Тогда легко проверить, что

$$u_n = \frac{n+1}{2} \text{ и } A(\lambda_n) = \frac{K_0}{e}(4\bar{F})^{\frac{1}{n}} n.$$

Далее, нетрудно показать, что ряд (22) сходится, когда $0 \leqslant \omega < \frac{e}{2K_0}$.

Таким образом, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\omega) = F(\omega) \text{ при } 0 < \omega < \omega^*,$$

где

$$\omega^* < \min\left(\bar{h}, \frac{e}{2K_0}\right).$$

Теперь из (4) имеем, что при $0 < \omega < \omega^*$ равномерно

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n(\omega) = l_0 \cos(\omega - \delta_0) + \int_0^\omega F(v)\sin(\omega - v)\,dv.$$

Поэтому из (8) вытекает равенство (5), т. е. $F(w)$ является искомым решением интегрального уравнения (5).

Наконец, нетрудно проверить, что найденное решение является единственным непрерывно дифференцируемым решением рассматриваемой задачи.

Январь, 1957 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Дубошин, Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астр. журн., 2, № 4, 5—11, 1925.
2. Г. Н. Дубошин, Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астр. журн., 4, № 2, 123—142, 1927.
3. Г. Н. Дубошин, Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астр. журн., 5, № 2—3, 153—172, 1928.
4. Г. Н. Дубошин, Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астр. журн., 6, № 2, 162—179, 1929.
5. Г. Н. Дубошин, О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами. Астр. журн., 7, № 3—4, 153—172, 1930.
6. W. Niklibor c, Sur l'application de la méthode des approximations successives, dans la théorie des équations différentielles. Studia Mathematica, 1, 201 — 209 1929.

აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 22, 1958
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 22, 1958

ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრალები სფერულ კოორდინატებში და მათი გამოყენება ორბიტების გამოსათვლელად

მ. იმნაძე

შესავალი

ორი სხეულის ამოცანის ამოხსნა საერთოდ ცნობილია. ამ ამოხსნაში, როგორც ვფიქრობთ, ე. წ. პირველი ინტეგრალები გამოიყვანება არათანმიმდევრული ხერხით. ამასთან, ზოგიერთ მათგანს არა აქვს უშუალო გამოყენება ორბიტების გამოთვლისას. ასეთი შეხედულების საფუძველზე რამდენიმე წლის წინ მიზნად დავისახეთ: 1) თანმიმდევრობით გამოგვეყვანა ორი სხეულის ამოცანის პირველი ინტეგრალები და 2) გვეპოვნა ორბიტის გამოთვლის ახალი ხერხი, სადაც პირველ ინტეგრალებს ექნებოდა უფრო მეტი გამოყენება, ვიდრე ცნობილ მეთოდებში.

ამოცანის პირველი ნაწილი შედარებით ადვილად იქნა გადაწყვეტილი. გაცილებით ძნელი აღმოჩნდა მეორე პრობლემა — ორბიტის გამოთვლის ახალი მეთოდის დამუშავება. პირველად ვცადეთ შეგვექმნა უფრო ზუსტი ხერხი რიცხობრივი წარმოებულებისათვის, რაც გააადვილებდა ძირითადი განტოლების ამოხსნას. მაგრამ, სამი დაკვირვების შემთხვევაში ეს არ აღმოჩნდა შესაძლებელი. შემდგომ გადავწყვიტეთ დაგვეახლოვებია ჩვენი მეთოდი კლასიკურ მეთოდთან, ისე რომ, თუ მივიღებდით ამ მეთოდის ზოგიერთ დებულებას, პირველი ინტეგრალების საფუძველზე შექმნილიყო ორბიტის გამოთვლის ახალი ხერხი.

ვფიქრობთ, რომ ორბიტის განსაზღვრის ეს ახალი მეთოდი ზოგიერთი მხრივ უფრო ხელსაყრელი იქნება, ვიდრე არსებული მეთოდები. ამჟამად იგი ალბათ სავსებით ვერ შეცვლის საყოველთაოდ მიღებულ ლაგრანჟ-გაუსის მეთოდს, მაგრამ შემდეგში შესაძლებელია განვითარებულ იქნას (ავტორის ან სხვების მიერ) და ნამდვილ ქმედით მეთოდად გადაიქცეს.

ნაწილი 1

ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრაცია სფერულ კოორდინატებში

§ 1. მოძრაობის განტოლება სფერულ კოორდინატებში

როგორც ცნობილია, სწორკუთხოვან კოორდინატებში ორი სხეულის ამოცანის შეფარდებითი მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\,\frac{m_0+m}{r^3}\,x,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\,\frac{m_0+m}{r^3}\,y, \qquad (D)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -k^2\,\frac{m_0+m}{r_3}\,z,$$

სადაც x, y, z ცთომილის (ან კომეტის) კოორდინატებია, m_0 არის მზის მასა, m-ცთომილის (ან კომეტის) მასა, r მათ შორის მანძილი, ხოლო k^2— პროპორციულობის კოეფიციენტი ანუ მიზიდულობის მუდმივი. სიმოკლისათვის $k^2(m_0+m)$ -ის მაგიერ დავწერთ k^2-ს.

შემოვიღოთ სფერული კოორდინატები: r, β, λ, სადაც r რადიუს-ვექტორია, β -განედი ან დახრილობა, λ -გრძედი ან პირდაპირი აღვლენა. დამოკიდებულება სფერულ და სწორკუთხოვან კოორდინატებს შორის ასეთია:

$$x = r\cos\beta\cos\lambda,$$
$$y = r\cos\beta\sin\lambda,$$
$$z = r\sin\beta.$$

ავიღოთ პირველი წარმოებულები ამ ტოლობებიდან და გავაწარმოოთ t-თი. $\frac{d}{dt}$, აქაც და შემდგომშიაც, აღვნიშნოთ წერტილით ზევიდან. გვექნება:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\beta\cos\lambda - r\dot{\beta}\sin\beta\cos\lambda - r\dot{\lambda}\cos\beta\sin\lambda,$$
$$\dot{y} = \dot{r}\cos\beta\sin\lambda - r\dot{\beta}\sin\beta\sin\lambda - r\dot{\lambda}\cos\beta\cos\lambda,$$
$$\dot{z} = \dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta.$$

თუ ავამაღლებთ კვადრატში და შევკრებთ, მივიღებთ სიჩქარის კვადრატის გამოსახულებას:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2 + r^2\cos^2\beta\,\dot{\lambda}^2. \qquad (v)$$

მოძრაობის (D) განტოლებაში ჩასასმელად პირველი წარმოებულების გამოსახულებანი კიდევ უნდა გავაწარმოოთ. მარჯვენა მხარეში $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ და $\frac{z}{r}$ ახლა უნდა შევცვალოთ $\cos\beta\cos\lambda$, $\cos\beta\sin\lambda$ და $\sin\beta$-თი. ნაშინ მივიღებთ მოძრაობის განტოლებას სფერულ კოორდინატებში:

$$\ddot{r}\cos\beta\cos\lambda - 2\dot{r}\dot{\beta}\sin\beta\cos\lambda - 2\dot{r}\dot{\lambda}\cos\beta\sin\lambda + 2r\dot{\beta}\dot{\lambda}\sin\beta\sin\lambda -$$
$$\dot{r}\beta^2\cos\beta\cos\lambda - r\ddot{\beta}\sin\beta\cos\lambda - r\dot{\lambda}^2\cos\beta\cos\lambda - r\ddot{\lambda}\cos\beta\sin\lambda = -$$
$$-\frac{k^2}{r^2}\cos\beta\cos\lambda,$$

$$\ddot{r}\cos\beta\sin\lambda - 2\dot{r}\dot{\beta}\sin\beta\sin\lambda + 2\dot{r}\dot{\lambda}\cos\beta\cos\lambda - 2r\dot{\beta}\dot{\lambda}\sin\beta\cos\lambda -$$
$$-r\dot{\beta}^2\cos\beta\cos\lambda - r\ddot{\beta}\sin\beta\sin\lambda - r\dot{\lambda}^2\cos\beta\sin\lambda + \dot{r}\ddot{\lambda}\cos\beta\cos\lambda = -$$
$$-\frac{k^2}{r^2}\cos\beta\sin\lambda,$$

$$\ddot{r}\sin\beta + 2\dot{r}\dot{\beta}\cos\beta + r\ddot{\beta}\cos\beta - r\dot{\beta}^2\sin\beta = -\frac{k^2}{r^2}\sin\beta.$$

გავამრავლოთ ეს განტოლებანი შესაბამისად $\cos\beta\cos\lambda$, $\cos\beta\sin\lambda$, $\sin\beta$-ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$\ddot{r} - r\dot{\beta}^2 - r\cos^2\beta\,\dot{\lambda}^2 + \frac{k^2}{r^2} = 0. \qquad (1)$$

გავამრავლოთ შესაბამისად $\cos\beta\sin\lambda$, $-\cos\beta\cos\lambda$, 0-ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$-2\dot{r}\dot{\beta}\cos^2\beta + 2r\dot{\beta}\dot{\lambda}\sin\beta\cos\beta - r\ddot{\lambda}\cos^2\beta = 0. \qquad (2)$$

გავამრავლოთ შესაბამისად $\sin\beta\cos\lambda$, $\sin\beta\sin\lambda$, $-\cos\beta$-ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$-2\dot{r}\dot{\beta} - r\ddot{\beta} - r\sin\beta\cos\beta\,\dot{\lambda}^2 = 0. \qquad (3)$$

ცხადია, რომ ეს სამი განტოლება მოძრაობის (D) განტოლების ექვივალენტურია და ჩვენი მიზანია მათი ინტეგრაცია.

§ 2. პირველი რიგის ინტეგრაცია

(2) განტოლებას თუ გავამრავლებთ—r -ზე, მივიღებთ

$$2r\dot{r}\dot{\lambda}\cos^2\beta - 2r^2\dot{\beta}\dot{\lambda}\sin\beta\cos\beta + r^2\ddot{\lambda}\cos^2\beta = 0,$$

რაც შეიძლება გადაიწეროს ასე:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2\beta\,\dot{\lambda}\right) = 0.$$

აქედან ვღებულობთ პირველ ინტეგრალს:

$$r^2\cos^2\beta\,\dot{\lambda} = c_1, \qquad (1)$$

სადაც C-თი საერთოდ საინტეგრაციო მუდმივებს აღვნიშნავთ.

განვსაზღვროთ I-დან $\dot{\lambda}$ და შევიტანოთ იგი (3) განტოლებაში, გვექნება:

$$2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta} + r\sin\beta\cos\beta\,\frac{c_1^2}{r^4\cos^4\beta} = 0.$$

გავამრავლოთ ეს $2r^2\dot{\beta}$ -ზე და მივიღოთ მხედველობაში, რომ

$$\frac{2\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta}{\cos^4\beta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\right),$$

—მაშინ, ზევითა ტოლობის ინტეგრაციით მივიღებთ მეორე ინტეგრალს

$$r^4\dot{\beta}^2 + \frac{c_1^2}{\cos^2\beta} = c_2^2. \qquad (II)$$

მუდმივი აღნიშნულია c_2^2-ით, რადგან მარცხენა მხარე წარმოადგენს კვადრატების ჯამს და არ შეიძლება უარყოფითი იყოს.

(1) განტოლებაში $\dot{\beta}^2$ და $\dot{\lambda}^2$ შევცვალოთ I და II ინტეგრალებიდან მიღებული გამოსახულებებით, მივიღებთ:

$$\ddot{r} + r\,\frac{c_1^2}{r^4\cos^2\beta} - r\,\frac{c_2^2}{r^4} - r\cos^2\beta\,\frac{c_1}{r^4\cos^4\beta} + \frac{k^2}{r^2} = 0.$$

მეორე და მეოთხე წევრი ერთმანეთს აბათილებს. გავამრავლოთ განტოლება $2\dot{r}$ -ზე და მოვახდინოთ ინტეგრაცია. მივიღებთ მესამე ინტეგრალს:

$$\dot{r}^2 + \frac{c_2^2}{r^2} - \frac{2k^2}{r} = c_3. \qquad \text{(III)}$$

ამ სამი პირველი ინტეგრალის მიღებით, მეორე რიგის სამი (1), (2), (3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა დაყვანილ იქნა პირველი რიგის სამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე: (I), (II), (III).

პირველი პარაგრაფის (v) განტოლებაში ჩავსვათ $\dot{r}^2$, $\dot{\beta}^2$ და $\dot{\lambda}^2$. (I), (II), (III) ინტეგრალებიდან მივიღებთ ცოცხალი ძალის ინტეგრალს:

$$v^2 = \frac{2k^2}{r} + c_3. \qquad (4)$$

§ 3. მეორე რიგის ინტეგრაცია

მეორე ინტეგრალი დავწეროთ ასე:

$$r^4 \dot{\beta}^2 = c_2^2 - \frac{c_1^2}{\cos^2\beta}$$

და გავყოთ იგი პირველი ინტეგრალის კვადრატზე; მივიღებთ:

$$\left(\frac{\dot{\beta}}{\dot{\lambda}}\right)^2 \frac{1}{\cos^4\beta} = \frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{\cos^2\beta}.$$

აქედან

$$\frac{d\beta}{\pm\sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2}\cos^4\beta - \cos^2\beta}} = d\lambda.$$

აღვნიშნოთ $z = \operatorname{tg}\beta$, მაშინ

$$\cos^2\beta = \frac{1}{1+z^2}, \quad d\beta = \frac{dz}{1+z^2}$$

და მივიღებთ:

$$d\lambda = \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\pm\sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2}\frac{1}{(1+z^2)^2} - \frac{1}{1+z^2}}}.$$

თუ აქ აღვნიშნავთ

$$\varepsilon^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} - 1, \qquad (5)$$

მაშინ გვექნება:

$$d\lambda = \frac{dz}{\pm\sqrt{\varepsilon^2 - z^2}}.$$

ამის ინტეგრაცია მოგვცემს მეოთხე ინტეგრალს:

$$\arcsin\frac{z}{\varepsilon} = \lambda + c_4,$$

რომელიც შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$\operatorname{tg}\beta = \varepsilon\sin(\lambda + c_4). \qquad \text{(IV)}$$

(I) და (III) ინტეგრალებიდან (IV) -ის დახმარებით გამოვრიცხოთ dt. (I) -დან გვაქვს:

$$dt = \frac{r^2\cos^2\beta}{c_1}\,d\lambda.$$

(IV) ინტეგრალის მიხედვით —

$$\cos^2\beta = \frac{1}{1+tg^2\beta} = \frac{1}{1+\varepsilon^2\sin^2(\lambda+c_4)}.$$

ამიტომ,

$$dt = \frac{r^2 d\lambda}{c_1[1+\varepsilon^2\sin^2(\lambda+c_4)]}.$$

ავიყვანოთ უკანასკნელი კვადრატში და ჩავსვათ (III) -ში, მივიღებთ:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^4} c_1 \left[1+\varepsilon^2\sin^2(\lambda+c_4)\right]^2 + \frac{c_2^2}{r^2} - \frac{2k^2}{r} - c_3 = 0$$

ანუ:

$$\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\lambda}\right]^2 = \left[c_3 + \frac{k_4}{c_2^2} - \left(\frac{c_2}{r} - \frac{k^2}{c_2}\right)^2\right] \frac{1}{c_1^2[1+\varepsilon^2\sin^2(\lambda+c_4)]^2}.$$

კვადრატული ფესვის ამოღებისა და მცირე გარდაქმნის შემდეგ დაიწერება:

$$\frac{1}{c_2}\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\frac{c_2}{r} - \frac{k^2}{c_2}}{\sqrt{c_3 + \frac{k^4}{c_2^2}}}\right] = \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{c_2}{r} - \frac{k^2}{c_2}\right)^2}{c_3 + \frac{k^4}{c_2^2}}}\,\frac{1}{c_1[1+\varepsilon^2\sin^2(\lambda+c_4)]}$$

აღვნიშნოთ:

$$\frac{\frac{c_2}{r} - \frac{k^2}{c_2}}{\sqrt{c_3 + \frac{k^4}{c_2^2}}} = u, \qquad tg(\lambda + c_4) = z,$$

მაშინ

$$d\lambda = \frac{dz}{1+z^2}, \quad \sin^2(\lambda + c_4) = \frac{z^2}{1+z^2}$$

და წინა ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\frac{1}{c_2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{c_1}\int\frac{dz}{1+\frac{c_2^2}{c_1^2}z^2}.$$

აქედან ინტეგრაციით მივიღებთ:

$$\arccos u = \operatorname{arctg}\left[\frac{c_2}{c_1}z\right] + c_5.$$

ძველ ცვლადებს როცა დაუბრუნდებით, გვექნება:

$$\arccos\left[\frac{\frac{c_2}{r}-\frac{k^2}{c_2}}{\sqrt{c_3+\frac{k^4}{c_2^2}}}\right]=\operatorname{arctg}\left[\frac{c_2}{c_1}\operatorname{tg}(\lambda+c_4)\right]+c_5$$

ეს არის მეხუთე ინტეგრალი, რომელიც შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$\frac{r}{c_2}=\frac{1}{\sqrt{c_3+\frac{k^2}{c_2^2}}\cos\left\{arc\operatorname{tg}\left[\frac{c_2}{c_1}\operatorname{tg}(\lambda+c_4)\right]+c_5\right\}}$$

აღვნიშნოთ:

$$\frac{c_2^2}{k^2}=p \tag{6}$$

$$\sqrt{1+\frac{c_2^2c_3}{k_4}}=e, \tag{7}$$

$$\frac{c_2}{c_1}\operatorname{tg}(\lambda+c_4)=\operatorname{tg}\varphi \tag{8}$$

მაშინ გვექნება:

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi+c_5)}. \tag{V}$$

§ 4. მეორე რიგის ინტეგრაცია (გაგრძელება)

(IV) და (V) ინტეგრალები გამოსახავენ კავშირს კოორდინატებს შორის სრული გადაწყვეტისათვის აუცილებელია, რომ ერთ-ერთი კოორდინატი მაინც გამოისახოს დროის ფუნქციის სახით. ამ მიზნით ავიღოთ (I) ინტეგრალი და გამოვსახოთ იგი φ-ის საშუალებით. r-ის მაგიერ ჩავსვათ (V) გამოსახულება. ხოლო $\cos^2\beta$ განვსაზღვროთ (IV) -დან და (8) -დან.

$$\cos^2\beta=\frac{1}{1+\varepsilon^2\sin^2(\lambda+c_4)}=\frac{1+\frac{c_2^2}{c_1^2}\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

იმავე (8) -დან გამოვითვლით $\dot\lambda$ -ს:

$$\dot\lambda=\frac{\frac{c_1}{c_2}[1+\operatorname{tg}^2\varphi]}{1+\frac{c_1^2}{c_2^2}\operatorname{tg}^2\varphi}\dot\varphi.$$

ჩავსვათ (I) ინტეგრალში, მივიღებთ

$$r^2\dot\varphi=c_2, \tag{9}$$

რაც შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{p^2\,d\varphi}{[1+e\cos(\varphi+c_5)]^2}=c_2\,dt.$$

აღვნიშნოთ

$$\varphi+c_5=v,$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=z,$$

მაშინ

$$d\varphi=dv,\qquad dv=\frac{2\,dz}{1+z^2},\qquad \cos v=\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$1+e\cos v=\frac{1+e+(1-e)z^2}{1+z^2}$$

და მივიღებთ:

$$\frac{2p^2(1+z^2)\,dz}{[1+e+(1-e)z^2]^2}=c_2\,dt.$$

ამის ინტეგრაციისათვის საჭიროა გარდაქმნა; შევნიშნოთ რომ

$$\frac{z^2}{[1+e^2+(1-e^2)z^2]^2}=\frac{[1+e+(1-e)z^2]}{[1+e+(1-e)z^2]^2}\frac{1}{1-e}-\frac{\frac{1+e}{1-e}}{[1+e+(1-e)z^2]^2}.$$

ამიტომ

$$\frac{2p^2(1+z^2)\,dz}{[1+e+(1-e)z^2]^2}=2p^2\left(1-\frac{1+e}{1-e}\right)\frac{dz}{[1+e+(1-e)z^2]^2}+$$

$$+\frac{\frac{2p^2}{1-e}\,dz}{1+e+(1-e)z^2}.$$

პირველი წევრის ინტეგრაცია ხდება რეკურენტული ფორმულით [1].

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{1}{(n-1)(4ac-b^2)}\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+$$

$$+\frac{2n-3}{2n-2}\frac{4a}{4ac-b^2}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

მსგავსი წევრების შეკრების შემდეგ მივიღებთ:

$$\int\frac{2p^2(1+z^2)\,dz}{[1+e+(1-e)z^2]^2}=\frac{2p^2}{1-e^2}\int\frac{dz}{1+e+(1-e)z^2}-$$

$$-\frac{2p^2ez}{(1-e^2)[1+e+(1-e)z^2]}.$$

ამიტომ, საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{2p^2}{(1-e^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}\right]-$$

$$=\frac{2p^2}{(1-e^2)^{3/2}}\frac{e\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{\left[1+\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}\right]}=c_2t+\bar c_6.$$

ეს არის მეექვსე ინტეგრალი, რომელსაც ჩვეულებრივად სხვა ფორმას აძლევენ. აღვნიშნოთ:

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\operatorname{tg}\frac{E}{2} \tag{10}$$

$$\frac{c_2(1-e^2)^{3/2}}{p^2}=n. \tag{11}$$

$$\frac{\bar{c}_6(1-e^2)^{3/2}}{p^2}=c_6. \tag{12}$$

მაშინ ზევითა ტოლობა გადაიწერება ასე:

$$E-e\sin E=nt+c_6. \tag{VI}$$

მეექვსე ინტეგრალის ამ ფორმას ეწოდება კეპლერის განტოლება:

თუ $e=1$, ეს გამოყვანა არ იქნება სამართლიანი, რადგან $1-e=0$.

ამ შემთხვევაში აღვნიშნოთ $\operatorname{tg}\frac{v}{2}=z$; ჩავსვათ (9) -ში, გვექნება:

$$\int\frac{p^2\,dv}{(1+e\cos v)^2}=\int\frac{2p^2d\left(\frac{v}{2}\right)}{4\cos^2\frac{v}{2}}=\frac{p^2}{2}\int(1+z^2)\,dz.$$

აქედან

$$\frac{p^2}{2}\operatorname{tg}\frac{v}{2}+\frac{p^2}{6}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}=c_2t+c_6^1. \tag{IV$_1$}$$

მიღებული ექვსი ინტეგრალი ერთმანეთზე დამოუკიდებელია (იხ. § 5) და ამიტომ ისინი წარმოადგენენ (1), (2), (3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის სრულ ამოხსნას. ეს ინტეგრალები შეიძლება სხვა გზითაც იქნას მიღებული. (9) -დან r^2 -ის მაგიერ გამოვრიცხოთ $\dot\varphi$ (V) -დან გვაქვს:

$$\varphi+c_5=arc\cos\left[\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-1\right)\right].$$

აქედან

$$\dot\varphi=\frac{\frac{1}{e}\cdot\frac{p}{r^2}\dot r}{\sqrt{1-\frac{1}{e^2}\left(\frac{p}{r^2}-1\right)^2}}$$

ჩავსვათ ეს (9) -ში, მივიღებთ:

$$\frac{p\,r\,\dot r}{\sqrt{-(1-e^2)r^2+2pr-p^2}}=c_2.$$

ამის ინტეგრაცია მოგვცემს:

$$\frac{-ep^2}{(1-e^2)^{3/2}}\sqrt{1-\frac{\left(r-\frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\frac{ep}{1-e^2}}}+$$

$$+\frac{p^2}{(1-e^2)^{3/2}}\,arc\sin\frac{r-\frac{p}{1-e^2}}{\frac{ep}{1-e^2}}=c_2t+c_6''.$$

თუ გამოვიყენებთ აღნიშვნას $\frac{a-r}{ae}=\cos E_1$, ვნახავთ, რომ ეს იგივე კეპლერის განტოლებაა* და, მაშასადამე, E -სა და r -ს შორის არსებობს დამოკიდებულება:

$$r=a(1-e\cos E). \tag{13}$$

(I) და (II) ინტეგრალებიდან ვღებულობთ:

$$r^4\cos^2\beta\,\dot\lambda^2+r^4\dot\beta^2=c_2^2. \tag{14}$$

(9) -დან $r^2\dot\varphi=c_2$ და აქედან გამოდის დამოკიდებულება:

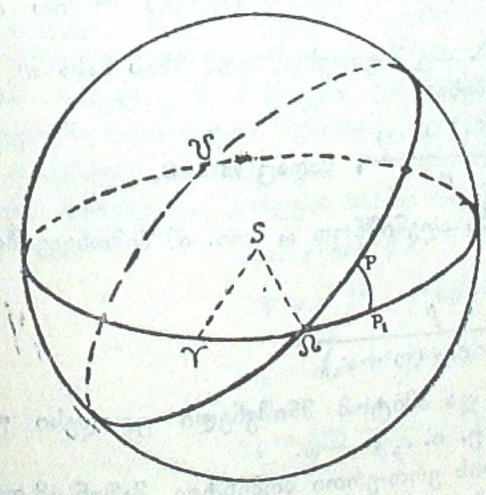
$$\dot\varphi^2=\cos^2\beta\,\dot\lambda^2+\dot\beta^2 \tag{15}$$

§ 5. გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

მიღებული ფორმულები ახასიათებს ცთომილის მოძრაობას მზის გარშემო და საშუალებას იძლევა გამოვარკვიოთ საინტეგრაციო მუდმივების გეომეტრიული მნიშვნელობა; ამავე დროს შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ მათ შესახებ წინასწარ არაფერი არ არის ცნობილი.

(V) ინტეგრალი წარმოადგენს კონუსური კვეთის მრუდს ე. ი. ბრტყელ მრუდს. აქედან დავასკვნით, რომ ცთომილი მოძრაობს სიბრტყეში, რომელიც გადის მზის ცენტრში (რადგან რადიუსი გამოდის მზიდან). ეს იგივეა, რაც კეპლერის პირველი კანონი.

(IV) ინტეგრალიდან $\operatorname{tg}\beta=\varepsilon\sin(\lambda+c_4)$ ჩანს, რომ β იცვლის ნიშანს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ცთომილის ორბიტა კვეთს ეკლიპტიკის (და ეკვატორის) სიბრტყეს. გადაკვეთა ხდება ორ წერტილში (აღმავალი და დაღმავალი კვანძები: Ω და $\mho$). როცა $\beta=0$, მაშინ $\lambda=-c_4$, ე. ი. $-c_4$ არის აღმავალი კვანძის გრძედი: $-c_4=\Omega$.



ნახ. 1.

ნახ. 1-ზე S არის მზე, P არის ცთომილი, P_1 -მისი გეგმილი, γ -დღეღამსწოროობის წერტილი, Ω -აღმავალი კვანძი, $\angle P\Omega P_1=i$ ორბიტის დახრა ძირითად სიბრტყესთან, $\Omega P_1=\lambda$, $PP_1=\beta$, $\Omega P=\varphi$.

სწორკუთხოვან $PP\Omega$ სამკუთხედზე გამოვიყენოთ სფერული ტრიგონომეტრიის ფორმულა $\operatorname{tg}a=\sin b\operatorname{tg}A$, მივიღებთ $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}i\sin(\lambda-\Omega)$. შევადაროთ ეს ფორმულა (IV) ინტეგრალს; ვნახავთ, რომ $\operatorname{tg}i=\varepsilon$. (5)

აღნიშვნის თანახმად, $\varepsilon^2=\frac{c_2^2}{c_1^2}-1$;

აქედან გამოდის:

$$\frac{c_1}{c_2}=\cos i.$$

* ამ ხერხით კეპლერის განტოლება მიღებულია ე. და ბ. სტრემგრენების წიგნში [2].

თუ გამოვიყენებთ იმავე $P\Omega P_1$ სამკუთხედზე ფორმულას: $\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$, მივიღებთ $\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \operatorname{tg}(\Omega P) \cos i$, რადგან $\cos C = 0$. ამის შედარება (8) აღნიშვნასთან, ე. ი. $\frac{c_2}{c_1} \operatorname{tg}(\lambda + c_4) = \operatorname{tg} \varphi$ -სთან გვარწმუნებს, რომ მართლაც $\varphi = \Omega P$, ე. ი. φ არის განედის არგუმენტი.

(9) ფორმულა გამოსახავს ფართთა კანონს, — ფართითი სიჩქარე ორბიტის სიბრტყეში მუდმივია. I ინტეგრალი გამოსახავს, რომ ფართითი სიჩქარის გეგმილი ძირითად საკოორდინატო სიბრტყეზე მუდმივია. ორბიტის სიბრტყეს თუ ავირჩევთ ძირითად საკოორდინატო სიბრტყედ, მაშინ $\beta = 0$, $\lambda = \varphi$ და (I) ინტეგრალიდან პირდაპირ ვღებულობთ (9) ფორმულას.

(II) და (III) ინტეგრალები არ გვხდება თეორიული ასტრონომიის კურსებში, მაგრამ ისინი შეიძლება მიღებულ იქნას მოძრაობის კანონიკური განტოლებიდან. $r^2 \frac{d\beta}{dt}$ არის ფართითი სიჩქარის გეგმილი იმ სიბრტყეზე, რომელიც გადის რადიუსზე ძირითადი სიბრტყის მართობულად. (IV) ფორმულას თეორიულ ასტრონომიაში არ ეწოდება ინტეგრალი, მაგრამ ის გამოიყენება როგორც სფერული ტრიგონომეტრიის ფორმულა.

(7) და (6) აღნიშვნებიდან ე. ი. $e = \sqrt{1 + \frac{c_2^2 c_3}{k_4}}$, $c_2^2 = k^2 p$. მიიღება c_3 -ის მნიშვნელობა $c_3 = -\frac{(1-e^2)k^2}{p}$; მაგრამ $p = a(1-e^2)$ და გვექნება $c_3 = -\frac{k^2}{a}$. აქ უნდა შევნიშნოთ, რომ სიმოკლისათვის k^2 -ით აღნიშნული გვაქვს $k^2(m_0 + m)$ (იხ. § 1). თუ მივიღებთ, რომ მზის მასა $m_0 = 1$, მაშინ (6) აღნიშვნის თანახმად გვექნება:

$$c_2^2 = -k^2(1+m)p, c_3 = -\frac{k^2(1+m)}{a}, \text{ სადაც } m \approx 0.$$

φ-ს მნიშვნელობა პერიჰელიუმში აღვნიშნოთ ω -თი. ამ შემთხვევაში (V) ინტეგრალს ექნება სახე:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\omega + c_5)}.$$

პერიჰელიუმში მანძილი უმცირესია და ამიტომ მნიშვნელი უდიდესი უნდა იყოს. ეს ნიშნავს, რომ $\omega + c_5 = 0$, ე. ი. $c_5 = -\omega$.

თუ T_0 პერიჰელიუმზე გადასვლის ერთ-ერთი მომენტია, მაშინ ამ დროს $E = 0$ და (VI) ინტეგრალიდან გვექნება $c_6 = -nt_0$, სადაც (11) აღნიშვნის თანახმად $n = \frac{c_2(1-e^2)^{3/2}}{p^2}$. ჩავსვათ აქ c_2 -ის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$n = \frac{\sqrt{p}\sqrt{1+m}\, k(1-e^2)^{3/2}}{p^2},$$

მაგრამ $p = a(1-e^2)$ და გვექნება:

$$n = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}.$$

ამრიგად კავშირი ჩვენს საინტეგრაციო მუდმივებსა და თეორიულ ასტრონომიაში მიღებულ მუდმივებს შორის ასეთია:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= k\sqrt{1+m}\sqrt{p}\cos i, \\ c_2 &= k\sqrt{1+m}\sqrt{p}, \\ c_3 &= -\frac{k^2(1+m)}{a}, \\ c_4 &= -\Omega, \\ c_5 &= -\omega, \\ c_6 &= -nT_0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

სადაც T_0 არის პერიჰელიუმზე გადასვლის ერთ-ერთი მომენტი, ხოლო

$$n = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}.$$

§ 6. ინტეგრალების ურთიერთ დამოუკიდებლობა

ახლა განვიხილოთ ორი საკითხი: 1) არის თუ არა ჩვენ მიერ მიღებული ფორმულები ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრალები და 2) ქმნიან თუ არა ისინი შეფარდებითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების სრულ ამოხსნას.

პირველ კითხვაზე დადებითად უნდა ვუპასუხოთ, რადგან (I), (II), (III), (IV), (V) და VI) ფორმულები მიღებულია თანმიმდევრული ინტეგრაციით მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებიდან და მათ ადვილად მიეცემა ფორმა, რომელიც მოითხოვება დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიით; სახელდობრ, თითოეული მუდმივი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ფუნქცია დანარჩენი მუდმივების, კოორდინატების, მათი წარმოებულებისა და დროისა. მართლაც, შეიძლება ისინი ახე დავწეროთ:

$$c_1 = r^2\cos^2\beta\dot{\lambda}, \tag{I}$$

$$c_2^2 = r^4\dot{\beta}^2 + r^4\cos^2\beta\dot{\lambda}^2, \tag{II}$$

$$c_3 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2 + r^2\cos^2\beta\dot{\lambda}^2 - \frac{2k^2}{r}, \tag{III}$$

$$c_4 = \operatorname{arc}\frac{\operatorname{tg}\beta}{\varepsilon} - \lambda, \tag{IV}$$

სადაც

$$\varepsilon^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} - 1;$$

$$c_5 = \operatorname{arc}\cos\left[\frac{\frac{c_2}{r} - \frac{k^2}{c_2}}{\sqrt{c_3 + \frac{k^4}{c_2^2}}}\right] - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left[\frac{c_2}{c_1}\operatorname{tg}(\lambda - c_4)\right], \tag{V}$$

$$c_6 = arc\,\mathrm{tg}\left[\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ \mathrm{tg}\ \frac{\varphi+c_5}{2}\right] - \frac{e\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ \mathrm{tg}\frac{\varphi+c_5}{2}}{1+\frac{1-e}{1+e}\ \mathrm{tg}^2\ \frac{\varphi+c_5}{2}} - nt, \quad \text{(VI)}$$

სადაც

$$e = \sqrt{1+\frac{c_2^2 c_3}{k^4}},$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{c_2}{c_1}\,\mathrm{tg}\,(\lambda + c_4), \qquad n = k\sqrt{\frac{1+m}{a^{3/2}}}.$$

მეორე კითხვის შესახებ უნდა შევნიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ განხილული მოძრაობის (D) განტოლება წარმოადგენს მეექვსე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის თანახმად ამ სისტემის სრულ ამოხსნას წარმოადგენს ექვსი ურთიერთ დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალი. ამრიგად უნდა დავამტკიცოთ ამ ექვსი ინტეგრალის ურთიერთ დამოუკიდებლობა, რომ რომელიმე მათგანი არ მიიღება დანარჩენებიდან შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის გზით. განვიხილოთ ჯერ (IV), (V), (VI) ინტეგრალები. ისინი ურთიერთ დამოუკიდებელია, ვინაიდან (IV) -ში შედის მხოლოდ β და λ; (V) -ში შედის r და λ, ხოლო (VI) -ში შედის λ (φ-ს საშუალებით) და t. პირველ სამ ინტეგრალში შედის წარმოებულები და ამიტომ ისინი დამოუკიდებელია უკანასკნელი სამისაგან. ამავე დროს ისინი ურთიერთ დამოუკიდებელიც არიან, ვინაიდან პირველში შედის მხოლოდ λ -ს წარმოებული, მეორეში შედის λ -სა და β -ს წარმოებული, ხოლო მესამეში შედის λ -ს, β-სა და r-ის წარმოებულები. ამრიგად, ექვსივე ინტეგრალი დამოუკიდებელია და ისინი ქმნიან მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის სრულ ამოხსნას.

თეორიული ასტრონომიის კურსებში [3, 4, 5] გამოყვანილია ექვსი ინტეგრალი: სამი ფართითი ინტეგრალი, ცოცხალი ძალის ინტეგრალი, რადიუს-ვექტორის ფორმულა და კეპლერის განტოლება. ამათგან პირველი ოთხი მიღებულია სწორკუთხოვან კოორდინატებში, მეხუთე და მეექვსე კი პოლარულ კოორდინატებში. ფართითი ინტეგრალებიდან მიიღება სათავეზე (მზეზე) გამავალი სიბრტყის განტოლება, რომელიც შეიძლება ჩაითვალოს ერთ ინტეგრალად. ამ შემთხვევაში სამი ფართითი ინტეგრალიდან დამოუკიდებელი ხქნება ორი. ჩვენი ფორმულებიდან მესამე ექვივალენტურია ცოცხალი ძალის ინტეგრალისა; პირველი ორი ფორმულა კი შეესაბამება ორ ფართით ინტეგრალს. ამავე დროს პირველი ზუსტად დაიყვანება ერთ-ერთ ფართით ინტეგრალზე, მეორეს კი თეორიულ ასტრონომიაში არ აქვს შესაბამისი ფორმა.

სწორკუთხოვან კოორდინატებში სრული ამოხსნა უფრო რთული სახისაა [6]. მასში შედის სამი ფართითი ინტეგრალი, ცოცხალი ძალის ინტეგრალი, სამი ე. წ. ლაპლასის ინტეგრალი და კიდევ ერთი ინტეგრალი, რომელიც გამოსახავს კავშირს დროსა და რომელიმე კოორდინატს შორის, მაგალითად, კეპლერის განტოლება. ამ რვა ინტეგრალს შორის არის ორი დამოკიდებულება ე. ი. დამოუკიდებელი რჩება ექვსი ინტეგრალი, თუმცა ვერ ვიტყვით თუ ამათგან რომელი ორია ზედმეტი.

სრული ამოხსნა სფერულ კოორდინატებში მიიღება აგრეთვე კანონიკურ განტოლებათა თეორიის საშუალებით, რაც განხილულია ციური მექანიკის ზოგიერთ კურსში [6, 7, 8]. მაგრამ, კანონიკურ განტოლებათა თეორია

რთულია და ამოხსნასაც არა აქვს ისეთი ცხადი სახე, როგორც ზემოთ მიღებულ ინტეგრალებს. ამასთან აღსანიშნავია, რომ ჩვენი საინტეგრაციო მუდმივები წარმოადგენს კანონიკურ ელემენტებს.

ამრიგად, ზემოთ მოყვანილ სრულ ამოხსნას უპირატესობა აქვს თანმიმდევრობისა და სიმარტივის მხრივ. ამას გარდა, ვფიქრობთ, რომ მიღებული ფორმულები უფრო ხელსაყრელი იქნება ციური მექანიკისა და სავარსკვლავო ასტრონომიის ზოგიერთი საკითხის შესწავლისათვის.

§ 7. გეოცენტრული მოძრაობა

მიღებული ფორმულები ახასიათებს ცთომილის მოძრაობას მზის გარშემო. საინტერესო იქნებოდა იმის გამორკვევა, თუ რა ფორმა აქვს ცთომილის მოძრაობას დედამიწის მიმართ, რომელიც თვითონ მოძრაობს მზის გარშემო როგორც ერთ-ერთი ცთომილი. დამოკიდებულება ჰელიოცენტრულ და გეოცენტრულ კოორდინატებს შორის ასეთია:

$$r\cos\beta\cos\lambda = \rho\cos b\cos l - X, \quad r\cos b\sin\lambda = \rho\cos b\sin l - Y,$$
$$r\sin\beta = \rho\sin b - Z. \qquad (17)$$

აქ ρ, b, l არის ცთომილის გეოცენტრული სფერული კოორდინატები, ხოლო X, Y, Z მზის სწორკუთხოვანი გეოცენტრული კოორდინატები. მოძრაობის (D) განტოლებაში ჰელიოცენტრულ კოორდინატებს თუ შევცვლით გეოცენტრულით, (17) ფორმულების მიხედვით, § 1-ის ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\ddot\rho - \dot\rho\dot b - \rho\cos^2 b\,\dot l^2 + \frac{k^2}{r^3}\rho = (\ddot X\cos b\cos l + \ddot Y\cos b\sin l + \ddot Z\sin b) +$$
$$+ \frac{k^2}{r^3}(X\cos b\cos l + Y\cos b\sin l + Z\sin b), \qquad (1')$$

$$-2\dot\rho\dot l\cos^2 b + 2\rho\dot b\dot l\sin b\cos b - \rho\ddot l\cos^2 b = (\ddot X\cos b\sin l - \ddot Y\cos b\cos l) +$$
$$+ \frac{k^2}{r^3}(X\cos b\sin l - Y\cos b\cos l), \qquad (2')$$

$$-2\dot\rho\dot l - \rho\ddot b - \rho\sin b\cos b\,\dot l^2 = (\ddot X\sin b\sin l + \ddot Y\sin b\sin l - \ddot Z\cos b) +$$
$$+ \frac{k^2}{r^3}(X\sin b\cos l + Y\sin b\sin l - Z\cos b). \qquad (3')$$

თუ b, l -ის წარმოებულებს ჩავთვლით ცნობილად, მაშინ ეს განტოლებანი შეიცავენ ოთხ უცნობს: ρ, $\dot\rho$, $\ddot\rho$ და r -ს.

მეოთხე განტოლებად შეიძლება ავიღოთ:

$$r^2 = \rho^2 + R^2 + 2R\rho\cos\psi, \qquad (18)$$

რაც მიიღება (17)-დან; იქედანვე ჩანს, რომ

$$R\cos\psi = -(X\cos b\cos l + Y\cos b\sin l + Z\sin b). \qquad (19)$$

(2′) განტოლება შევკვეცოთ $\cos b$-ზე. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\left.\begin{aligned} &X\sin b\cos l + Y\sin b\sin l - Z\cos b = \xi, \\ &X\sin l - Y\cos l = \eta. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} &\ddot X\sin b\cos l + \ddot Y\sin b\sin l - \ddot Z\cos b = (\xi)'', \\ &\ddot X\sin l - \ddot Y\cos l = (\eta)''. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

გავამრავლოთ (2) $\dot{b}$-ზე და (3′) — $\dot{l}\cos b$ -ზე; შეკრებით მივიღებთ:

$$\rho=\frac{(\eta)''\dot{b}-(\xi)''\cos b\,\dot{l}+\frac{k^2}{r^3}\left[\eta\dot{b}-\xi\cos b\dot{l}\right]}{[2\dot{b}\dot{l}\sin b\cos b-\ddot{l}\cos^2 b]\,\dot{b}+[\ddot{b}+\sin b\cos b\dot{l}^2]\cos b\dot{l}}. \qquad (22)$$

ეს არის ლაგრანჟის განტოლება გეოცენტრულ კოორდინატებში. ის გამოსახავს დამოკიდებულებას ρ და r -ს შორის და უნდა ამოიხსნას (18) -თან ერთად. წარმოებულები $\dot{b}$, $\dot{l}$ და სხვა უნდა გამოითვალოს რიცხობრივი მეთოდით b, l სიდიდეების რამდენიმე მნიშვნელობით. რიცხობრივი წარმოებულებით ორბიტის განსაზღვრა დაკავშირებულია ლაპლასის სახელთან. მაგრამ, ლაპლასის მეთოდი ემყარება არა კოორდინატების წარმოებულებს, არამედ მიმართულების კუთხის კოსინუსების წარმოებულებს. ამ შემთხვევაში ლაგრანჟის განტოლებას უფრო რთული ფორმა აქვს, ვიდრე (22) -ს.

შევნიშნავთ, რომ დედამიწა მოძრაობს მზის გარშემო დაახლოებით ორი სხეულის ამოცანის მიხედვით და ადგილი აქვს დაახლოებით ტოლობას.

$$\ddot{X}\approx-\frac{k^2X}{R^3},\qquad \ddot{Y}\approx-\frac{k^2y}{R^3},\qquad \ddot{Z}\approx-\frac{k^2z}{R^3}, \qquad (23)$$

რაც (22) აღნიშვნებისათვის გვაძლევს.

$$-(\eta)''\approx-\frac{k^2\eta}{R^3},\qquad (\xi)''\approx-\frac{k^2\xi}{R^3}. \qquad (24)$$

(1), (2), (3) სისტემის ინტეგრაცია მოგვცემდა ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრალებს გეოცენტრულ კოორდინატებში. ეს ინტეგრაცია უშუალოდ არ ხერხდება, მაგრამ შეიძლება ზემოთ მიღებულ ინტეგრალებში ჩავსვათ გეოცენტრული კოორდინატები (17) ფორმულების მიხედვით. მაგალითად, პირველ ინტეგრალს გეოცენტრულ კოორდინატებში აქვს ასეთი სახე:

$$\rho^2\cos^2 b\,\dot{l}+\rho\,[(\dot{X}\sin l-\dot{Y}\cos l)\cos b+\dot{b}\sin b\,(X\sin l-$$
$$-Y\cos l)-\dot{l}\cos b\,(X\cos l+Y\sin l)]-\dot{\rho}\cos b\,(X\sin l-Y\cos l)-$$
$$-(\dot{X}Y-\dot{Y}X)=c_1. \qquad (\mathrm{I}')$$

აქ მოვიყვანთ მხოლოდ IV ინტეგრალის გარდაქმნას გეოცენტრულ კოორდინატებში, რადგან დანარჩენის გარდაქმნა და ფორმა რთულია და გამოყენება არ ჩანს. (IV) ინტეგრალი შეიძლება ასე დავწეროთ:

$$\operatorname{tg}\beta=\varepsilon\cos c_4\sin\lambda+\varepsilon\sin c_4\cos\lambda.$$

კოორდინატთა გარდაქმნის (17) ფორმულებიდან გვაქვს:

$$\sin\lambda=\frac{\rho\cos b\sin l-Y}{r\cos\beta},\qquad \cos\lambda=\frac{\rho\cos b\cos l-X}{r\cos\beta},$$
$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\rho\sin b-Z}{r\cos\beta}. \qquad (25)$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულებანი ზემო ტოლობაში, მივიღებთ მეოთხე ინტეგრალს გეოცენტრულ სფერულ კოორდინატებში:

$$\rho=\frac{\varepsilon\cos c_4\,Y+\varepsilon\sin c_4\,X-Z}{\varepsilon\cos c_4\cos b\sin l+\varepsilon\sin c_4\cos b\cos l-\sin b}. \qquad (\mathrm{IV}')$$

ნაწილი II

ორბიტის განსაზღვრა

§ 8. საკითხის დასმა

ორბიტის განსაზღვრა ნიშნავს იმ ექვსი მუდმივის, ე. წ. ორბიტის ელემენტების, განსაზღვრას, რომლებიც შედის ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრალებში. პირველი გზა შეიძლება ასეთი იყოს. ზუსტად რომ განისაზღვრებოდეს დაკვირვებითი მონაცემებით $\dot{b}$, $\dot{l}$, $\ddot{b}$, $\ddot{l}$ და აგრეთვე ასტრონომიული ყოველწლიურის მონაცემებით $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$, მაშინ (22) და (18) განტოლების ერთობლივი ამოხსნით მოიპოვება ρ და r. შემდეგ ამ სიდიდეებით და ზემოთ აღნიშნული წარმოებულებით განისაზღვრება ყველა მუდმივი. წარმოებულების მეთოდს ემყარება ლაპლასის მეთოდი, რომელიც მათემატიკურად მარტივი ფორმისაა, მაგრამ პრაქტიკულად არ იძლევა საკმაო სიზუსტეს. ამის მიზეზია მიმართულების კუთხის კოსინუსების რიცხობრივი წარმოებულების (რაც ლაპლასის მეთოდში შედის) არასიზუსტე. ლაპლასის მეთოდი გადმოცემულია მულტონის წიგნში [7].

რომ შეგვეძლოს ზუსტად გამოვითვალოთ მხოლოდ პირველი წარმოებულები $\dot{b}$, $\dot{l}$ და აგრეთვე $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$, მაშინ ρ -ს გამომსახველ (22) ფორმულაში, რომელსაც აქვს სახე

$$\rho=\frac{M}{P}+\frac{N}{P}\frac{1}{r^3},$$

მრიცხველები M და N ზუსტი იქნებოდა. ლაგრანჟ-გაუსის ცნობილ მეთოდში $\frac{M}{P}$ ზუსტად გამოითვლება, $\frac{N}{P}$ -ში კი შედის უცნობი სიდიდეები. თუ გამოვითვლით $\frac{M}{P}$ -ს ლაგრანჟ-გაუსის მეთოდით, ვიპოვით მნიშვნელს, რადგან M და N ცნობილი იქნება. შემდგომ, მნიშვნელით და N-ით განისაზღვრება $\frac{1}{r^3}$ -ის კოეფიციენტი. (22) -ის და (18) -ის ამოხსნით ვიპოვით r და ρ -ს, რომელთა საშუალებით გამოითვლება მუდმივები. სასურველია ამ მეთოდის შემოწმება, მაგრამ აქ სხვა გზა გვინდა განვავითაროთ.

რიცხვობრივი მეთოდით უფრო ზუსტად გამოითვლება ჰელიოცენტრული კოორდინატების წარმოებულები, რადგან ისინი შედარებით თანაბრად იცვლება. პირველი მიახლოების საშუალებით გამოთვლილი ეს წარმოებულები შეიძლება საკმაოდ ზუსტი იყოს. სამკუთხედების ფართთა შეფარდება n_1 და n_2, რაც ლაგრანჟ-გაუსის მეთოდში მანძილების ფორმულაში შედის, შეიძლება გამოთვლილ იქნას რადიუს-ვექტორით და მისი წარმოებულით, ე. ი. r და $\dot{r}$ -ით.

მიზანშეწონილად მიგვაჩნია ლაგრანჟის განტოლება r -ის ნაცვლად განვიხილოთ n_1 -ის მიმართ. პარამეტრის p -ს განსაზღვრისათვის, რისთვისაც გაუსმა შექმნა სამკუთხედისა და სექტორის ფართთა შეფარდების თეორია, ვეცდებით გამოვიყენოთ φ -სა და λ -ს რიცხობრივი წარმოებულები. შემდგომ, მანძილებისა და რიცხობრივი წარმოებულების საშუალებით განისაზღვრება მუდმივები.

§ 9. n_1 -სა და n_2 -ის გამოსახულება

n_1 -სა და n_2 -სათვის თეორიულ ასტრონომიაში ცნობილია შემდეგი გამოსახულებანი:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau}\left\{ 1 + \frac{u}{6}(\tau^2 - \tau_1^2) - \frac{\ddot{u}}{12}\tau_2(\tau\tau_2 - \tau_1^2) + \frac{u^2}{360}(\tau^2 - \tau_1^2)(7\tau^2 - 3\tau_1^2) + \frac{\ddot{u}}{120}[3(\tau^4 - \tau_1^4) - 10\tau_1\tau_2\tau^2] + \ldots \right\},$$

$$n_2 = \frac{\tau_2}{\tau}\left\{ 1 + \frac{u}{6}(\tau^2 - \tau_2^2) + \frac{\dot{u}}{12}\tau_1(\tau\tau_1 - \tau_2^2) + \frac{u^2}{360}(\tau^2 - \tau_2^2)(7\tau^2 - 3\tau_2^2) + \frac{\ddot{u}}{120}[3(\tau^4 - \tau_2^4) - 10\tau_1\tau_2\tau^2] + \ldots \right\},$$

სადაც

$$\tau_1 = k(t_2 - t), \qquad \tau_2 = k(t - t_1),$$

$$u = r^{-3}, \qquad \dot{u} = \frac{du}{dt} \text{ და სხვა.}$$

ეს მწკრივები შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\left(\frac{\tau}{\tau_1} n_1 - 1\right)\frac{1}{\tau^2 - \tau_1^2} = \frac{u}{6} - \frac{\dot{u}}{6}\frac{\tau_2(\tau\tau_2 - \tau_1^2)}{\tau^2 - \tau_1^2} + \ldots$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau_2} n_2 - 1\right)\frac{1}{\tau^2 - \tau_2^2} = \frac{u}{6} + \frac{\dot{u}}{6}\frac{\tau_1(\tau\tau_1 - \tau_2^2)}{\tau^2 - \tau_2^2} + \ldots$$

გამოკლებისას გამოირიცხება ყველაზე დიდი წევრი და გაერთმნიშვნელოვანების შემდგომ გვექნება:

$$n_1(\tau_1 + 2\tau_2) - n_2(\tau_2 + 2\tau_1) + \tau_2 - \tau_1 = -\frac{\tau_1\tau_2(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_1\tau_2)\,\dot{u}}{12} + \ldots$$

როცა შევცვლით u, $\dot{u}$ და სხვ. r, $\dot{r}$ და სხვ., მივიღებთ

$$n_2 = \frac{\tau_1 + 2\tau_2}{\tau_2 + 2\tau_1} n_1 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2 + 2\tau_1} - \frac{\tau_1\tau_2(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_1\tau_2)\,\dot{r}}{4(\tau_2 + 2\tau_1)r^4} + \ldots$$

ეს შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$n_2 = hn_1 + m, \tag{26}$$

სადაც

$$h = \frac{\tau_1 + 2\tau_2}{\tau_2 + 2\tau_1} \tag{27}$$

$$m = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2 + 2\tau_1} - \frac{\tau_1\tau_2(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_1\tau_2)\,\dot{r}}{4(\tau_2 + 2\tau_1)r^4} - \frac{\tau_1\tau_2(\tau_2 - \tau_1)[2(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_1\tau_2)) + 3\tau_1\tau_2]}{120(\tau_2 + 2\tau_1)r^6} - \frac{\tau_1\tau_2(\tau_2 - \tau_1)[4(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_1\tau_2) + \tau_1\tau_2]}{40(\tau_2 + 2\tau_1)}\left[\frac{4\dot{r}^2}{r^5} - \frac{\ddot{r}}{r^4}\right]. \tag{28}$$

პირველი მიახლოებისათვის $f = 0$ და

$$m = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2 + 2\tau_1}, \tag{29}$$

სადაც f-ით აღნიშნულია (28) -ის წევრები, მეორედან დაწყებული.

§ 10. ფორმულები ρ_1, ρ, ρ_2-სათვის

თეორიულ ასტრონომიაში ცნობილია ფორმულები გეოცენტრული მანძილების განსაზღვრისათვის:

$$\begin{aligned} \rho_1 n_1 \lambda_1 - \rho\lambda + \rho_2 n_2 \lambda_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2, \\ \rho_1 n_1 \mu_1 - \rho\mu + \rho_2 n_2 \mu_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2, \\ \rho_1 n_1 \nu_1 \rho\nu + \rho_2 n_2 \nu_2 &= n_1 z_1 - z + n_2 z_2. \end{aligned} \tag{30}$$

აქედან განისაზღვრება ρ_1, ρ, ρ_2 როგორც n_1 და n_2 -ის ფუნქცია. λ_1, λ, λ_2 წარმოადგენს მიმართულების კუთხის კოსინუსებს:

$\lambda_1 = \cos\delta_1 \cos\alpha_1$, $\mu_1 = \cos\delta_1 \sin\alpha_1$, $\nu_1 = \sin\delta_1$ და ა. შ.

(ჩვენს აღნიშვნებში $\delta = b$ და $\alpha = l$).

(30) -დან მიიღება:

$$n_1\rho_1\Delta = \begin{vmatrix} n_1 X_1 - X + n_2 X_2, & -\lambda, & \lambda_2 \\ n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2, & -\mu, & \mu_2 \\ n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2, & -\nu, & \nu_2 \end{vmatrix} = D_1, \tag{31}$$

$$\rho\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1, & n_1 X_1 - X + n_2 X_2, & \lambda_2 \\ \mu_1, & n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2, & \mu_2 \\ \nu_1, & n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2, & \nu_2 \end{vmatrix} = D, \tag{32}$$

$$n_2\rho_2\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1, & -\lambda, & n_1 X_1 - X + n_2 X_2 \\ \mu_1, & -\mu, & n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2 \\ \nu_1, & -\nu, & n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2 \end{vmatrix} = D_2 \tag{33}$$

სადაც

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1, & -\lambda, & \lambda_2 \\ \mu_1, & -\mu, & \mu_2 \\ \nu_1, & -\nu, & \nu_2 \end{vmatrix} \tag{34}$$

ეს დეტერმინანტები შეიძლება გადაიწეროს ასე:

$$\begin{aligned} D_1 = {} & (n_1 X_1 - X + n_2 X_2)(\sin b_2 \cos b \sin l - \sin b \cos b_2 \sin l_2) + \\ & (n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2).(\sin b \cos b_2 \cos l - \sin b_2 \cos b \cos l) + \\ & + (n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2)\cos b \cos b_2 \sin(l_2 - l_1); \\ D = {} & (n_1 X_1 - X + n_2 X_2)\sin b_2 \cos b_1 \sin l_1 - \sin b_1 \cos b_2 \sin l_2) + \\ & + (n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2).(\sin b_1 \cos b_2 \cos l_2 - \sin b_2 \cos b_1 \cos l_1) + \\ & + (n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2)\cos b_1 \cos b_2 \sin(l_2 - l_1); \\ D_2 = {} & (n_1 X_1 - X + n_2 X_2)(\sin b \cos b_1 \sin l_1 - \sin b_1 \cos b \sin l) + \\ & + (n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2).(\sin b_1 \cos b \cos l - \sin b \cos b_1 \cos l_1) + \\ & + (n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2)\cos b_1 \cos b \sin(l - l_1); \\ \Delta = {} & \sin b_1 \cos b \cos b_2 \sin(l_2 - l_1) - \sin b \cos b_1 \cos b_2 \sin(l_2 - l_1) + \\ & + \sin b_2 \cos b \cos b_1 \sin(l - l_1). \end{aligned}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\Delta}(\sin b_2 \cos b \sin l - \sin b \cos b_2 \sin l_2),\\ b_1 &= \frac{1}{\Delta}(\sin b \cos_2 \cos l_2 - \sin q_2 \cos b \cos l),\\ c_1 &= \frac{1}{\Delta}\cos b \cos b_2 \sin(l_2 - l). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Delta}(\sin b_2 \cos b_1 \sin l_1 - \sin b_1 \cos b_2 \sin l_2),\\ b &= \frac{1}{\Delta}(\sin b_1 \cos b_2 \cos l_2 - \sin b_2 \cos b_1 \cos l_1),\\ c &= \frac{1}{\Delta}\cos b_1 \cos b_2 \sin(l_2 - l_1); \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\Delta}(\sin b \cos b_1 \cos l_1 - \sin b_1 \cos b \sin l),\\ b_2 &= \frac{1}{\Delta}(\sin b_1 \cos b \cos l - \sin b \cos b \cos l_1),\\ c_2 &= \frac{1}{\Delta}\cos b_1 \cos b \sin(l - l_1). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

კონტროლისათვის აქედან მიიღება:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos b_1 \cos l_1 - a \cos b \cos l + a_2 \cos b_2 \cos l_2 &= 1,\\ b_1 \cos b_1 \cos l_1 - b \cos b \cos l + b_2 \cos b_2 \cos l_1 &= 0,\\ c_1 \cos b_1 \cos l_1 - c \cos b \cos l + c_2 \cos b_2 \cos l_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos b_1 \sin l_1 - a \cos b \sin l + a_2 \cos b_2 \sin l_2 &= 0,\\ b_1 \cos b_1 \sin l_1 - b \cos b \sin l + b_2 \cos b_2 \sin l_2 &= 1,\\ c_1 \cos b_1 \sin l_1 - c \cos b \sin l + c_2 \cos b_2 \sin l_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 \sin b_1 - a \sin b + a_2 \sin b_2 &= 0,\\ b_1 \sin b_1 - b \sin b + b_2 \sin b_2 &= 0,\\ c_1 \sin b_1 - c \sin b + c_2 \sin b_2 &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{38''}$$

ამ აღნიშვნებით (31), (32) და (33) მიიღებს სახეს:

$$\left.\begin{aligned} n_1 \rho_1 &= (n_1 X_1 - X + n_2 X_2) a_1 + (n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2) b_1 + \\ &\quad + (n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2) c_1,\\ \rho &= (n_1 X_1 - X + n_2 X_2) a + (n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2) b + (n_1 Z_1 - \\ &\quad - Z + n_2 Z_2) c,\\ n_2 \rho_2 &= (n_1 X_1 - X + n_2 X_2) a_2 + (n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2) b_2 + \\ &\quad (n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2) c_2. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

აქ $n_1 = n_1^0 + d_1 r^{-3}$, $n = n_2^0 + d_2 r^{-3}$, სადაც d_1 და d_2 გამოითვლება მიახლოებით. როცა ჩავსვამთ ამ სიდიდეებს (39) სისტემის მეორე ტოლობაში მივიღებთ ლაგრანჟის განტოლებას, რომელიც მოხსენებული იყო ზემოთ.

ჩავსვათ (39) -ში n_2 -ის მნიშვნელობა, n_1 -ით გამოსახული, ე. ი. $n_2 = hn_1 = m$; მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} n_1 \rho_1 &= n_1 [(X_1 + h X_2) a_1 + (Y_1 + hY_2) b_1 + (Z_1 + hZ_2) c_1] + \\ &\quad + (-X + mX_2) a_1 + (-Y + mY_2) b_1 + (-Z + mZ_2) c_1,\\ \rho &= n_1 [(X_1 + hX_2) a + (Y_1 + hY_2) b + (Z + hZ_2) c] + \\ &\quad + (-X + m X_2) a + (-y + mY_2) b + (-Z + mZ_2) c,\\ [hn_1 + m] \rho_2 &= n_1 [(X_1 + hX_2) a_2 + (Y_1 + hY_2) b_2 + \\ &\quad + (Z_1 + hZ_2) c_1] + (-X + mX_2) a_2 + (-Y + mY_2) b_2 + \\ &\quad (-Z + mZ_2) c_2. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

აღვნიშნოთ:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= (-X + mX_2) a_1 + (-Y + mY_2) b_1 + (-Z + mZ_2) c_1,\\ P &= (-X + mX_2) a + (-Y + mY_2) b + (-Z + mZ_2) c,\\ P_2 &= (-X + mX_2) a_2 + (-Y + mY_2) b_2 + (-Z + mZ_2) c_2,\\ Q_1 &= (X_1 + hX_2) a_1 + (Y_1 + hY_2) b_1 + (Z_1 + hZ_2) c_2,\\ Q &= (X_1 + hX_2) a + (Y_1 + hY_2) b + (Z_1 + hZ_2) c,\\ Q_2 &= (X_1 + hX_2) a_2 + (Y_1 + hY_2) b_2 + (Z_1 + hZ_2) c_2 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$f(X) = n_1 X_1 - X + n_2 X_2,\ f(Y) = n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2,\ f(Z) = n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2 \tag{41^1}$$

მაშინ მივიღებთ:

$$n_1 \rho_1 = P_1 + Q_1 n_1,\quad \rho = P + Qn_1,\quad (hn_1 + m)\rho_2 = P_2 + Q_2 n_1. \tag{42}$$

$$\begin{aligned} n_1 \rho_1, &= f(X) a_1 + f(Y) b_1 + f(Z) c_1,\ \rho = f(X) a + f(Y) b + f(Z) c\\ \rho_2 &= f l(X) a_2 + f(Y) b_2 + f(Z) c_2 \end{aligned} \tag{42^1}$$

კონტროლი პირველი მიახლოებისათვის, როცა $f = 0$ $(h - m = 1)$, იქნება:

$$\left.\begin{aligned} &(Q_1 - P_1) \cos b_1 \cos l_1 - (Q - P) \cos b \cos l + \\ &\quad (Q_2 - P_2) \cos b_2 \cos l_2 = X_1 + X + X_2,\\ &(Q_1 - P_1) \cos b_1 \sin l_1 - (Q - P) \cos b \sin l + \\ &\quad + (Q_2 - P_2) \cos b_2 \sin l_2 = Y_1 + Y + Y_2,\\ &(Q_1 - P_1) \sin b_1 - (Q - P) \sin b + (Q_2 - P_2) \sin b_2 = \\ &\quad = Z_1 + Z + Z_2. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

§ 11. n_1 -ის განსაზღვრა

n_1 -სათვის § 9-ში გვქონდა:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau}\left\{ 1 + \frac{u}{6}\left(\tau^2 - \tau_1^2\right) - \frac{\dot{u}}{12}\tau_2(\tau\tau_2 - \tau_1^2) + \cdots \right\},$$

სადაც $u = \frac{1}{r^3}$ და $\frac{\tau_1}{\tau} = n_1^0$ წევრები დაწყებული $\dot{u}$ -დან აღვნიშნოთ f_1-ით, ხოლო $(n_1 - n_1^0)$ კი Δn_1 -ით. მაშინ ზევითა ტოლობა გადაიწერება ასე:

$$\Delta n_1 = \frac{n_1^0(\tau_2 + 2\tau_1)\tau_2}{6r^3} + f_1, \tag{44}$$

სადაც f_1 მცირე სიდიდეა და პირველი მიახლოებისათვის ჩაითვლება ნულის ტოლად.

$$f_1 = \frac{n_1^0(\tau_2+2\tau_1)\tau_2}{6r^3}\left\{\frac{3}{2}\,\frac{\tau_1\tau_2+\tau_2^2-\tau_1^2}{\tau+\tau_1}\,\frac{\dot r}{r}+\frac{7\tau^2-3\tau_1^2}{60r^3}+\right.$$
$$\left.\frac{3[2\tau_1(\tau^2-3\tau_1\tau_2)+3\tau_2^3]}{20(\tau+\tau_1)}\left[4\,\frac{\dot r^2}{r^2}-\frac{\ddot r}{r}\right]\right\}.$$

(42) -დან $\rho = P + Qn_1$, (18) -დან $r^2 = \rho^2 + R^2 + 2\rho R\cos\psi$. აღვნიშნოთ:

$$\rho_0 = P + Qn_1^0, \qquad r_0^2 = \rho_0^2 + 2R\cos\psi\,\rho_0 + R^2.$$

მაშინ:

$$r^2 = (\rho_0 + Q\Delta n_1)^2 + 2R\cos\psi(\rho_0 + Q\Delta n_1) + R^2.$$

ანუ

$$r_2 = r_0^2 + Q\Delta n_1(2\rho_0 + 2R\cos\psi) + Q^2\Delta n_1^2. \tag{45}$$

$$\Delta n_1 = \frac{n_1^0\tau_2(\tau_2+2\tau_1)}{6[r_0^2+\Delta n_1 Q(2\rho_0+2R\cos\psi+Q\Delta n_1)]^{3/2}}. \tag{46}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$A = \frac{n_1^0\tau_2(\tau_2+2\tau_1)}{6r_0^3}. \tag{47}$$

და

$$B = \frac{Q\Delta n_1(2\rho_0+2R\cos\psi+Q\Delta n_1)}{r_0^3}, \tag{48}$$

მაშინ (46) გადაიწერება ასე:

$$\Delta n_1 = \frac{A}{[1+B]^{3/2}}. \tag{49}$$

(49) -ის ამოხსნა მოგვცემს Δn_1 -ს, რის შემდეგაც $n_1 = n_1^0 + \Delta n_1$. უნდა გვახსოვდეს, რომ B არ არის მუდმივი და ის თვით შეიცავს უცნობ Δn_1-ს. Δn_1 -ის სიმცირის გამო B მცირეა, რის გამოც Δn_1 მცირედ განსხვავდება A -საგან; ე. ი. $\Delta n_1 \approx \Delta n_1^0 \approx A$. პირველად B -ს გამოვითვლით დაშვებით, რომ $\Delta n_1 = \Delta n_1^0$. ჩავსვამთ ამას (49) -ში, მივიღებთ Δn_1 -ის მნიშვნელობას. შემდეგ Δn_1-ის ახალი მნიშვნელობით გამოვითვლით B -ს და (49) -დან ისევ ვიპოვით Δn_1 -ს, და ა. შ., სანამ ერთიმეორეს არ დაემთხვევა Δn_1 -ის ძველი და ახალი მნიშვნელობა.

Δn_1 -სათვის A და B -თი შეიძლება შევადგინოთ ცხრილი. ეს იქნება დაახლოებითი მნიშვნელობა, რადგან B თვით შეიცავს Δn_1 -ს და გამოითვლება ამ სიდიდის წინა მნიშვნელობით.

გვეცოდინება რა $n_1 = n_1^0 + \Delta n_1$, (42) ფორმულებიდან გამოითვლება ρ_1, ρ, ρ_2. ამის შემდეგ გამოითვლება აბერაციული შესწორება და ისევ გამოითვლება n_1^0, n_2^0 n_1 n_2 და მანძილები ρ_1, ρ, ρ_2.

(18) ფორმულების საშუალებით გამოითვლება გეოცენტრული მანძილები. f_1 და f შესწორებათა გამოთვლა, სადაც შედის r -ის წარმოებულები, მოითხოვს ბევრ დროს და არ არის საიმედო. ამიტომ n_1 -ის შემდეგი მიახლოებისათვის გამოვიყენებთ გიბსის ფორმულას:

$$n_1 = \frac{\tau_2}{\tau}\,\frac{1+B_1 r_1^{-3}}{1-Br^{-3}}, \qquad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau}\,\frac{1+B_2 r_2^{-3}}{1-Br^{-3}} \tag{50}$$

რის შემდეგაც ისევ გამოითვლება ρ_1, ρ, ρ_2 და r_1, r, r_2.

ჯერჯერობით დავკმაყოფილდებით იმ სიზუსტით, რომელსაც იძლევა გიბსის ფორმულა.

§ 12. რიცხობრივი წარმოებულების გამოთვლა

დაკვირვებით მიღებული კოორდინატების რიცხობრივი წარმოებულები ($\dot b$, $\dot l$ და სხვ.) არ გამოდის საკმაოდ ზუსტი ამ კოორდინატების არათანაბარი ცვლილების გამო. მაგრამ ვფიქრობთ, რომ რიცხობრივი წარმოებულები შეიძლება გამოყენებულ იქნას ჰელიოცენტრული კოორდინატებისათვის, რომლებიც უფრო თანაბრად იცვლებიან.

როცა რაიმე u სიდიდე არ არის მოცემული როგორც დროის გარკვეული ფუნქცია, არამედ ცნობილია მხოლოდ მისი რამდენიმე კერძო მნიშვნელობა, მაშინ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების გამოთვლისათვის ასე იქცევიან. აიღებენ ამ სიდიდის სამ კერძო მნიშვნელობას და გაატარებენ მასზე მეორე რიგის პარაბოლს. თუ $\bar\tau$ -თი აღვნიშნავთ მიმდინარე დროს, ამ პარაბოლს ექნება სახე:

$$a\bar\tau^2 + b\bar\tau + c = u. \tag{51}$$

დაკვირვების პირველი მომენტისათვის მივიღოთ ნიშნაკი "1", მესამე მომენტისათვის — ნიშნაკი "2", ხოლო შუა მომენტი დავწეროთ უნიშნაკოდ ან ნიშნაკით "0". მაშინ a, b, c კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის გვექნება სამი განტოლება:

$$a\bar\tau_1^2 + b\bar\tau_1 + c = u_1 \quad a\bar\tau^2 + b\bar\tau + c = u, \quad a\bar\tau_2^2 + b\bar\tau_2 + c = u_2. \tag{52}$$

დროის დასაწყისად მივიღოთ შუა დაკვირვების მომენტი t_0,* მაშინ შესაფერისი $\bar\tau_k$ გამოითვლება ფორმულით $\bar\tau_k = t_k - t_0$, რაც გვაძლევს:

$$\bar\tau_1 = t_1 - t_0, \qquad \bar\tau_0 = 0 \qquad \bar\tau_2 = t_2 - t_0. \tag{53}$$

(52) -ის მეორე ტოლობა გვაძლევს $c = u$; ჩავსვათ ეს პირველ და მესამე ტოლობაში, მივიღებთ:

$$a\bar\tau_1^2 + b\bar\tau_1 = -u + u_1, \qquad a\bar\tau_2^2 + b\bar\tau_2 = u_2 - u.$$

აქედან განისაზღვრება a და b:

$$a = \frac{(u_2-u)\bar\tau_1 + (u-u_1)\bar\tau_2}{\bar\tau_1\bar\tau_2(\bar\tau_2-\bar\tau_1)},$$

$$b = \frac{(u-u_1)\bar\tau_2^2 - (u_2-u)\bar\tau_1^2}{\bar\tau_1\bar\tau_2(\bar\tau_2-\bar\tau_1)}.$$

a და b -ს განსაზღვრის შემდეგ წარმოებულები $\dot u$ და $\ddot u$ რაიმე მომენტში გამოითვლება ფორმულებით:

$$\dot u = 2a\bar\tau + b, \qquad \ddot u = 2a. \tag{54}$$

როგორც ცნობილია, თეორიულ ასტრონომიაში მიღებულია წესი, რომ თუ გამოსახულებაში შედის დაკვირვების ორი მომენტი სამიდან, მას აღნი-

* მულტონის მიხედვით [7] დროის დასაწყისად სჯობს მივიღოთ დაკვირვებათა სამივე მომენტის ერთი მესამედი; მაგრამ, განსხვავება მცირეა, ფორმულა კი რთულდება.

შნავენ იმ ნიშნაკით, რომელიც არ შედის მასში. ამიტომ შეიძლება აღვნიშნოთ:

$$t_2 - t_0 = \tau_1, \qquad t_0 - t_1 = \tau_2, \qquad t_2 - t_1 = \tau;$$

ე. ი,

$$\bar{\tau}_1 = -\tau_2, \qquad \bar{\tau}_2 = \tau_1, \qquad \bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1 = \tau.$$

ამის მიხედვით a და b -სათვის გვექნება:

$$a = -\frac{(u-u_1)\tau_1 + (u_2-u)\tau_2}{\tau_1\tau_2\tau}, \qquad b = \frac{(u-u_1)\tau_1^2 + (u_2-u)\tau_2^2}{\tau_1\tau_2\tau} \tag{55}$$

მეორე წარმოებულები საერთოა ყველა მომენტისათვის:

$$\ddot{u} = 2a, \tag{56}$$

ხოლო პირველი წარმოებულები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\dot{u}_1 = -2a\tau_2 + b, \qquad \dot{u} = b, \qquad \dot{u}_2 = 2a\tau_1 + b. \tag{57}$$

ხშირად დროს გამოსახავენ k ერთეულებში, სადაც k მიზიდულობის მუდმივია. ამ შემთხვევაში $\theta = k(t - t_0)$,

$$\theta_1 = k\tau_1, \ \theta_2 = k\tau_2. \ \theta = k\tau.$$

a და b კოეფიციენტების და წარმოებულების გამოსახულება, ცხადია, ისეთივე დარჩება, მხოლოდ τ-ს მაგიერ ჩაისმება შესაბამისი θ.

§ 13. $\frac{c_2}{c_1}$ და c_4 -ის განსაზღვრა. λ და ψ -ს გამოთვლა

მანძილების გამოთვლის შემდეგ, რასაც ვაწარმოებთ § 11-ის მიხედვით, შეიძლება შევუდგეთ ორბიტის ელემენტების განსაზღვრას. პირველად განვიხილოთ შეფარდების $\frac{c_2}{c_1}$ და c_4-ის განსაზღვრა.

(IV′) ინტეგრალი შეიძლება ასე დავწეროთ:

$$\varepsilon \sin c_4 (\rho \cos b \cos l - X) + \varepsilon \cos c_4 (\rho \cos b \sin l - Y) = \rho \sin b - Z. \tag{IV''}$$

ფრჩხილებში ჩასმული გამოსახულებანი და მარჯვენა მხარე წარმოადგენენ ჰელიოცენტრულ კოორდინატებს $x\,y\,z$;

$$x = \rho \cos b \cos l - X, \quad Y = \rho \cos b \sin l - Y, \ Z = \rho \sin b - Z. \tag{57}$$

ამიტომ (IV′′) მიიღებს სახეს:

$$\varepsilon \sin c_4 x + \varepsilon \cos c_4 y = z.$$

დავწეროთ ეს ტოლობა დაკვირვების პირველი და მესამე მომენტისათვის:

$$\varepsilon \sin c_4 x_1 + \varepsilon \cos c_4 y_1 = z_1, \qquad \varepsilon \sin c_4 x_2 + \varepsilon \cos c_4 y_2 = z_2 \tag{58}$$

აქედან:

$$\varepsilon \sin c_4 = \frac{z_2 y_1 - z_1 y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}, \qquad \varepsilon \cos c_4 = \frac{z_1 x_2 - x_1 z_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2} \tag{59}$$

ამ ფორმულების ერთმანეთზე გაყოფით მიიღება $tg\, c_4$ და გაიგება c_4-თუ ავამაღლებთ კვადრატში (59) -ის ორივე ფორმულას და შევკრებთ, მი-

ვიღებთ ε^2 -ს. მაგრამ $\varepsilon^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} - 1$ და აქედან გაიგება შეფარდება $\frac{c_2}{c_1}$.

სწორკუთხოვანი და სფერული ჰელიოცენტრული კოორდინატები დაკავშირებულია ერთმანეთთან ტოლობებით:

$$x = r\cos\beta\cos\lambda, \quad y = r\cos\beta\cos\lambda, \quad z = r\sin\beta.$$

პირველი ორის ერთმანეთზე გაყოფით მივიღებთ:

$$tg\,\lambda = \frac{y}{x}.$$

ამ ფორმულით შეიძლება გამოვითვალოთ $tg\,\lambda$ დაკვირვების სამივე მომენტისათვის; შემდგომ კი გამოითვლება λ.

$tg\,\lambda$ -ს გამოთვლის შემდეგ გამოითვლება $tg\,\varphi$:

$$tg\,\varphi = \frac{c_2}{c_1} tg(\lambda + c_4). \tag{8}$$

§ 14. c_2 -ის ანუ p-ს განსაზღვრა

ორბიტის ელემენტების განსაზღვრებისათვის ძირითადი მნიშვნელობა აქვს პარამეტრის განსაზღვრას. გაუსმა ამ მიზნით შექმნა სამკუთხედისა და სექტორის ფართთა შეფარდების თეორია. ამ თეორიის საფუძველზე შედგენილია სპეციალური ცხრილები, რომლებიც დიდი სიზუსტით იძლევა პარამეტრის მნიშვნელობას. მაგრამ თვით თეორია საკმაოდ რთულია. პარამეტრის განსაზღვრისათვის ჩვენ გვინდა გამოვიყენოთ ჰელიოცენტრული კოორდინატების რიცხობრივი წარმოებულები.

c_2 -სა და p -ს შორის დამოკიდებულება ასეთია;

$c_2^2 = k^2(1+m)p$, მაგრამ $m \approx 0$ და შეიძლება დავწეროთ $c_2^2 = k^2 p$. თუ დრო და წარმოებულები გამოსახულია k ერთეულებში ე. ი. θ სიდიდეებში (იხ. § 11), მაშინ $c_2^2 = p$.

c_2 -სათვის კი გვაქვს ფორმულები:

$$r_2\dot{\varphi} = c_2 \tag{9}$$

$$r^2\cos^2\beta\,\dot{\lambda} = c_1 \tag{I}$$

$$r^2\dot{\beta}_2 + \frac{c_1^2}{\cos^2\beta} = c_2^2 \tag{II}$$

დაკვირვების სამივე მომენტისათვის გამოითვლება $tg\,\lambda$ და $tg\,\beta$:

$$tg\,\lambda = \frac{y}{x}, \qquad tg\,\beta = -\frac{z}{x^2+y^2}, \tag{60}$$

საიდანაც გაიგება λ და β. შემდგომ § 11 - ის მიხედვით გამოითვლება რიცხობრივი წარმოებულები $\dot{\lambda}$ და $\dot{\beta}$ სამივე მომენტისათვის. ამ წარმოებულების საშუალებით 1 და 11 ინტეგრალებით განისაზღვრება c_1 და c_2. გამოთვლა შეიძლება ვაწარმოოთ სამივე მომენტისათვის, მაგრამ უფრო საიმედოა შუა მომენტი. თუ კიდურა მომენტს მივცემთ ერთ „წონას", მაშინ შუა მომენტს შეიძლება მივცეთ „წონა" ორი. ამიტომ საშუალო c_1 და c_2-სათვის გვექნება:

$$c_1 = \frac{c_{11} + 4c_{10} + c_{12}}{6}, \qquad c_2 = -\frac{c_{21} + 4c_{20} + c_{22}}{6}, \tag{61}$$

სადაც c_{11} აღნიშნავს c_1 -ის მნიშვნელობას პირველი მომენტისათვის; c_{10} -შუა მომენტისათვის და c_{12} -მესამე მომენტისათვის; ანალოგიურად c_{21}, c_{20}, c_{22} -ის მიმართ.

შეფარდება $\frac{c_2}{c_1}$ ტოლი უნდა იყოს § 12-ის მიხედვით მიღებული მნიშვნელობისა.

c_2 გამოითვლება აგრეთვე (9) ფორმულით, განვსაზღვრავთ რა წინასწარ φ -ს სამივე მომენტისათვის (8) ფორმულის საშუალებით და გამოვითვლით φ-ს წარმოებულებს § 11-ის თანახმად.

რიცხობრივი წარმოებულებით c_2 -ის განსაზღვრა ხშირად დამაკმაყოფილებელი სიზუსტით წარმოებს, მაგრამ თუ რადიუს-ვექტორი r არათანაბრად იცვლება, მაგალითად პერიჰელიუმი მოქცეული თუ არის პირველ და მესამე დაკვირვებას შორის, მაშინ ეს ხერხი არ იძლევა სათანადო სიზუსტეს.

რიცხობრივ წარმოებულებზე უფრო ნაკლებ სიზუსტეს იძლევა ინტეგრალური აღრიცხვის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა, რომელიც შეიძლება გამოყენებულ იქნას (9) ფორმულაზე ან (I) ინტეგრალზე. ორბიტის მიახლოებითი გამოთვლისას შეიძლება იგი საკმარისი იყოს. (9) ფორმულაში

$$r^2 \dot{\varphi}\ c_2. \tag{9}$$

მოვახდინოთ ინტეგრაცია θ_1 -დან θ_0 -მდე:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_0} r^2\, d\varphi = \int_{\theta_1}^{\theta_0} c_2\, d\theta, \qquad \text{ანუ} \quad \bar{r}_{10}^{\,2} (\varphi_0 - \varphi_1) = c_2 (\theta_0 - \theta_1),$$

სადაც $\bar{r}_{10}$ არის რადიუს—ვექტორის რაღაც საშუალო მნიშვნელობა t t_0 შუალედში. ამ საშუალო მნიშვნელობისათვის შეიძლება დაახლოებით მივიღოთ r_1 და r_0 რადიუს—ვექტორების საშუალო გეომეტრიული ე. ი.

$$\bar{r}_{10} = \sqrt{r_1 r_0}.$$

მაშინ ზევითა ტოლობიდან გვექნება:

$$c_2 = \frac{r_1 r_0 (\varphi_0 - \varphi_1)}{\theta_0 - \theta_1}. \tag{62}$$

ანალოგიურად განისაზღვრება c_2 შუალედისათვის t_0, t_2 და შემდეგ აიღება ორივე მნიშვნელობის საშუალო არითმეტიკული.

§ 15. c_2 -ის ანუ p-ს განსაზღვრა (გაგრძელება)

პარამეტრი p და კიდევ ორბიტის ორი ელემენტი e და ω განისაზღვრება რადიუს—ვექტორის ფორმულიდან:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \omega)}.$$

თუ დავწერთ ამ ფორმულას სამი მომენტისათვის, მივიღებთ სამ განტოლებას სამი უცნობით. ამ სისტემის ამოხსნით მიიღება p, e და ω; მაგრამ, როგორც ცნობილია, ამ ხერხით ეს ელემენტები განისაზღვრება მცირე სიდიდეთა შეფარდების სახით, რაც ძლიერ ცუდ სიზუსტეს იძლევა. არ ხერხდება აგრეთვე, რომ პირველი მიახლოების შემდეგ უფრო დაზუსტდეს p -ს მნიშვნელობა იტერაციის მეთოდით. წინა პარაგრაფში მოცემულს გარდა ჩვენ ვცადეთ სხვადასხვა ხერხი c_2 -ის ანუ p -ს განსაზღვრისათვის. აქ გადმოვცემთ ერთ-ერთ მათგანს, რომელიც უფრო საიმედო უნდა იყოს, თუმცა ჯერ მისი პრაქტიკულად შემოწმება არ მოგვიხდენია.

ვთქვათ, განედის არგუმენტი φ გამოისახება მეოთხე რიგის პარაბოლით:

$$\varphi = a\bar{\tau}^4 + b\bar{\tau}^3 + c\bar{\tau}^2 + d\bar{\tau} + e. \tag{63}$$

დავწეროთ იგი სამივე მომენტისათვის:

$$\left.\begin{aligned} &a\bar{\tau}_1^4 + b\bar{\tau}_1^3 + c\bar{\tau}_1^2 + d\bar{\tau}_1 + e = \varphi_1, \\ &\bar{\tau}_0 = 0, \qquad\qquad e = \varphi_0, \\ &a\bar{\tau}_2^4 + b\bar{\tau}_2^3 + c\bar{\tau}_2^2 + d\bar{\tau}_2 + e = \varphi_2. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

მეორე მხრივ, გამოვიყენოთ ფართითი სიჩქარის ფორმულა

$$r^2 \dot{\varphi} = c_2. \tag{9}$$

(63) -ის თანახმად გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} &r_1^2(4a\bar{\tau}_1^3 + 3b\bar{\tau}_1^2 + 2c\bar{\tau}_1 + d) = c_2 \\ &\qquad\qquad r^2 d = c_2, \\ &r_2^2(4a\bar{\tau}_2^3 + 3b\bar{\tau}_2^2 + 2c\bar{\tau}_2 + d) = c_2; \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

$e = \varphi_0$ -სა და $d = \frac{c_2}{r^2}$ -ის ჩასმით მივიღებთ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{c_2}{r^2} + c\bar{\tau}_1 + b\bar{\tau}_1^2 + a\bar{\tau}_1^3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\bar{\tau}_1}, \\ &\frac{c_2}{r_2} + c\bar{\tau}_2 + b\bar{\tau}_2^2 + a\bar{\tau}_2^3 + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{\bar{\tau}_2}, \\ &c_2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) + 2c\bar{\tau}_1 + 3b\bar{\tau}_1^2 + 4a\bar{\tau}_1^3 = 0, \\ &c_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2^2}\right) + 2c\bar{\tau} + 3b\bar{\tau}_2^2 + 4\bar{\tau}_2^3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

აქ შედის ოთხი უცნობი c_2, c, b და a მაგრამ ჩვენ გვჭირდება მხოლოდ c_2-ის განსაზღვრა.

აღვნიშნოთ (66) სისტემის დეტერმინანტი Δ-თი, ხოლო c_2 -ის შესაბამი დეტერმინანტი D-თი, მაშინ

$$c_2 = \frac{D}{\Delta}, \tag{67}$$

სადაც

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{r^2}, & \bar\tau_1, & \bar\tau_1^2, & \bar\tau_1^3 \\ \frac{1}{r_2}, & \bar\tau_2, & \bar\tau_2^2, & \bar\tau_2^3 \\ \frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_1^2}, & 2\bar\tau_1, & 3\bar\tau_1^2, & 4\bar\tau_1^3 \\ \frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_2^2}, & 2\bar\tau_2, & 3\bar\tau_2^2, & 4\bar\tau_2^3 \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\varphi_1-\varphi_0}{\bar\tau_1}, & \bar\tau_1, & \bar\tau_1^2, & \bar\tau_1^3 \\ \frac{\varphi_2-\varphi_0}{\bar\tau_2}, & \bar\tau_2, & \bar\tau_2^2, & \bar\tau_2^3 \\ 0, & 2\bar\tau_1, & 3\bar\tau_1^2, & 4\bar\tau_1^3 \\ 0, & 2\bar\tau_2 & 3\bar\tau_2^2, & 4\bar\tau_2^3 \end{vmatrix}$$

ვამოვთვალოთ ჯერ Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{r^2}, & \bar\tau_1, & \bar\tau_1^2, & \bar\tau_1^3 \\ 0, & \bar\tau_2-\bar\tau_1, & \bar\tau_2^2-\bar\tau_1^2, & \bar\tau_2^3-\bar\tau_1^3 \\ -\frac{1}{r_1^2}, & \bar\tau_1, & 2\bar\tau_1^2, & 3\bar\tau_1^3 \\ -\frac{1}{r_2^2}, & \bar\tau_2, & 2\bar\tau_2^2, & 3\bar\tau_2^3 \end{vmatrix}=$$

$$=\left|\frac{1}{r^2}\,\bar\tau_1\,\bar\tau_2\,(\bar\tau_2-\bar\tau_1)\right|\begin{vmatrix} 1, & \bar\tau_2+\bar\tau_1, & \bar\tau_2^2+\bar\tau_1\bar\tau_2+\bar\tau_1^2 \\ 1, & 2\bar\tau_1, & 3\bar\tau_1^2 \\ 1, & 2\bar\tau_2, & 3\bar\tau_2^2 \end{vmatrix}-$$

$$-\left|\frac{1}{r_1^2}\,\bar\tau_1\,(\bar\tau_2-\bar\tau_1)\bar\tau_2\right|\begin{vmatrix} 1, & \bar\tau_1, & \bar\tau_1^2 \\ 1, & \bar\tau_2+\bar\tau_1, & \bar\tau_2^2+\bar\tau_1\,\bar\tau_2+\bar\tau_1^2 \\ 1, & 2\bar\tau_2, & 3\,\bar\tau_2^2 \end{vmatrix}+$$

$$+\left|\frac{1}{r_2^2}\,\bar\tau_1^2\,(\bar\tau_2-\bar\tau_1)\right|\begin{vmatrix} 1, & \bar\tau_1 & \bar\tau_1^2 \\ 1, & \bar\tau_2+\bar\tau_1, & \bar\tau_2^2+\bar\tau_1\bar\tau_2+\bar\tau_1^2 \\ 1, & 2\bar\tau_1, & 3\,\bar\tau_1^2 \end{vmatrix}$$

სტრიქონების გამოკლებით მიიღება სამი მეორე რიგის დეტერმინანტი. საბოლოოდ გვექნება

$$\Delta=-\bar\tau_1\bar\tau_2(\bar\tau_2-\bar\tau_1)^2\left[\frac{1}{r^2}(\bar\tau_2-\bar\tau_1)^2+\frac{1}{r_1^2}\bar\tau_2^2+\frac{1}{r_2^2}\bar\tau^2\right]. \tag{68}$$

D დეტერმინანტი პირველი სვეტის მიხედვით დაიშლება ორად:

$$D=\frac{\varphi_1-\varphi_0}{\bar\tau_1}\begin{vmatrix} \bar\tau_2, & \bar\tau_2^2, & \bar\tau_2^3 \\ 2\bar\tau_1, & 3\bar\tau_1^2, & 4\bar\tau_1^3 \\ 2\bar\tau_2, & 3\bar\tau_2^2, & 4\bar\tau_2^3 \end{vmatrix}-\frac{\varphi_2-\varphi_0}{\bar\tau_2}\begin{vmatrix} \bar\tau_1, & \bar\tau_1^2, & \bar\tau_1^2 \\ 2\bar\tau_1, & 3\bar\tau_1^2, & 4\bar\tau_1^3 \\ 2\bar\tau_2, & 3\bar\tau_2^2, & 4\bar\tau_2^2 \end{vmatrix}$$

საერთო მამრავლის გამოტანისა და სტრიქონების გამოკლების შემდეგ გვექნება:

$$D=(\varphi_1-\varphi_0)\bar\tau_2^2\begin{vmatrix} 1, & \bar\tau_2, & \bar\tau_2^2 \\ 0, & 3(\bar\tau_1-\bar\tau_2), & 4(\bar\tau_1^2-\bar\tau_2^2) \\ 0, & \bar\tau_2, & 2\bar\tau_2^2 \end{vmatrix}-$$

$$-(\varphi_2-\varphi_0)\bar\tau_1^2\begin{vmatrix} 1, & \bar\tau_1, & 2\bar\tau_1^2 \\ 0, & \bar\tau_1, & 2\bar\tau_1^2 \\ 0, & 3(\bar\tau_2-\bar\tau_1) & 4(\bar\tau_2^2-\bar\tau_1^2) \end{vmatrix}.$$

საბოლოოდ მიიღება:

$$D=2(\bar\tau_2-\bar\tau_1)[(\varphi_1-\varphi_0)(2\bar\tau_1-\bar\tau_2)\bar\tau_2^3-(\varphi_2-\varphi_0)(2\bar\tau_2-\bar\tau_1)\bar\tau_1^3]. \tag{69}$$

თეორიულ ასტრონომიაში მიღებული წესით (იხ. § 11) იქნება:

$\bar\tau_1=-\bar\tau_2,\qquad \bar\tau_2=\tau,\qquad \bar\tau_2-\bar\tau_1=\tau$ და Δ და D მიიღებს სახეს:

$$\Delta=\tau_1\tau_2\tau^2\left[\frac{1}{r^2}\tau_2+\frac{1}{r_1^2}\tau_1^2+\frac{1}{r_2^2}\tau_2^2\right], \tag{68'}$$

$$D=2\tau[(\varphi_0-\varphi_1)(2\tau_2+\tau_1)\tau_1^3+(\varphi_2-\varphi_1)(2\tau_1+\tau_2)\tau_2^3] \tag{69'}$$

ასე რომ

$$c_2=\frac{2[(\varphi_0-\varphi_1)(2\tau_2+\tau_1)\tau_1^3+(\varphi_2-\varphi_0)(2\tau_1+\tau_2)\tau_2^3]}{\tau_1\tau_2\tau\left[\frac{1}{r^2}\tau_2+\frac{1}{r_1^2}\tau_1^2+\frac{1}{r_2^2}\tau_2^2\right]} \tag{70}$$

c_2-ით კი გამოითვლება p; $p=\frac{c_2^2}{k^2}$.

თუ დრო გამოთვლილია k ერთეულებში, ე. ი. θ სიდიდეებში, გვექნება:

$$c_2=\frac{2[(\varphi_0-\varphi_1)(2\theta_2+\theta_1)\theta_1^3+(\varphi_2-\varphi_0)(2\theta_1+\theta_2)\theta_2^3]}{\theta_1\theta_2\theta\left[\frac{1}{r^2}\theta^2+\frac{1}{r_1^2}\theta_1^2+\frac{1}{r_2^2}\theta_2^2\right]} \tag{70'}$$

და $p=c_2^2$.

ასეთივე მეთოდით შეიძლება გამოითვალოს c_1 პირველი ინტეგრალიდან.

§ 16. e-ხა და ω-ს (ანუ c_5-ის) განსაზღვრა

p-ს განსაზღვრის შემდეგ e-სა ω-ს (ანუ c_5-ის) საპოვნელად გამოიყენება რადიუს-ვექტორის ფორმულა

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \omega)}.$$

დაკვირვების პირველი და მესამე მომენტისათვის ეს ფორმულა გვაძლევს:

$$\frac{p}{r_1} - 1 = \cos\varphi_1 e\cos\omega + \sin\varphi_1 e\sin\omega,$$

$$\frac{p}{r_2} - 1 = \cos\varphi_2 e\cos\omega + \sin\varphi_2 e\sin\omega.$$

აქედან

$$\left.\begin{aligned} e\sin\omega &= \frac{\left(\frac{p}{r_2} - 1\right)\cos\varphi_1 - \left(\frac{p}{r_1} - 1\right)\cos\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}. \\ e\cos\omega &= \frac{\left(\frac{p}{r_1} - 1\right)\sin\varphi_2 - \left(\frac{p}{r_2} - 1\right)\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}. \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

ამ ფორმულების გაყოფით მიიღება ω, ხოლო კვადრატში ამაღლებით და შეჯამებით e. ჩვენს აღნიშვნებში e-სთან დაკავშირებულია c_3 მუდმივი და ω-სთან c_5:

$$e = \sqrt{1 + \frac{c_2^2 c_3}{k^4}}, \qquad \omega = -c_5.$$

პერიჰელიუმზე გადასვლის მომენტისა და საშუალო ანომალიის განსაზღვრა შეიძლება ვაწარმოოთ ჩვეულებრივი წესით, ე. ი. გამოვიყენებთ კეპლერის განტოლებას დაკვირვების ორი მომენტისათვის.

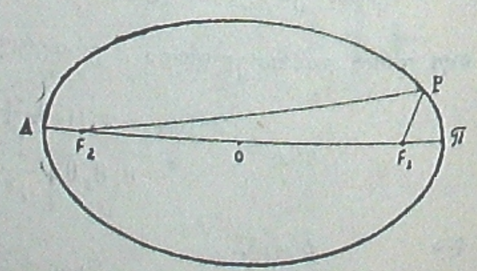
§ 17. კეპლერის განტოლების გამოხატვა „ფსევდო ანომალიით“.

ცთომილის მდებარეობის გამოთვლისა და ეფემერიდების შედგენისათვის უნდა ვისარგებლოთ კეპლერის განტოლებით. ვფიქრობთ, რომ ამ მიზნით უფრო ხელსაყრელია გამოვსახოთ კეპლერის განტოლება „ფსევდო ანომალიის“ საშუალებით. ფსევდო ანომალიას ვუწოდებთ მეორე ფოკუსთან შექმნილ კუთხეს დიდ ღერძსა და მეორე რადიუს-ვექტორს შორის.

მე-2 ნახაზზე ეს არის $\angle P F_2 \Pi$. აღვნიშნოთ ეს კუთხე u-თი, ხოლო მეორე რადიუს-ვექტორი r'-ით; მაშინ, თუ ბრუნვას წარმოვიდგენთ შებრუნებულად,

$$r' = \frac{p}{1 + e\cos(180^\circ - u)} = \frac{p}{1 - e\cos u}. \quad (72)$$

ცნობილია, რომ $r' + r = 2a$, ანუ $2a - r' = r$, ე. ი.



ნახ. 2.

$$2a - \frac{p}{1 - e\cos u} = \frac{p}{1 + e\cos v}.$$

ეს გვაძლევს დამოკიდებულებას u-სა და v-ს შორის. ჩავსვათ $p = a(1 - e^2)$. მივიღებთ:

$$1 + e\cos v = \frac{a - ae\cos u - ae^2 + ae^2\cos u}{a - 2ae\cos u + ae^2}.$$

მსგავს წევრთა შეკრებისა და შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

$$\cos v = \frac{(1 + e^2)\cos u - 2e}{1 - 2e\cos u + e^2}. \quad (73)$$

განვსაზღვროთ აქედან $\sin^2\frac{v}{2}$ და $\cos^2\frac{v}{2}$ როგორც ნახევარი კუთხის სინუსი და კოსინუსი, გავყოთ ერთმანეთზე და ამოვიღოთ კვადრატული ფესვი; საბოლოოდ გვექნება*):

$$\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} \quad (74)$$

(74)-ის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ექსცენტრული ანომალიის ნახევრის ტანგენსს. ამიტომ ექსცენტრულ ფსევდო ანომალიას შორის კავშირი იქნება: ანომალიასა და

$$\mathrm{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}. \quad (75)$$

კეპლერის განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$arc\,\mathrm{tg}\left[\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}\right] - \frac{e\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}}{1 + e\frac{1 + e}{1 - e}\,\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}} = \frac{M}{2}$$

ანუ

$$\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2} = \mathrm{tg}\left[\frac{M}{2} + \frac{e\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}}{1 + \frac{1 + e}{1 - e}\,\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}}\right].$$

აღვნიშნოთ

$$x = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{E}{2},$$

გვექნება:

$$x = \mathrm{tg}\left[\frac{M}{2} + \frac{ex}{1 + x^2}\right]. \quad (76)$$

---

* როგორც სსრკ აკადემიის წევრმა-კორესპონდენტმა პროფესორმა მ. სუბოტინმა გვაცნობა, ეს ფორმულა მიუღია ავგუსტუს შტუმპფს [9].

ეს ფორმა ხელსაყრელია u-ს გამოსათვლელად, რადგან მტკიცდება, რომ როცა ექსცენტრისიტეტი მცირეა, ფსევდო ანომალია დაახლოებით საშუალო ანომალიის ტოლია, $u \approx M$. შეიძლება შევადგინოთ ცხრილი u-სათვის M-სა და e-ს საშუალებით, რაც გააადვილებს კეპლერის განტოლების ამოხსნას (76) ფორმით. ცხრილით მოცემული u-თი გამოითვლება x და ჩაისმება (76)-ის მარჯვენა მხარეში. თუ ცხრილი არ გვექნება, პირველი მიახლოებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ფორმულა

$$x = \operatorname{tg} \frac{M}{2}\left[1 + e + \frac{e^2}{1 - e + x^2}\right], \tag{77}$$

რაც მიიღება (76) -დან ჯამის ტანგენსის გაშლით და მცირე კუთხის თვით კუთხით შეცვლით. მარჯვენა მხარეში ამ შემთხვევაში პირველი მიახლოებისათვის ჩავსვამთ $x_0 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{M}{2}$. x-ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ ისევ მეორე მხარეში და ა. შ., სანამ არ დაემთხვევა ორივე მნიშვნელობა.

§ 18. ცთომილის მდებარეობის გამოთვლა

ცთომილის მდებარეობის გამოსათვლელად უპირველესად უნდა ამოიხსნას კეპლერის განტოლება. ეს შეიძლება მოხდეს წინა პარაგრაფში მოყვანილი წესით, ან ჩვეულებრივი წესით.

ამრიგად ცნობილი გახდება $x = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \operatorname{tg} \frac{E}{2}$. ამის შემდეგ გამოითვლება v და r:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{u}{2},$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}.$$

v-თი გაიგება φ და შემდეგ λ და β:

$$\varphi = v + \omega,$$

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \operatorname{tg} \varphi \, \frac{c_1}{c_2},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \varepsilon \sin(\lambda - \Omega).$$

მდებარეობის გამოთვლის და საერთოდ ეფემერიდების შედგენის დროს მუდმივები ანუ ორბიტის ელემენტები ცნობილად იგულისხმება. გამოვითვლით რა r, β, λ-ს ზემოთ მოყვანილი ფორმულებიდან, ვისარგებლებთ კოორდინატთა დამოკიდებულების ფორმულებით:

$$r \cos\beta \cos\lambda + X = \rho \cos b \cos l, \qquad r \cos\beta \sin\lambda + Y = \rho \cos b \sin l,$$
$$r \sin\beta + Z = \rho \sin b,$$

საიდანაც განისაზღვრება b და l.

ასევე გამოითვლება ეფემერიდები.

დაკვირვების წარმოდგენისათვის შეიძლება გამოვთვალოთ ρ მანძილი, რათა განისაზღვროს აბერაციული შესწორება

$$\rho = \frac{\varepsilon \cos c_4 \, Y + \varepsilon \sin c_4 \, X - Z}{\varepsilon \cos c_4 \cos b \sin l + \varepsilon \sin c_4 \cos b \cos l - \sin b}.$$

აბერაციული შესწორება იქნება $A\rho$, სადაც $\lg A = 7.76122$. დაკვირვების მომენტი იქნება $t' = t - A\rho$ და, როგორც ზევით, გამოითვლება ცთომილის მდებარეობა.

აქ გადმოცემული მეთოდით გამოთვლილი ორბიტის განსაზღვრის ზოგიერთი მაგალითი და აგრეთვე § 11-ში აღნიშნული ცხრილის Δn_1-ის გამოსათვლელად, გამოქვეყნებული იქნება ბიულეტენის უახლოეს ნომერში.

ამ ნაშრომის საბოლოო გაფორმებისას მოცემული ზოგიერთი რჩევისათვის მადლობას მოვახსენებ მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორს ბ. შჩიგოლევს.

აპრილი, 1956 წ.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. რახმაძე ა., განუსაზღვრელი ინტეგრალები, 1920, თბილისი.
2. Стрэмгрен Э. и Стрэмгрен Б., Астрономия, 1941.
3. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. I, 1941.
4. Дубяго А. Д., Определение орбит, 1949.
5. Орлов А. Я. и Орлов Б. А., Курс теоретической астрономии, 1940.
6. Дубошин Г. Н., Введение в небесную механику, 1935.
7. Мультон Ф. Р., Введение в небесную механику, 1935.
8. Tisserand F., Traité de mécanique cèleste, V. 1, 1889.
9. Stumpff K., Astron. Nachr. 273, 105, 1942.

ИНТЕГРАЛЫ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ

М. П. ИМНАДЗЕ

(Резюме)

В работе рассмотрены основные вопросы теоретической астрономии, которые решаются некоторым новым способом. Автор в своих исследованиях применяет элементы дифференциального и интегрального исчисления, причем, главным образом, употребляются сферические координаты.

В первой главе приведена интеграция задачи двух тел в сферических координатах. Дифференцируя дважды формулы преобразования координат

$$x = r \cos\beta \cos\lambda, \quad y = r \cos\beta \sin\lambda, \quad z = r \sin\beta,$$

получим выражения для вторых производных $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$. Подставляя эти выражения в уравнения движения, имеем:

$$\ddot{x} = -\frac{k^2 x}{r^3},\quad \ddot{y} = -\frac{k^2 y}{r^3},\quad \ddot{z} = -\frac{k^2 z}{r^3}.$$

После упрощения получим следующие уравнения движения в сферических координатах:

$$\ddot{r} - r\dot{\beta}^2 - r\cos^2\beta\,\dot{\lambda}^2 + \frac{k^2}{r^2} = 0 \qquad (1)$$

$$-2\dot{r}\dot{\lambda}\cos^2\beta + 2r\dot{\beta}\dot{\lambda}\sin\beta\cos\beta - r\ddot{\lambda}\cos^2\beta = 0 \qquad (2)$$

$$-2\dot{r}\dot{\beta} - r\ddot{\beta} - r\sin\beta\cos\beta\,\dot{\lambda}^2 = 0. \qquad (3)$$

Интеграция системы (1), (2), (3) разлагается на две ступени. Сперва получаются интегралы, которые кроме переменных и постоянных содержат в себе производные. Мы их называем интегралами первого порядка; они имеют вид:

$$r^2\cos^2\beta\,\dot{\lambda} = c_1 \qquad \text{I}$$

$$r^4\dot{\beta}^2 + \frac{c_1^2}{\cos^2\beta} = c_2^2 \qquad \text{II}$$

$$\dot{r}^2 + \frac{c_2^2}{r^2} - \frac{2k^2}{r} = c^3. \qquad \text{III}$$

Из интегралов первого порядка получаются интегралы второго порядка:

$$tg\,\beta = \varepsilon\sin(\lambda + c_4) \qquad \text{IV}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + c_5)} \qquad \text{V}$$

$$E - e\sin E = nt + c_6, \qquad \text{VI}$$

где наряду с другими применяются следующие обозначения:

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1 = \varepsilon^2 \qquad (5)$$

$$\frac{c_2^2}{k^2(1+m)} = p \qquad (6)$$

$$\frac{c_2}{c_1}\,tg\,(\lambda + c_4) = tg\,\varphi \qquad (8)$$

Эти интегралы выведены последовательным аналитическим методом, т. е. без применения геометрических построений, а также без использования свойств уже полученных формул. VI интеграл дает возможность вывести зависимость между E и r:

$$r = a(1 - e\cos E) \qquad (14)$$

После интеграции выясняется геометрическое значение постоянных. Из полученных интегралов обыкновенную форму имеют V и VI; такую же форму имеет также формула (9) ($r^2\dot{\varphi} = c_2$), проекция которой на основную плоскость представляет I интеграл.

В § 6 доказывается взаимная независимость полученных интегралов. Показано, что они составляют полное решение задачи двух тел.

В конце первой главы рассматривается уравнение движения в геоцентрических координатах и получается (в этих координатах) выражение первого и четвертого интеграла, а также уравнение Лагранжа.

Вторая глава посвящена разработке нового метода определения орбит, при этом применяются интегралы и формулы, полученные в первой главе. Отмечено, что численные производные геоцентрических координат b, l и других не определяются надежно; более точно вычисляются численные производные гелиоцентрических координат, которыми можно пользоваться для определения элементов орбиты. При этом расстояния r, ρ должны быть заранее определены. Для их определения уравнение Лагранжа рассматривается по отношению к n_1, (отношение площадей треугольников), для которого можно получить достаточно хорошее исходное значение.

Из известного выражения для n_1 и n_2 получается зависимость между ними

$$n_2 = hn_1 + m \qquad (26)$$

где

$$h = \frac{\tau_1 + 2\tau_2}{\tau_2 + 2\tau_1} \text{ и } m = \frac{\tau_2 + \tau_1}{\tau_2 + 2\tau_1} + f(r, \dot{r}, \ddot{r})$$

причем, $f \approx 0$.

В результате подстановки n_2 из (26) в уравнения для геоцентрических расстояний

$$\rho_1 n_1 \lambda_1 - \rho\lambda + \rho_2 n_2 \lambda_2 = n_1\chi_1 - \chi + n_2\chi_2 \text{ и др.} \qquad (30)$$

получается

$$n_1\rho_1 = P_1 + Q_1 n_1,\ \rho = P + Qn_1,\ (hn_1 m)\rho_2 = P_2 + Q_2 n_1, \qquad (42)$$

где

$$P_1 = (-X + mX_2)a_1 + (-Y + mY_2)b_1 + (-Z + mZ_2)c_1$$

$$Q_1 = (X_1 + hmX_2)a_1 + (Y_1 + hY_2)b_1 + (Z_1 + hZ_2)c_1 \text{ и др.}$$

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}(\sin b_2\cos b\sin l_2 - \sin b\cos b_2\sin l_2)$$

$$b_1 = \frac{1}{\Delta}(\sin b\cos b_2\cos l_2 - \sin b_2\cos b\cos l) \qquad (35)$$

$$c_1 = \frac{1}{\Delta}\cos b\cos b_2\sin(l_2 - l) \text{ и др.}$$

Выведены контрольные формулы для величин $a_1, b_1, \ldots P_1, Q_1, \ldots$ например:

$$(Q_1 - P_1)\cos b_1\cos l_1 - (Q - P)\cos b\cos l + (Q_2 - P_2)\cos b_2\cos l_2 = X_1 + X + X_2 \qquad (43)$$

Обозначая $n_1 - n_1^\circ = \Delta n_1$, из выражения для n_1 получим:

$$\Delta n_1 = \frac{n_1^\circ \tau_2 (\tau_1 + 2\tau_2)}{6 r^3} + f_1, \tag{44}$$

где $f_1 \approx 0$ в результате подстановки сюда $r^2 = \rho^2 + R^2 + 2R\rho^2 \cos\psi$, $f_1 = 0$, $\rho = P + Q n_1$, окончательно будем иметь:

$$\Delta n_1 = \frac{A}{[1+B]^{3/2}}, \tag{49}$$

где

$$A = \frac{n_1^\circ \tau_2 (\tau_2 + 2\tau_1)}{6 r_0^2} \tag{47}$$

$$B = \frac{Q \Delta n_1 (2\rho_0 + 2R\cos\psi + Q\Delta n_1}{r_0^3} \tag{48}$$

Из (48) видно, что B содержит Δn_1, но так как Δn_1 малая величина, для первого приближения можно допустить $\Delta n_1 \approx \Delta n_1^\circ \approx A$. Подставляя это в равенство (48), определим B, после чего из (49) получается более точное значение Δn_1 и т. д.

Зная $n_1 = n_1^\circ + \Delta n_1$, из (42) определяем ρ_1, ρ, ρ_2; после чего вычисляем поправку и снова определяем n_1°, n_1, ρ_1, ρ, ρ_2.

Для следующего приближения пользуемся формулой Гиббса

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau} \frac{1 + B_1 r_1^{-3}}{1 - B r^{-3}}, \qquad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau} \frac{1 + B_2 r_2^{-3}}{1 - B r^{-3}}.$$

Численные производные какой-нибудь величины u вычисляются посредством параболы второго порядка

$$a\tau^2 + b\tau + c = u, \tag{51}$$

где

$$a = \frac{-(u - u_1)\tau_1 + (u_2 - u)\tau_2}{\tau_1 \tau_2 \tau}, \qquad b = \frac{(u - u_1)\tau_1^2 + (u_2 - u)\tau_2^2}{\tau_1 \tau_2 \tau} \tag{55}$$

Вторая производная $\ddot{u} = 2a$,
а первые производные равны:

$$\dot{u}_1 = 2a\tau_2 + b, \quad \dot{u} = b, \quad \dot{u}_2 = 2a\tau_1 + b. \tag{57}$$

Посредством геоцентрических расстояний вычисляются гелиоцентрические координаты $x = \rho\cos b \cos l - X$, $Y = \rho \cos b \sin l - Y$, $Z = \rho \sin b - Z$; после чего для определения ε и c_4 применяется IV интеграл в геоцентрических координатах, которому можно придать вид:

$$\varepsilon \sin c_4 x + \varepsilon \cos c_4 y = z.$$

Применяя это равенство для первого и третьего наблюдения, получим:

$$\varepsilon \sin c_4 = \frac{z_2 y_1 - z_1 y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}, \quad \varepsilon \cos c_4 = \frac{z_1 x_2 - x_1 z_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}, \tag{59}$$

ε дает отношение $\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$

После этого можно вычислить λ, φ и β:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{c_2}{c_1} \operatorname{tg}(\lambda + c_4), \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Определение параметра равносильно определению c_2, так как $c_2^2 = K^2(1+m)p$.

Для определения c_2 можно воспользоваться формулой

$$r^2 \dot{\varphi} = c_2, \tag{9}$$

а также первым и вторым интегралом

$$r^2 \cos^2\beta \, \dot{\lambda} = c_1 \qquad \text{I} \qquad r^4 \dot{\beta}^2 + \frac{c_1^2}{\cos^2\beta} = c_2^2 \qquad \text{II}$$

причем, заранее вычисляются соответствующие производные.

Так как c_2 (или p) имеет важное значение, желательно для его определения найти более точный способ. С этой целью комбинируем параболическое приближение с формулой секториальной скорости (9). Напишем уравнение параболы четвертого порядка для аргумента широты φ:

$$\varphi = a\tau^4 + b\tau^3 + c\tau^2 + d\tau + e \tag{63}$$

и формулу (9) для трех моментов наблюдения. Исключая коэффициенты a, b, c, d, e, получим для c_2 формулу

$$c_2 = \frac{2\left[(\varphi_0 - \varphi_1)(2\tau_2 + \tau_1)\tau_1^3 + (\varphi_2 - \varphi_0)(2\tau_1 + \tau_2)\tau_2^3\right]}{\tau_1 \tau_2 \tau \left[\frac{1}{r^2}\tau^2 + \frac{1}{r_1^2}\tau_1^2 + \frac{1}{r_2^2}\tau_2^2\right]} \tag{70}$$

После определения p, постоянные e и w определяются по формуле радиус-вектора, применение которой для двух моментов наблюдения дает $e \sin w$ и $e \cos w$.

При малых эксцентриситетах уравнение Кеплера удобно выразить посредством «псевдо аномалии», т. е. углом, который образуется при втором фокусе. Обозначая ее через u и положив

$$x = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{u}{2} = \operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

Уравнение Кеплера получим в следующем виде:

$$x = \operatorname{tg}\left[\frac{M}{2} + \frac{ex}{1+x^2}\right], \tag{76}$$

где $u \approx M$—здесь приближение скоро достигается. Можно составить таблицу для u по M и e.

После определения u определяются v и r

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}\frac{u}{2},\qquad r=\frac{p}{1+e\cos v},$$

потом вычисляются φ, λ, β, после чего формулы преобразования координат дают гелиоцентрические координаты b, l.

Вычисление нескольких примеров на определение орбит, а также составление таблицы для Δn_1 мы намерены выполнить в ближайшем будущем.

За советы, при окончательном оформлении этой работы, выражаю благодарность профессору Московского Университета Б. М. Щиголеву.

Август, 1956.

THE INTEGRALS OF THE PROBLEM OF TWO BODIES IN SPHERICAL COORDINATES AND THEIR APPLICATION TO ORBIT DETERMINATION

M. P. IMNADZE

(Summary)

The writer examined a classical problem of two bodies from a new point of view. Initial integrals are obtained in spherical coordinates.

It is stated that these integrals are independent and fully determining the movement.

Basing on the obtained integrals, a new method of orbit determination is worked out whose development and practical use will in some way simplify the solution of the problem under consideration.

August, 1956.

მიხეილ ალექსანდრეს ძე ვაშაკიძე

1956 წლის 27 ნოემბერს ხანმოკლე, მაგრამ მძიმე ავადმყოფობის შემდეგ გარდაიცვალა საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ასტროფიზიკისა და ვარსკვლავთ ასტრონომიის განყოფილების გამგე, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი **მ ი ხ ე ი ლ ა ლ ე ქ ს ა ნ დ რ ́ ე ს ძ ე ვ ა შ ა კ ი ძ ე.**

მ. ვაშაკიძე დაიბადა 1909 წელს სოფ. დიდ ჯიხაიშში (სამტრედიის რაიონი), მუშის ოჯახში. 1932 წელს მან დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი. ამავე წელს იგი, როგორც აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ასპირანტი, გაგზავნილი იქნა ლენინგრადის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, სადაც ვ. ამბარცუმიანის ხელმძღვანელობით გაიარა ასპირანტურის კურსი. 1936 წელს მ. ვაშაკიძემ დაიცვა დისერტაცია ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად თემაზე: „ჰერკულესის ახალი ვარსკვლავის სპექტრის ნებულური სტადია“.

ამ დროიდან დაწყებული, 20 წლის მანძილზე მ. ვაშაკიძე ეწევა ნაყოფიერ შემოქმედებით მოღვაწეობას როგორც აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ერთ-ერთი წამყვანი ასტრონომი.

მ. ვაშაკიძის პირველი სერიოზული ნაბიჯები მეცნიერებაში დაემთხვა იმ დროს, როცა დაიწყო აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის მოწყობა მთა ყანობილზე და მისი აღჭურვა თანამედროვე ტელესკოპებით.

ამ მნიშვნელოვან საქმეში მ. ვაშაკიძემ ფასდაუდებელი წვლილი შეიტანა, როგორც აქტიურმა, დაუზარებელმა მუშაკმა. აქ გამოვლინდა მისი ბუნებრივი ნიჭი და უნარი, მისი შესანიშნავი ალღო ახალი იარაღების ათვისებაში და დამზერითი მეთოდების დანერგვაში.

მ. ვაშაკიძის მეცნიერული მუშაობისათვის დამახასიათებელი იყო მრავალმხრივობა, გამოყენებული დაკვირვებითი-ექსპერიმენტული მეთოდების ორიგინალობა, ახალი მეცნიერული ამოცანების ძიება.

ჯერ კიდევ მისი სამეცნიერო მოღვაწეობის ადრინდელ პერიოდში მ. ვაშაკიძემ შეიმუშავა ეფექტიური მეთოდი ვარსკვლავთ სივრცითი სიმკვრივეების შესწავლისათვის. ეს მეთოდი საბჭოთა და უცხოურ ლიტერატურაში ცნობილია როგორც ვაშაკიძე-ოორტის მეთოდი. იგი მრავალგზის იქნა გამოყენებული ვარსკვლავთშორისი შთანთქმის და ვარსკვლავთ (კერძოდ—ცვალებადი ვარსკვლავების) სივრცული განაწილების შესწავლის მიზნებისათვის.

მ. ვაშაკიძე ხელმძღვანელობდა აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის რამდენიმე ექსპედიციას მზის სრულ დაბნელებათა დასაკვირვებლად. ამასთან მ. ვაშაკიძემ შეასრულა მზის გვირგვინის გამოსხივების პოლარიზაცი-