)\leq\frac{2^{\alpha+1}}{n^\alpha}\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\nu^\alpha}+\frac{2^{2\alpha}}{n^{2\alpha}}. \qquad (40)$$

Но,

$$\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\nu^\alpha}=1+\sum_{\nu=2}^{m}\frac{1}{\nu^\alpha}<1+\sum_{\nu=2}^{m}\int_{\nu-1}^{\nu}\frac{dx}{x^\alpha}=$$

$$=1+\int_1^m\frac{dx}{x^\alpha}=1+\frac{1}{(\alpha-1)}\left(1-\frac{1}{m^{\alpha-1}}\right)<\frac{\alpha}{\alpha-1} \qquad (41)$$

при любом $m=1,2,..$

Поэтому из (39) и (40), в силу (41), будем иметь

$$S_n<\frac{\alpha 2^{\alpha+1}}{(\alpha-1)}\,\frac{1}{(n+1)^\alpha}\ \text{при}\ n=3,5,\dots \qquad (42)$$



и

$$S_n<\frac{\alpha 2^{\alpha+1}}{(\alpha-1)}\,\frac{1}{n^\alpha}+\frac{2^{2\alpha}}{n^{2\alpha}}=\frac{2^\alpha}{n^\alpha}\left(\frac{2\alpha}{\alpha-1}+\frac{2^\alpha}{n^\alpha}\right)<\frac{2^\alpha}{n^\alpha}\left(\frac{2\alpha}{\alpha-1}+1\right)=$$

$$=\frac{2\alpha(3\alpha-1)}{(\alpha-1)}\cdot\frac{1}{n^\alpha}\ \text{при}\ n=2,4,\cdots \qquad (43)$$

Но,

$$\frac{\alpha 2^{\alpha+1}}{\alpha-1}=\frac{2^\alpha 2\alpha}{\alpha-1}<\frac{2^\alpha}{\alpha-1}(3\alpha-1)\ \text{при}\ \alpha>1.$$

Следовательно,

$$S_n<\frac{L_\alpha}{n^\alpha},\ \alpha>1,\ n=2,3,\cdots, \qquad (44)$$

где

$$L_\alpha=\frac{2^\alpha(3\alpha-1)}{\alpha-1}. \qquad (45)$$

Аналогично, при $n=3,5,..$ имеем

$$\sigma_n=\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\nu}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}+\sum_{\nu=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\frac{\nu}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\nu}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}+\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-\nu}{(n-\nu)^\alpha\nu^\alpha}=$$

$$=n\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{(n-\nu)^\alpha\nu^\alpha}=n\,S_{\frac{n+1}{2}}=\frac{n}{2}S_n,$$

а при $n=2,4,..$,

$$\sigma_n=n\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\nu^\alpha(n-\nu)^\alpha}-\frac{n}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{2\alpha}}=$$

$$=\frac{n}{2}S_n-\left(\frac{2}{n}\right)^{2\alpha-1}<\frac{n}{2}S_n.$$

Следовательно, в силу (44), имеем

$$\sigma_n<\frac{L_\alpha}{2}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}},\ \alpha>1,\ n=2,3,\cdots, \qquad (46)$$

6. Приведение основных рекурентных неравенств к видам (54)—(59). В силу оценок (44) и (46), из (31)—(36) имеем

$$(n+2)(n+1)|x_{n+2}|\leqq(|\lambda_0|A_1+2\omega A_3)\frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}}+(|k^2 m_1 u_0+k^2 m_2 v_0-\omega^2)A_1+$$

$$+\omega|\lambda_0|A_2+|x_1|A_0+k^2m_1|x_0|A_5+k^2m_2|x_0|A_6+\omega|y_0|A_0)\frac{H^n}{n^\alpha}+$$

$$+A_0A_1H^{n+1}\frac{L\alpha}{2}\frac{1}{n^{\alpha-1}}+k^2m_1A_1A_5H^n\frac{L_\alpha}{n^\alpha}+k^2m_2A_1A_6H^n\frac{L_\alpha}{n^\alpha}+$$

$$+\omega A_0A_1H^n\frac{L_\alpha}{n^\alpha}, \tag{47}$$

$$(n+2)(n+1)|y_{n+2}|\leq(|\lambda_0|A_2+2\omega A_1)\frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}}+\Big(|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|A_2+$$

$$+\omega|\lambda_0|A_1+|y_1|A_0+k^2m_1|y_0|A_5+\omega|x_0|A_0+k^2m_2|y_0|A_0+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}A_0\Big)\frac{H^n}{n^\alpha}+$$

$$+A_0A_2H^{n+1}\frac{L_\alpha}{2n^{\alpha-1}}+k^2m_1A_2A_5H^n\frac{L_\alpha}{n^\alpha}+k^2m_2A_2A_6H^n\frac{L_\alpha}{n^\alpha}+$$

$$+A_0A_1H^n\frac{L_\alpha}{n^\alpha}, \tag{48}$$

$$2r_0|r_n|\leqq 2(|x_0|A_1+|y_0|A_2)\frac{H^n}{n^\alpha}+(A_1^2+A_2^2+A_3^2)H^n\frac{L_\alpha}{n^\alpha}, \tag{49}$$

$$2s_0|s_n|\leq 2r_0|r_n|+2RA_1\frac{H^n}{n^\alpha}+(A_3^2+A_4^2)H^n\frac{L_\alpha}{n^\alpha}, \tag{50}$$

$$(n+1)r_0|u_{n+1}|\leq 3|r_1|A_5\frac{H^n}{n^\alpha}+3|u_0|A_3\frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}}+|u_1|A_3\frac{H^n}{n^\alpha}+$$

$$+4A_3A_5H^{n+1}\frac{L_\alpha}{2n^{\alpha-1}}, \tag{51}$$

$$(n+1)s_0|v_{n+1}|\leq 3|s_1|A_6\frac{H^n}{n^\alpha}+3|v_0|A_4\frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}}+|v_1|A_4\frac{H^n}{n^\alpha}+$$

$$+4A_4A_6H^{n+1}\frac{L_\alpha}{2n^{\alpha-1}}. \tag{52}$$

Теперь заметим, что при $n\geqq 1$ имеем

$$\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\leq 2^\alpha,\quad \frac{1}{n^\alpha}\leq\frac{2^\alpha}{(n+1)^\alpha}\leq\frac{2^{2\alpha}}{(n+2)^\alpha},$$

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha(n+2)}\leq\frac{2^\alpha}{(n+2)^\alpha(n+2)}\leq\frac{2^\alpha}{3(n+2)^\alpha},$$

$$\frac{1}{n^\alpha(n+1)(n+2)}\leq\frac{2^{2\alpha}}{(n+2)^\alpha(n+1)(n+2)}\leq\frac{2^{2\alpha}}{6(n+2)^\alpha}$$





$$\frac{1}{n^{\alpha-1}(n+1)(n+2)}\leq\frac{2^{\alpha-1}}{(n+1)^\alpha(n+2)}<\frac{2^{2\alpha-1}}{(n+2)^\alpha(n+2)}\leq\frac{2^{2\alpha}}{6(n+2)^\alpha}.$$

Пользуясь этим, из (47) — (52) получаем

$$|x_{n+2}|\leq(|\lambda_0|A_1+2\omega A_2)\frac{H^{n+1}2^\alpha}{3(n+2)^\alpha}+(|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|A_1+$$

$$+\omega|\lambda_0|A_2+|x_1|A_0+k^2m_1|x_0|A_5+k^2m_2A_6+\omega|y_0|A_0)\frac{H^n\cdot 2^{2\alpha}}{6(n+2)^\alpha}+$$

$$\frac{L_\alpha}{2}A_0A_1\frac{H^{n+1}2^{2\alpha}}{6(n+2)^\alpha}+(k^2m_1A_1A_5+k^2m_2A_1A_6+\omega A_0A_1)\frac{L_\alpha H^n 2^{2\alpha}}{6(n+2)^\alpha}, \tag{54}$$

$$|y_{n+2}|\leq(|\lambda_0|A_2+2\omega A_1)\frac{H^{n+1}2^\alpha}{3(n+2)^\alpha}+(|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|A_2+$$

$$+\omega|\lambda_0|A_1+|y_1|A_0+k^2m_1|y_0|A_5+\omega|x_0|A_0+k^2m_2|y_0|A_6+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}A_6)\frac{H^n2^{2\alpha}}{6(n+2)^\alpha}+$$

$$+\frac{L_\alpha}{2}A_0A_2\frac{H^{n+1}2^{2\alpha}}{6(n+2)^\alpha}+(k^2m_1A_2A_5+k^2m_2A_2A_6+A_0A_1)\frac{L_\alpha H^n2^\alpha}{6(n+2)^\alpha}, \tag{55}$$

$$|u_n|\leq\left[\frac{1}{r_0}(|x_0|A_1+|y_0|A_2)+\frac{L_\alpha}{2r_0}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)\right]\frac{H^n}{n^\alpha}, \tag{56}$$

$$|s_n|\leq\frac{r_0}{s_0}|r_n|+\left[\frac{R}{s_0}A_1+\frac{L_\alpha}{2s_0}\left(A_3^2+A_4^2\right)\right]\frac{H^n}{n^\alpha}, \tag{57}$$

$$|u_{n+1}|\leq\frac{1}{r_0}(3|r_1|A_5+|u_1|A_3)\frac{H^n2^\alpha}{(n+1)^\alpha 2}+\frac{3|u_0|}{r_0}A_3\frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha}+$$

$$+\frac{2L_\alpha}{r_0}A_3A_5\frac{H^{n+1}2^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}(n+1)}, \tag{58}$$

$$|v_{n+1}|\leq\frac{1}{s_0}(3|s_1|A_0+|v_1|A_4)\frac{H^n2^\alpha}{(n+1)^\alpha 2}+\frac{3|v_0|}{s_0}A_4\frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha}+$$

$$+\frac{2L_\alpha}{s_0}A_4A_6\frac{H^{n+2}2^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}(n+1)}. \tag{59}$$

7. Вывод основных неравенств для коэффициентов (30) и доказательство сходимости рядов (17). Теперь для того чтобы показать справедливость неравенств

$$\left.\begin{aligned}&|x_{n+2}|\leq A_1\frac{H^{n+2}}{(n+2)^\alpha},\quad |y_{n+2}|\leq A_2\frac{H^{n+2}}{(n+2)^\alpha},\quad |r_n|\leq A_3\frac{H^n}{n^\alpha},\\&|s_n|\leq A_4\frac{H^n}{n^\alpha},\quad |u_{n+1}|\leq A_5\frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha},\quad |v_{n+1}|\leq A_6\frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha},\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

нужно показать существование положительных постоянных $H$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\frac{2^{\alpha}}{3H}\left(|\lambda_0|A_1+2\omega A_2+\frac{L_\alpha 2^{\alpha}}{4}A_0A_1\right)+\frac{2^{2\alpha}}{6H^2}\left[|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|A_1+\right.$$

$$+\omega|\lambda_0|A_2+|x_1|A_0+k^2m_1|x_0|A_5+k^2m_2|x_0|A_6+\omega|y_0|A_0+$$

$$\left.+L_\alpha\left(k^2m_1A_1A_5+k^2m_2A_1A_6+\omega A_0A_2\right)\right]\leq A_1, \tag{61}$$

$$\frac{2^{\alpha}}{3H}\left(|\lambda_0|A_2+2\omega A_1+\frac{L_\alpha 2^{\alpha}}{4}A_0A_2\right)+\frac{2^{2\alpha}}{6H^2}\left[|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|A_2+\right.$$

$$+\omega|\lambda_0|A_1+|y_1|A_0+k^2m_1|y_0|A_5+\omega|x_0|A_0+k^2m_2|y_0|A_6+\frac{k^2m_2}{\omega R^2}A_0+$$

$$\left.+L_\alpha\left(k^2m_1A_2A_5+k^2m_2A_2A_6+A_0A_1\right)\right]\leq A_2, \tag{62}$$

$$\frac{1}{r_0}\left(|x_0|A_1+|y_0|A_2\right)+\frac{L_\alpha}{2r_0}\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)\leq A_3, \tag{63}$$

$$\frac{1}{s_0}\left(|x_0|A_1+|y_0|A_2+RA_1\right)+\frac{L_\alpha}{2s_0}\left(A_1^2+A_2^2+2A_3^2+A_4^2\right)\leq A_4, \tag{64}$$

$$\frac{3|u_0|}{r_0}A_3+\frac{2^{\alpha}L_\alpha}{r_0}A_3A_5+\frac{2^{\alpha-1}}{r_0H}\left(3|r_1|A_5+|u_1|A_3\right)\leq A_5, \tag{65}$$

$$\frac{3|v_0|}{s_0}A_4+\frac{2^{\alpha}L_\alpha}{s_0}A_4A_6+\frac{2^{\alpha-1}}{s_0H}\left(3|s_1|A_6+|v_1|A_4\right)\leq A_6. \tag{66}$$

Пусть положительные числа $A_5$, $A_6$, $H_0'$ и $H_0''$ произвольно зафиксированы, причем

$$H_0'>3\cdot 2^{\alpha-1}\frac{|r_1|}{r_0} \text{ и } H_0''>3\cdot 2^{\alpha-1}\frac{|s_1|}{s_0}. \tag{67}$$

Пусть $A_4$ — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$A_4<\min\left\{\frac{2s_0}{L_\alpha},\ \frac{A_6\left(s_0H_0''-3\cdot 2^{\alpha-1}|s_1|\right)}{H_0''\left(2^{\alpha}L_\alpha A_6+3|v_0|\right)+2^{\alpha-1}|v_1|}\right\}. \tag{68}$$

Зафиксировав $A_4$, положительное число $A_3$ выберем настолько малым, чтобы было

$$A_3<\min\left\{\frac{2r_0}{L_\alpha},\ \sqrt{A_4\left(\frac{s_0}{L_\alpha}-\frac{1}{2}A_4\right)},\ \frac{A_5\left(r_0H_0'-3\cdot 2^{\alpha-1}|r_1|\right)}{H_0'\left(2^{\alpha}L_\alpha A_5+3|u_0|\right)+2^{\alpha-1}|u_1|}\right\}. \tag{69}$$

Зафиксировав $A_3$, положительные числа $A_1$ и $A_2$ выберем настолько малым, чтобы имели место следующие неравенства:

$$|x_0|A_1+|y_0|A_2+\frac{L_\alpha}{2}\left(A_1^2+A_2^2\right)\leq A_3\left(r_0-\frac{L_\alpha}{2}A_3\right), \tag{70}$$



$$(R+|x_0|)A_1+|y_0|A_2+\frac{L_\alpha}{2}\left(A_1^2+A_2^2\right)\leq A_4s_0-\frac{L_\alpha}{2}\left(2A_3^2+A_4^2\right). \tag{71}$$

Например, можно положить $0<A_1\leq 1$, $0<A_2\leq 1$ и

$$A_1+A_2<\min\left\{\frac{A_3\left(2r_0-L_\alpha A_3\right)}{L_\alpha+2r_0},\ \frac{2A_4s_0-L_\alpha\left(A_4^2+2A_3^2\right)}{L_\alpha+2(R+r_0)}\right\}. \tag{72}$$

Далее, положим

$$H_1=\frac{2^{\alpha}}{3}\left(|\lambda_0|+2\omega\frac{A_2}{A_1}+\frac{L_\alpha 2^{\alpha}}{4}A_1\right)+\frac{2^{2\alpha}}{6}\left[|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|+\right.$$

$$+\omega|\lambda_0|\frac{A_2}{A_1}+|x_1|\frac{A_0}{A_1}+k^2m_1|x_0|\frac{A_5}{A_1}+k^2m_2|x_0|\frac{A_6}{A_1}\omega+|y_0|\frac{A_0}{A_1}+$$

$$\left.+L_\alpha\left(k^2m_1A_5+k^2m_2A_6+\omega A_0\frac{A_2}{A_1}\right)\right], \tag{73}$$

$$H_2=\frac{2^{\alpha}}{3}\left(|\lambda_0|+2\omega\frac{A_1}{A_2}+\frac{L_\alpha 2^{\alpha}}{4}A_0\right)+\frac{2^{2\alpha}}{6}\left[|k^2m_1u_0+k^2m_2v_0-\omega^2|+\right.$$

$$+\omega|\lambda_0|\frac{A_1}{A_2}+|y_1|\frac{A_0}{A_2}+k^2m_1|y_0|\frac{A_5}{A_2}+\omega|x_0|\frac{A_0}{A_2}+k^2m_2|y_0|\frac{A_6}{A_2}+$$

$$\left.+\frac{k^2m_2}{\omega K^2}\frac{A_0}{A_2}+L_\alpha\left(k^2m_1A_5+k^2m_2A_6+A_0\frac{A_1}{A_2}\right)\right], \tag{74}$$

$$H^*=\max\{1,\ H_0,\ H_0',\ H_0'',\ H_1,\ H_2\}, \tag{75}$$

$$H\geq H^*. \tag{76}$$

Теперь нетрудно проверить, что если положительные постоянные $A_i\,(i=1,\ 2,\ldots,6)$ и $H$ удовлетворяют условиям (68) — (71) и (76), то справедливы все неравенства (61) — (66).

Для этого сперва заметим, что если $\frac{b}{a}<z_0\leq z<+\infty$, то дробно-линейная функция $\frac{az-b}{cz+d}$ при положительных $a$, $b$, $c$ и $d$ достигает для $z=z_0$ своего положительного минимума $\frac{az_0-b}{cz_0+d}$.

Поэтому из (68) будем иметь

$$A_4<\frac{A_6\left(s_0H_0''-3\cdot 2^{\alpha-1}|s_1|\right)}{H_0''\left(2^{\alpha}L_\alpha A_6+3|v_0|\right)+2^{\alpha-1}|v_1|}$$

или, при $H\geq H_0''$,

$$A_4<\frac{A_6\left(s_0H-3\cdot 2^{\alpha-1}|s_1|\right)}{H\left(2^{\alpha}L_\alpha A_6+3|v_0|\right)+2^{\alpha-1}|v_1|}=\frac{A_6\left(1-\dfrac{3\cdot 2^{\alpha-1}|s_1|}{Hs_0}\right)}{2^{\alpha}\dfrac{L_\alpha A_6}{s_0}+\dfrac{3|v_0|}{s_0}+\dfrac{2^{\alpha-1}|v_1|}{s_0H}}.$$

Отсюда, очевидно, следует неравенство (66). Из (69) имеем, что

$$A_3 < \frac{A_5\left(r_0 H'_0 - 3\cdot 2^{\varkappa-1}|r_1|\right)}{H'_0\left(2^{\varkappa} L_{\varkappa} A_5 + 3|u_0|\right) + 2^{\varkappa-1}|u_1|} < \frac{A_5\left(r_0 H - 3\cdot 2^{\varkappa-1}|r_1|\right)}{H\left(2^{\varkappa} L_{\varkappa} A_5 + 3|u_0|\right) + 2^{\varkappa-1}|u_1|} =$$

$$= \frac{A_5\left(1 - 3\cdot 2^{\varkappa-1}\dfrac{r_1}{Hr_0}\right)}{\dfrac{2^{\varkappa} L_{\varkappa}}{r_0} A_5 + \dfrac{3|u_0|}{r_0} + \dfrac{2^{\varkappa-1}|u_1|}{r_0 H}}.$$

Отсюда следует (65).

Из (70) и (71), очевидно, вытекают (63) и (64).

В частности, если $A_1$ и $A_2$ удовлетворяют условиям (72), то тогда имеем

$$(A_1 + A_2)(L_{\varkappa} + 2r_0) < A_3(2r_0 - L_{\varkappa} A_3)$$

и

$$A_1 + A_2(L_{\varkappa} + 2R + 2r_0) < 2A_4 s_0 - L_{\varkappa}(A_4^2 + 2A_5^2).$$

Отсюда, в силу того, что $|x_0| \leq r_0$, $|y_0| \leq r_0$, $A_1^2 \leq A_1$ и $A_2^2 \leq A_2$, следуют неравенства (63) и (64).

Наконец, принимая во внимание (73) — (76), легко получить неравенства (61) — (62).

Таким образом мы доказали справедливость неравенств (30) для любых $n = 1, 2, \ldots$

Теперь, очевидно, что степенные ряды (17) сходятся при

$$0 \leq t \leq \frac{1}{H^*}. \qquad (^*)$$

Тем самим доказано существование решений (6), удовлетворяющих начальным условиям (12), в виде степенных рядов относительно времени $t$, сходящихся на промежутке $(^*)$.

В одной из следующих статьей, мы приведем численные примеры для применения вышеизложенных результатов.

Сентябрь, 1958

## ON THE RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM FOR THE CASE WHEN THE ATTRACTED BODY HAS THE VARIABLE MASS

N. G. MAGNARADZE

## ЛИТЕРАТУРА


1. Steffensen T. F. On the restricted problem of three bodies. Kgl. danske. videnskab. selskab. Mat.—fys. medd., 1956, 30, № 18, p. 17.
2. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы, Москва, 1952.
3. Космодемьянский А. А, Курс теоретической механики, Москва, 1952.
4. Дубошин Г. Н. Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени, Астр. журн. 1925, 2, № 4, 5—11; 1927, 4, № 2, 123—142; 1928, 5, № 2—3, 153—172; 1929, 6, № 2, 162—179.





5. Дубошин Г. Н. О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами, Астр. журн., 1930, 7, № 3—4, 153—172.
6. Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels, B II, Berlin, 1927.
7. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, Л., т. 2, 1937.
8. Магнарадзе Н. Г. Некоторые замечания к задаче движения материальной точки под действием силы, зависящей от времени, Бюл. Абастуманской астрофиз. обс., 1958, № 22, 139—144.