აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 22, 1958.
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 22, 1958.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ

Н. Г. МАГНАРАДЗЕ

Проф. Г. Н. Дубошин в ряде работ [1—5] изучил движение материальной точки под действием силы притяжения некоторого тела переменной массы. В работе [2] задача интегрирования основных уравнений движения им была сведена к решению следующего нелинейного интегрального уравнения:

$$F(\omega) = 1 + c^3 \int\limits_0^{\omega} \frac{\varphi[F(u)]\,du}{\left[l_0 \cos(u - \delta_0) + \int\limits_0^{u} F(v) \sin(u - v)\,dv\right]^2}, \qquad (1)$$

где φ —данная функция, c, l_0, δ_0 —некоторые постоянные, а F—искомая функция.

Это сведение совершается следующим образом. Пусть переменная масса M, находящаяся в начале координат плоскости XOY, притягивает постоянную массу m с координатами x, y по закону Ньютона. Как хорошо известно, уравнения движения имеют вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 Mm \frac{x}{r^3}$$

и

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 Mm \frac{y}{r^3},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а k^2—постоянная.

Выбирая систему единиц соответствующим образом, всегда можем считать, что $k^2 = 1$.

Пусть

$$M = f(t).$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(t) \frac{x}{r^3} = 0$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f(t) \frac{y}{r^3} = 0.$$

Принимая во внимание интеграл площадей

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{c}{r^2},$$

где ω —угол между радиус-вектором и осью Ox, а c —постоянная, и сделав преобразование

$$r = \frac{c^2}{\zeta},$$

легко получить уравнение

$$\frac{d^2\zeta}{d\omega^2} + \zeta = F(\omega), \tag{2}$$

где $F(\omega)$ означает результат подстановки неизвестной функции $t = t(\omega)$ в заданную функцию $f(t)$; таким образом $F(\omega) \equiv f(t)$.

Далее, положим

$$f(t) \equiv \varphi[F(\omega)].$$

Теперь принимая во внимание интеграл площадей, легко получить следующее равенство

$$F'(\omega) = \varphi[F(\omega)]\,\frac{c^3}{\zeta^2}. \tag{3}$$

Из уравнения (2) следует, что

$$\zeta \equiv \zeta(\omega; F) = l_0 \cos(\omega - \delta_0) + \int_0^{\omega} F(v) \sin(\omega - v)\,dv, \tag{4}$$

где $l_0 \geqslant 0$ и δ_0 —постоянные.

Полагая $F(0) \equiv 1$ (такой выбор начальных значений не ограничивает общность задачи), из (3) следует, что

$$F(\omega) = 1 + c^3 \int_0^{\omega} \frac{\varphi[F(u)]}{\zeta^2(u; F)}\,du. \tag{5}$$

Последнее, очевидно, совпадает с уравнением (1).

Г. Н. Дубошин доказал (методом последовательных приближений) существование и единственность решения уравнения (5) в предположении, что функция $\varphi(F)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|\varphi(F') - \varphi(F'')| < N\,|F' - F''|,$$

где N—положительная постоянная.

В настоящей работе мы доказываем теорему существования и единственности решения уравнения (5) при несколько более общих условиях, а именно мы предполагаем, что

$$|\varphi(F') - \varphi(F'')| < A_0\,|F' - F'|\,|\log \frac{B_0}{|F' - F'|}|,$$

где A_0 и B_0 —данные положительные постоянные.

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (5) мы воспользуемся способом, предложенным польским математиком Никлиборком [6] при решении задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Мы будем считать, что функция $\varphi(F)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. $\varphi(F)$ непрерывна на замкнутом промежутке $1 - \overline{F} < F < 1 + \overline{F}$ ($\overline{F}$—данное положительное число),

$$2^\circ.\qquad |\varphi(F') - \varphi(F'')| < A_0\,|F' - F'|\,\log \frac{4\overline{F}}{|F' - F''|}, \tag{6}$$

$$3^\circ.\qquad |\varphi(F)| < M_0 \text{ при } 1 - \overline{F} < F < 1 + \overline{F}. \tag{7}$$

Теперь положим $F_0(\omega) \equiv 1$ и

$$F_n(\omega) = 1 + c^3 \int_0^{\omega} \frac{\varphi[F_{n-1}(u)]}{\zeta^2(u; F_{n-1})}\,du, \tag{8}$$

$n = 1, 2 \ldots.$

Г. Н. Дубошин в работе [2] показал, что существуют такие положительные постоянные Δ, m_0 и ω, что

$$0 < \Delta < \zeta(\omega; F_{n-1}) < m_0 \tag{9}$$

при $0 < \omega < \overline{\omega}$ и для всех $n = 1, 2 \ldots.$

Теперь положим

$$\overline{h} = \min\left(\overline{\omega}, \frac{\overline{F}\Delta^2}{M_0 c^3}\right).$$

В силу (7) все приближения $F_n(\omega)(n = 1, 2 \ldots)$ не выходят из промежутка $1 - \overline{F} < F < 1 + \overline{F}$ при $0 < \omega < \overline{h}$ В самом деле, из (8) имеем

$$|F_n(\omega) - 1| < |c|^3 \int_0^{\omega} \frac{|\varphi[F_{n-1}(u)]|}{\zeta^2(u; F_{n-1})}\,du, \qquad n = 1, 2 \ldots$$

Отсюда следует, что при $0 < \omega < \overline{h}$ имеем

$$|F_1(\omega) - 1| < |c|^3 \int_0^{\omega} \frac{|\varphi[F_0(u)]|}{\zeta^2(u; F_0)}\,du < |c|^3 \frac{M_0 \overline{h}}{\Delta^2} < \overline{F}.$$

Теперь по индукции заключаем, что

$$|F_n(\omega) - 1| < \overline{F} \tag{10}$$

при $0 < \omega < h$ и для всех $n = 1, 2. \ldots$

Для доказательства существования $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(\omega)$ достаточно доказать сходимость ряда

$$1 + |F_1(\omega) - 1| + |F_2(\omega) - F_1(\omega)| + \ldots + |F_{n+1}(\omega) - F_n(\omega)| + \ldots \tag{11}$$

Из (8) имеем, что

$$F_{n+1}(\omega) - F_n(\omega) = c^3 \int_0^{\omega} \left[\frac{\varphi[F_n(u)]}{\zeta^2(u; F_n)} - \frac{\varphi[F_{n-1}(u)]}{\zeta^2(u; F_{n-1})} \right] du =$$

$$= c^3 \int_0^{\omega} \frac{\{\varphi[F_n(u)] - \varphi[F_{n-1}(u)]\}}{\zeta^2(u; F_n)} \, du + \tag{12}$$

$$+ c^3 \int_0^{\omega} \frac{[\zeta^2(u; F_{n-1}) - \zeta^2(u; F_n)] \, \varphi[F_{n-1}(u)]}{\zeta^2(u; F_n) \, \zeta^2(u; F_{n-1})} \, du.$$

Но, в силу (6) и (9), очевидно, имеем

$$\left| \frac{\varphi[F_n(u)] - \varphi[F_{n-1}(u)]}{\zeta^2(u; F_n)} \right| <$$

$$< \frac{A_0}{\Delta^2} \left| F_n(u) - F_{n-1}(u) \right| \log \frac{4\bar{F}}{|F_n(u) - F_{n-1}(u)|}. \tag{13}$$

Далее, из (4) следует, что

$$\left| \zeta(u; F_n) - \zeta(u; F_{n-1}) \right| < \int_0^u \left| F_n(v) - F_{n-1}(v) \right| dv. \tag{14}$$

В силу (7), (9) и (14) можем написать

$$\left| \frac{[\zeta^2(u; F_{n-1}) - \zeta^2(u; F_n)] \, \varphi[F_{n-1}(u)]}{\zeta^2(u; F_n) \, \zeta^2(u; F_{n-1})} \right| < \frac{2 M_0 m_0}{\Delta 4}. \tag{15}$$

Поэтому, на основании неравенств (13), (14) и (15), из (12) имеем

$$\left| F_{n+1}(\omega) - F_n(\omega) \right| < \frac{A_0 |c|^3}{\Delta^2} \int_0^{\omega} \left| F_n(u) - F_{n-1}(u) \right| \log \frac{4\bar{F}}{|F_n(u) - F_{n-1}(u)|} \, du +$$

$$+ \frac{2 M_0 m_0 |c|^3}{\Delta 4} \int_0^{\omega} du \int_0^u |F_n(v) - F_{n-1}(v)| \, dv. \tag{16}$$

Теперь заметим, что при $0 < u < \bar{h}$, в силу (10), имеем

$$|F_n(u) - F_{n-1}(u)| < |F_n(u) - 1| + |F_{n-1}(u) - 1| < 2\bar{F}.$$

Отсюда

$$\log \frac{4\bar{F}}{|F_n(u) - F_{n-1}(u)|} > \log \frac{4\bar{F}}{2\bar{F}} = \log 2. \tag{17}$$

Далее,

$$\int_0^{\omega} du \int_0^u |F_n(v) - F_{n-1}(v)| \, dv = \int_0^{\omega} dv \int_v^{\omega} |F_n(v) - F_{n-1}(v)| \, du <$$

$$< \omega \int_0^{\omega} |F_n(v) - F_{n-1}(v)| \, dv. \tag{18}$$

Следовательно, в силу (16), (17) и (18), будем иметь

$$|F_{n+1}(\omega) - F_n(\omega)| < K_0 \int_0^{\omega} |F_n(u) - F_{n-1}(u)| \log \frac{4\bar{F}}{|F_n(u) - F_{n-1}(u)|} \, du, \tag{19}$$

где

$$K_0 = \frac{A_0 |c|^3}{\Delta^2} + \frac{2 M_0 m_0 |c|^3 \bar{h}}{\Delta 4 \log 2}. \tag{20}$$

Далее, легко видеть [6], что неравенство (19) можно заменить следующим неравенством

$$\left| F_{n+1}(\omega) - F_n(\omega) \right| < K_0 A(\lambda_n) \int_0^{\omega} \left| F_n(u) - F_{n-1}(u) \right|^{\lambda_n} du, \tag{21}$$

где

$$A(\lambda_n) = \frac{K_0}{e} \frac{(4\bar{F})^{1-\lambda_n}}{1-\lambda_n}, \quad 0 < \omega < \bar{h},$$

а λ_n—совершенно произвольные числа, удовлетворяющие неравенству $0 < \lambda_n < 1$.

Из неравенства (21) следует [6], что

$$|F_{n+1}(\omega) \leqslant F_n(\omega)| \leqslant c_n \omega^{u_n}$$

где

$$u_n = 1 + \lambda_n + \lambda_n \lambda_{n-1} + \ldots + \lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_3 \lambda_2$$

и

$$c_n = K_0^{u_n} \frac{A(\lambda_n) \, A(\lambda_{n-1})^{\lambda_n} \, A(\lambda_{n-2})^{\lambda_n \lambda_{n-1}} \ldots A(\lambda_1)^{\lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_2} \cdot B^{\lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_2 \lambda_1}}{2^{\lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_2} \cdot (2+\lambda_2)^{\lambda_n \ldots \lambda_{n-1} \ldots \lambda_3} \cdot (2 + \lambda_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} \ldots \lambda_2)^{\lambda_n}}.$$

Тогда доказательство сходимости ряда (11) приводится к доказательству сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega^{u_n}. \tag{22}$$

Теперь положим

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \text{ и } \lambda_n = \frac{n-1}{n} \text{ при } n = 2, 3 \ldots .$$

Тогда легко проверить, что

$$u_n = \frac{n+1}{2} \text{ и } A(\lambda_n) = \frac{K_0}{e}(4\bar{F})^{\frac{1}{n}} n.$$

Далее, нетрудно показать, что ряд (22) сходится, когда $0 \leqslant \omega < \dfrac{e}{2K_0}$.

Таким образом, существует предел

$$\lim_{n \to \infty} F_n(\omega) = F(\omega) \text{ при } 0 < \omega < \omega^*,$$

где

$$\omega^* < \min\left(\bar{h}, \frac{e}{2K_0}\right).$$

Теперь из (4) имеем, что при $0 < \omega < \omega^*$ равномерно

$$\lim_{n \to \infty} \zeta_n(\omega) = l_0 \cos(\omega - \delta_0) + \int_0^{\omega} F(v) \sin(\omega - v)\, dv.$$

Поэтому из (8) вытекает равенство (5), т. е. $F(\omega)$ является искомым решением интегрального уравнения (5).

Наконец, нетрудно проверить, что найденное решение является единственным непрерывно дифференцируемым решением рассматриваемой задачи.

Январь, 1957 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Дубошин, Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астр. журн., 2, № 4, 5—11, 1925.
2. Г. Н. Дубошин, Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астр. журн., 4, № 2, 123—142, 1927.
3. Г. Н. Дубошин, Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астр. журн., 5, № 2—3, 153—172, 1928.
4. Г. Н. Дубошин, Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астр. журн., 6, № 2, 162—179, 1929.
5. Г. Н. Дубошин, О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами. Астр. журн., 7, № 3—4, 153—172, 1930.
6. W. Nikliborc, Sur l'application de la méthode des approximations successives, dans la théorie des équations différentielles. Studia Mathematica, 1, 201 — 209 1929.

აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 22, 1958
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 22, 1958

ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრალები სფერულ კოორდინატებში და მათი გამოყენება ორბიტების გამოსათვლელად

მ. იმნაძე

შესავალი

ორი სხეულის ამოცანის ამოხსნა საერთოდ ცნობილია. ამ ამოხსნაში,
როგორც ვფიქრობთ, ე. წ. პირველი ინტეგრალები გამოიყვანება არათან-
მიმდევრული ხერხით. ამასთან, ზოგიერთ მათგანს არა აქვს უშუალო გამო-
ყენება ორბიტების გამოთვლისას. ასეთი შეხედულების საფუძველზე რამდე-
ნიმე წლის წინ მიზნად დავისახეთ: 1) თანმიმდევრობით გამოგვეყვანა ორი
სხეულის ამოცანის პირველი ინტეგრალები და 2) გვეპოვნა ორბიტის გამო-
თვლის ახალი ხერხი, სადაც პირველ ინტეგრალებს ექნებოდა უფრო მეტი
გამოყენება, ვიდრე ცნობილ მეთოდებში.

ამოცანის პირველი ნაწილი შედარებით ადვილად იქნა გადაწყვეტილი.
გაცილებით ძნელი აღმოჩნდა მეორე პრობლემა — ორბიტის გამოთვლის ახა-
ლი მეთოდის დამუშავება. პირველად ვცადეთ შეგვექმნა უფრო ზუსტი ხერხი
რიცხობრივი წარმოებულებისათვის, რაც გააადვილებდა ძირითადი განტო-
ლების ამოხსნას. მაგრამ, სამი დაკვირვების შემთხვევაში ეს არ აღმოჩნდა
შესაძლებელი. შემდგომ გადავწყვიტეთ დაგვეახლოვებია ჩვენი მეთოდი კლა-
სიკურ მეთოდთან, ისე რომ, თუ მივიღებდით ამ მეთოდის ზოგიერთ დებუ-
ლებას, პირველი ინტეგრალების საფუძველზე შექმნილიყო ორბიტის გამოთვ-
ლის ახალი ხერხი.

ვფიქრობთ, რომ ორბიტის განსაზღვრის ეს ახალი მეთოდი ზოგიერთი
მხრივ უფრო ხელსაყრელი იქნება, ვიდრე არსებული მეთოდები. ამჟამად იგი
ალბათ სავსებით ვერ შეცვლის საყოველთაოდ მიღებულ ლაგრანჟ-გაუსის მე-
თოდს, მაგრამ შემდეგში შესაძლებელია განვითარებულ იქნას (ავტორის ან
სხვების მიერ) და ნამდვილ ქმედით მეთოდად გადაიქცეს.

ნაწილი 1

ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრაცია სფერულ კოორდინატებში

§ 1. მოძრაობის განტოლება სფერულ კოორდინატებში

როგორც ცნობილია, სწორკუთხოვან კოორდინატებში ორი სხეულის
ამოცანის შეფარდებითი მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე: