გამოთვლისათვის. ამის საფუძველზე შედგენილია ორმოცდასამ კაპტეინის არეში №№1 - 43 მდებარე 10.3 – 13.3 ვარსკვლავიერი სიდიდის 14000 ვარსკვლავის ფერის მაჩვენებელთა კატალოგი.

აქ მოყვანილია მხოლოდ სია აქამდე გამოუქვეყნებელი ფერის მაჩვენებლებისა (ცხრილი IV) და მოკლე აღწერა მასალისა და მონაცემებისა იმ სქემით, რაც შემოღებული გვქონდა წინანდელ ნაშრომებში (ცხრილი I, II, III, V).

ავტორს განზრახული აქვს გამოაქვეყნოს ბიულეტენის შემდეგ ნომერში ვრცელი ნაშრომი, რომელიც შეიცავს, ჯერერთი, სამუშაოს მეთოდიკური ნაწილის დაწვრილებით აღწერას ყველა სარედუქციო ფორმულის გამოყვანით და განსაზღვრების ცთომილებათა და სიზუსტის დახასიათებით და, მეორეც— ვარსკვლავების ფერის სიჭარბეთა საფუძველზე შესრულებული გალაქტიკური შერჩევითი შთანთქმის გამოკვლევის შედეგების გადმოცემას.

იანვარი, 1948.

აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ბიულეტენი № 10, 1949
БЮЛЛЕТЕНЬ АБАСТУМАНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ № 10, 1949

К ВОПРОСУ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА В МЕТОДЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТЫ ПО ТРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ

А. В. ПУРЦХВАНИДЗЕ

Введение. При вычислении орбиты по трем достаточно близким наблюдениям основным затруднением является решение уравнений Лагранжа, дающих геоцентрическое расстояние для момента среднего наблюдения. Как известно, уравнения Лагранжа не всегда решаются и, в таком случае, невозможно определить орбиту по данным наблюдениям. Если же уравнения Лагранжа решены и найдено геоцентрическое расстояние, то дальнейшие вычисления не представляют затруднений.

До сих пор не существует точно формулированного критерия, позволяющего заранее определить число корней уравнений Лагранжа. Тем более не разработан вопрос об оценке точности получаемого геоцентрического расстояния.

В настоящей работе мы исследуем вопрос о числе корней уравнений Лагранжа и предлагаем простой способ решения уравнений.

Важные результаты в данной области мы встречаем в работах Лагранжа[1], а также и в исследованиях Гаусса[2], Лапласа[3], Шарлье[4] и русского астронома М. А. Вильева[5]. Но все эти исследования касались общего случая, без каких-либо предположений о движущейся планете, о положении планеты при наблюдении и т. п. Из-за этого возникали большие затруднения, делающие невозможным доведение исследования до конца.

В настоящей работе данная задача решается для частного случая, применительно к определению орбит астероидов. Те ограничения, которые точнее будут сформулированы ниже, дали нам возможность исследовать уравнения Лагранжа в более точной форме.

Напишем уравнения Лагранжа в том виде, как они приведены в курсе небесной механики профессора М. Ф. Субботина[6]:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= P - Qr^{-3}, \\ r^2 &= R^2 + 2R\rho\cos f + \rho^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Второе уравнение выведено из треугольника Солнце, Земля и планета. Величины, входящие в это уравнение, имеют простое геометрическое значение. Что касается первого, оно выведено на основе законов Кеплера. Выведем это уравнение и разъясним некоторые свойства коэфициентов P и Q.

Вывод первого уравнения Лагранжа. Обозначим через t_1, t, t_2 моменты трех наблюдений. Будем считать, что

$$t_1 < t < t_2.$$

Далее обозначим соответственно через

$\bar{r}_1, \bar{r}, \bar{r}_2$ — радиус-векторы планеты,

$\bar{R}_1, \bar{R}, \bar{R}_2$ — радиус-векторы Земли.

Соответствующие скалярные величины обозначим через те же буквы без черточек.

Пусть ρ_1, ρ, ρ_2 — геоцентрические расстояния планеты, $\bar{e}_1, \bar{e}, \bar{e}_2$ — единичные векторы, указывающие наблюденные направления на планету. Компоненты этих единичных векторов даются по формулам:

$$\lambda_1 = \cos\alpha_1 \cos\delta_1, \quad \lambda = \cos\alpha \cos\delta, \quad \lambda_2 = \cos\alpha_2 \cos\delta_2,$$
$$\mu_1 = \sin\alpha_1 \cos\delta_1, \quad \mu = \sin\alpha \cos\delta, \quad \mu_2 = \sin\alpha_2 \cos\delta_2,$$
$$\nu_1 = \sin\delta_1, \quad \nu = \sin\delta, \quad \nu_2 = \sin\delta_2.$$

Для вывода основного уравнения воспользуемся тем, что планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца. Это значит, что векторы $\bar{r}_1, \bar{r}, \bar{r}_2$ компланарны. Напишем это условие так:

$$\bar{r} = n_1 \bar{r}_1 + n_2 \bar{r}_2$$

или

$$\bar{r} - n_1 \bar{r}_1 - n_2 \bar{r}_2 = 0, \tag{2}$$

где n_1 и n_2 пока неизвестные параметры.

Так как

$$\bar{r}_1 = \bar{R}_1 + \rho_1 \bar{e}_1,$$
$$\bar{r} = \bar{R} + \rho \bar{e},$$
$$\bar{r}_2 = \bar{R}_2 + \rho_2 \bar{e}_2,$$

то, подставляя эти значения в (2), получаем:

$$\rho\bar{e} - \rho_1 n_1 \bar{e}_1 - \rho_2 n_2 \bar{e}_2 = n_1 \bar{R}_1 + n_2 \bar{R}_2 - \bar{R}.$$

Помножив это равенство скалярно на вектор $[\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2]$ и заметив, что

$$(\bar{e}_1 \cdot [\bar{e}_1 \bar{e}_2]) = (\bar{e}_2 \cdot [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2]) = 0,$$

будем иметь:

$$\rho\,(\bar{e} \cdot [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2]) = (n_1 \bar{R}_1 + n_2 \bar{R}_2 - \bar{R} \cdot [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2]). \tag{3}$$

Как известно, при достаточно близких наблюдениях неизвестные параметры n_1 и n_2 приближенно можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= n_1^0 + c_1 r^{-3}, \\ n_2 &= n_2^0 + c_2 r^{-3}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где величины n^0_1, n^0_2, c_1 и c_2 зависят только от наблюденных моментов t_1, t, t_2. Подставляя эти значения параметров в (3), получим приближенное уравнение вида

$$\rho\,(\bar{e} \cdot [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2]) = (n_1^0 \bar{R}_1 + n_2^0 \bar{R}_2 - \bar{R} \cdot [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2]) + (c_1 \bar{R}_1 + c_2 \bar{R}_2 \cdot [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2])\, r^{-3}. \tag{5}$$

Если положить, что векторы R_1, R и R_2 тоже компланарны, то можно написать:

$$\bar{R} = m_1 \bar{R}_1 + m_2 \bar{R}_2, \tag{6}$$

где m_1 и m_2 неизвестные параметры, которые приближенно можно представить в том же виде, как и n_1, n_2:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= n_1^0 + c_1 R^{-3}, \\ m_2 &= n_2^0 + c_2 R^{-3}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Подставляя эти значения параметров m_1 и m_2 в (6) и внося полученное выражение $\bar{R}$ в уравнение (5), получаем несколько менее точное уравнение вида

$$\rho\,(\bar{e} \cdot [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2]) = (c_1 \bar{R}_1 + c_2 \bar{R}_2 \cdot [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2])\,(r^{-3} - R^{-3}). \tag{8}$$

Вводя обозначение

$$Q = -\frac{(c_1 \bar{R}_1 + c_2 \bar{R}_2 \cdot [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2])}{(\bar{e} \cdot [\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2])}, \tag{9}$$

получаем

$$\rho = Q(R^{-3} - r^{-3}). \tag{10}$$

На практике не встречается случай, когда $r < R$. При наблюдении астероидов $r > R$, и потому Q должно быть положительно, иначе уравнение (10) не имело бы смысла.

Так как Земля, из-за близости Луны, подвержена более сильным возмущениям, чем планета, то приближенные равенства (6) и (7) вообще более отягощены ошибками, чем равенства (2) и (4). Учитывая это обстоятельство, уравнение (10) заменим таким:

$$\rho = Q(R^{-3} - r^{-3}) + h, \tag{11}$$

где h — малая величина.

Обозначая

$$P = QR^{-3} + h, \tag{12}$$

будем иметь:

$$\rho = P - Qr^{-3}. \tag{13}$$

Это и есть первое уравнение Лагранжа.

Так как h малая величина и R близка к единице, то из (12) вытекает, что величина P мало отличается от величины Q.

Итак, коэфициенты P и Q положительные величины и почти равны между собою.

Постановка вопроса. Представим систему (1) в виде:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= P - Qr^{-3}, \\ r^2 &= (R\cos\psi+\rho)^2 + R^2\sin^2\psi. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

В этой системе:

ρ—искомое геоцентрическое расстояние,

P и Q,—как было сказано, положительны для астероидов,

R—радиус-вектор Земли, который приблизительно равен единице,

$180°-\psi$ Угол между направлениями от Земли на Солнце и на астероид. Так как астероиды наблюдаются около оппозиции, то этот угол близок к 180°, т. е. угол ψ малая величина. Будем полагать, что $\psi<60°$, что почти всегда выполняется. Это обуславливается еще тем обстоятельством, что второе уравнение Лагранжа составляется для среднего наблюдения, которое ближе других к моменту оппозиции. На практике чаще всего встречается $\psi<25°$. Следовательно, в дальнейшем будем полагать, что выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} &\rho>0, \\ &r>R\approx 1, \\ &\psi<60° \text{ или } \cos\psi>0{,}5. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Исключая ρ в системе (14), будем иметь

$$r^2=(R\cos\psi+P-Qr^{-3})^2+R^2\sin^2\psi$$

или

$$r^2-(R\cos\psi+P-Qr^{-3})^2-R^2\sin^2\psi=0. \tag{16}$$

В этом уравнении неизвестным является r.

Обозначим левую часть уравнения через U, т. е.:

$$U=r^2-(R\cos\psi+P-Qr^{-3})^2-R^2\sin\psi \tag{17}$$

и рассмотрим U как функцию от r. Исследуем вопрос о том, при каких значениях r функция $U(r)$ обращается в нуль. Ясно, что функция $U(r)$ обращается в нуль, если аргумент r—корень уравнений Лагранжа.

Итак, исследование вопроса о числе решений уравнения Лагранжа сводится к исследованию вопроса о числе обращения в нуль функции $U(r)$.

Исследование функции $U(r)$. Для практических целей достаточно исследовать функцию $U(r)$ в интервале

$$R<r<5,$$

но, ради удобства, иногда будем рассматривать более широкий интервал, а именно:

$$R<r<\infty.$$

Как видно из (17), функция $U(r)$ непрерывна в этом интервале. Кроме того, она становится положительной при

$$r\geqq N,$$

где N достаточно большое число.

Поведение функции характеризуется знаком ее производной. Поэтому, прежде всего, исследуем вопрос о том, при каких значениях постоянных и аргумента r производная $\frac{dU}{dr}$ имеет положительное или отрицательное значения.

Из (17) имеем:

$$\frac{dU}{dr}=2r^{-7}[r^8-3Q(R\cos\psi+P)r^3+3Q^2]$$

или

$$\frac{dU}{dr}=2r^{-7}\cdot z, \tag{18}$$

где

$$z=r^8-3Q(R\cos\psi+P)\,r^3+3Q^2. \tag{19}$$

Равенство (18) показывает, что знак производной зависит от знака величины $z(r)$. Выясним знак функции $z(r)$ в интервале (R, ∞).

Обозначив через D производную $\frac{dU}{dr}$ при $r=R$, будем иметь

$$D=2R-6Q(R\cos\psi+h)\,R^{-4}. \tag{20}$$

Принимая во внимание условие (15), а также, что $Q>0$ и h малая величина, заключаем, что

$$D<2R. \tag{21}$$

Для выяснения знака функции $z(r)$ вычислим производную

$$\frac{dz}{dr}=r^2\,[8r^5-9Q\,(R\cos\psi+P)]. \tag{22}$$

Ясно, что если

$$\frac{dz}{dr}\geqq 0, \text{ при } r=R,$$

то она будет больше нуля при $r>R$. Если

$$\frac{dz}{dr}<0, \text{ при } r=R,$$

то, в интервале (R, ∞) она меняет знак с отрицательного на положительный только один раз.

Формулы (22) и (20) дают

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)_{r=R}=D\left[\frac{3}{2}R^6+\frac{(4R-D)\,R^7}{4(R\cos\psi+h)^2}\right]+\left[5\,(R\cos\psi+h)^2-R^3\right]\frac{R^7}{(R\cos\psi+h)^2}.$$

Так как h малая величина и $\cos\psi > 0{,}5$, то можно предположить, что

$$5(R\cos\psi + h)^2 - R^2 \geqq 0. \tag{23}$$

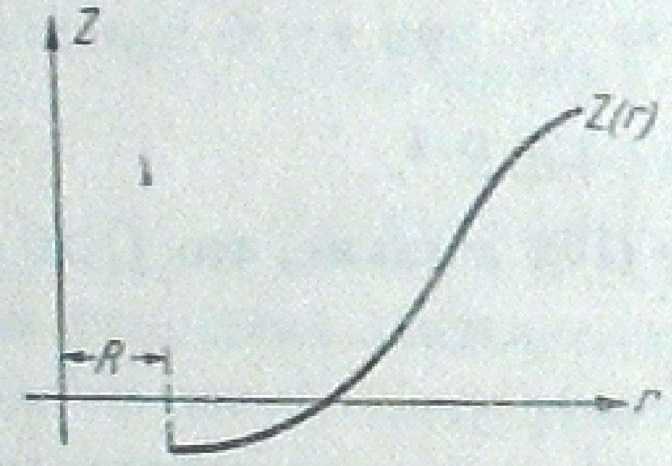
На основе этого и (21) имеем:

$$\text{если } D \geqq 0, \text{ то } \left(\frac{dz}{dr}\right)_{r=R} \geqq 0. \tag{24}$$

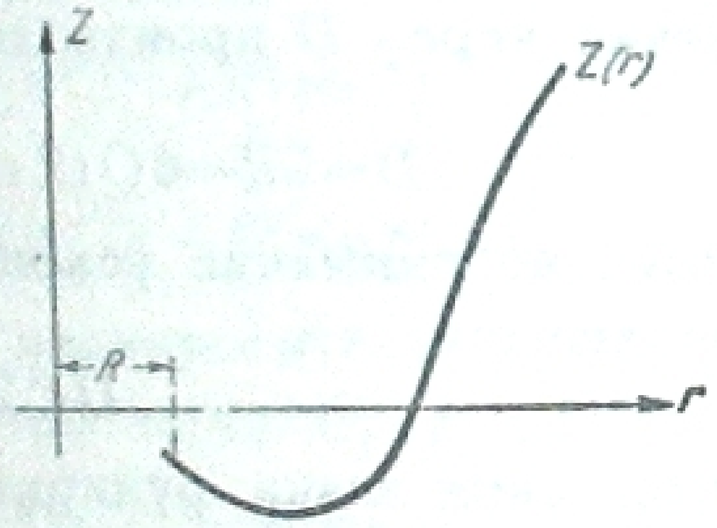
Теперь обратимся к формуле (18) и рассмотрим два случая:

Случай I: $D \geqq 0$. На основе (24) и (22) заключаем, что в этом случае при $r > R$ производная $\frac{dU}{dr}$ имеет положительное значение.

Случай II: $D < 0$. Здесь представятся два подслучая: 1) $\frac{dz}{dr} \geqq 0$ при $r=R$, тогда функция $z(r)$ возрастает (черт. 1а); 2) $\frac{dz}{dr} < 0$ при $r=R$, тогда функция $z(r)$ сперва убывает, а потом возрастает, притом имеет единственный минимум (черт. 1б). Отсюда заключаем, что в обоих подслучаях функция $z(r)$ и производная $\frac{dU}{dr}$ меняют знак с отрицательного на положительный только один раз.



Черт. 1 а ნახ.



Черт. 1 б ნახ.

Таким образом, поведение функции $U(r)$ характеризуется знаком величины D следующим образом:

если $D \geqq 0$	Функция $U(r)$ возрастает
если $D < 0$	Функция $U(r)$ сперва убывает, а потом возрастает, при том имеет единственный минимум

(25)

Так меняется функция $U(r)$ при $r > R$ и при условиях (23), (21) и (15). Если эти условия не выполняются, тогда поведение функции $U(r)$ будет иное. На практике эти условия всегда выполняются и потому ограничимся здесь этим. Переходим к исследованию вопроса о числе решений уравнений Лагранжа.

Число решений уравнений Лагранжа. Как было сказано, уравнения Лагранжа имеют столько же решений, сколько раз обращается в нуль функция $U(r)$. В данном случае, большое значение имеет знак функции при $r=R$.

Из (17) и (12) имеем

$$U(R) = -h\,(2R\cos\psi + h). \tag{26}$$

Отсюда ясно, что величины $U(R)$ и h имеют взаимно обратные знаки. Рассмотрим в отдельности три случая.

Случай I:

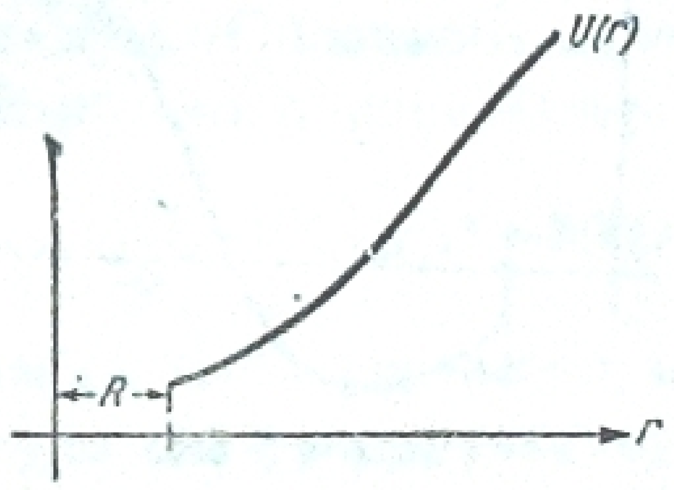
$$h < 0.$$

Здесь $U(R)$ положительная величина, но надо рассмотреть два подслучая:

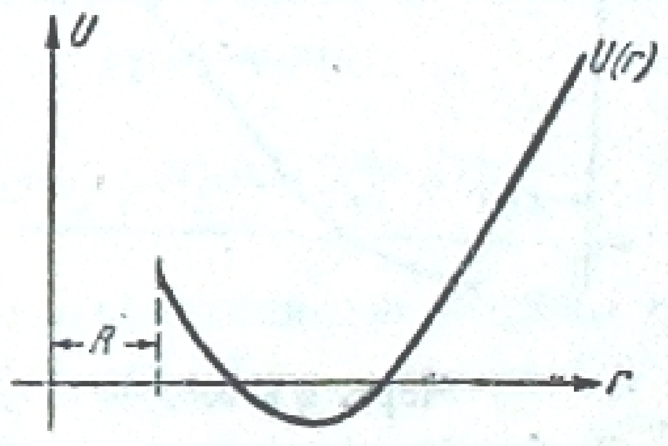
Первый, когда

$$D \geqq 0;$$

при этом условии функция U будет всегда больше нуля и уравнения Лагранжа не имеют решения (черт. 2а).



Черт. 2 а ნახ.



Черт. 2 б ნახ.

Второй подслучай:

$$D < 0.$$

Тогда согласно (25) функция $U(r)$ имеет один минимум. Если в этой точке функция U положительна, то решения нет, если же отрицательна, то имеются два решения (черт. 2б). К этому случаю мы вернемся позже.

Случай II:

$$h = 0.$$

На основании (26) имеем $U(R) = 0$. Здесь тоже надо рассмотреть два подслучая.

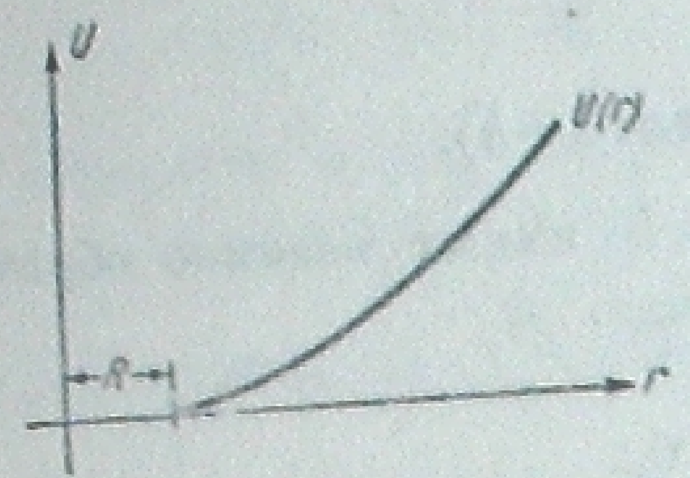
Первый, когда

$$D \geqq 0;$$

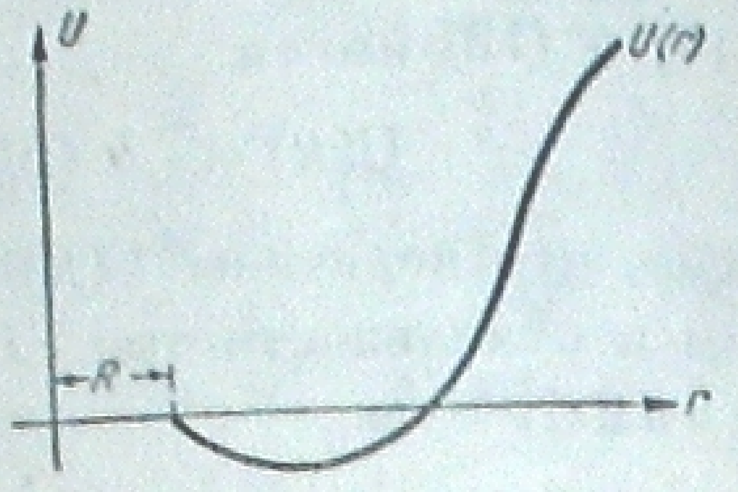
при этих условиях уравнения Лагранжа не имеют решений, отличных от $r=R$ (черт. 3а).

Второй подслучай: $D<0$;

тогда уравнения Лагранжа имеют одно решение (черт. 3б).



Черт. 3а ბაბ.

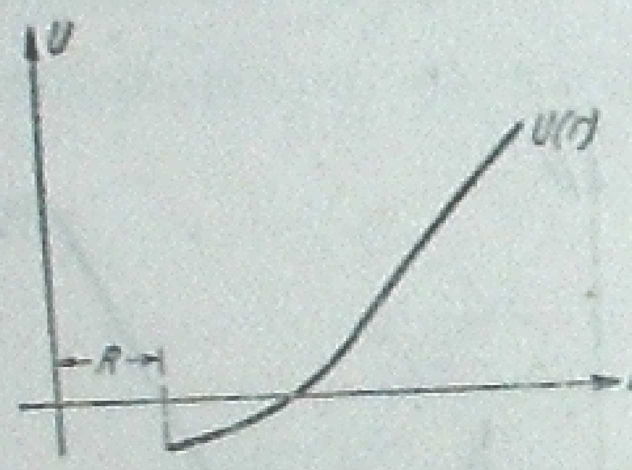


Черт. 3б ბაბ.

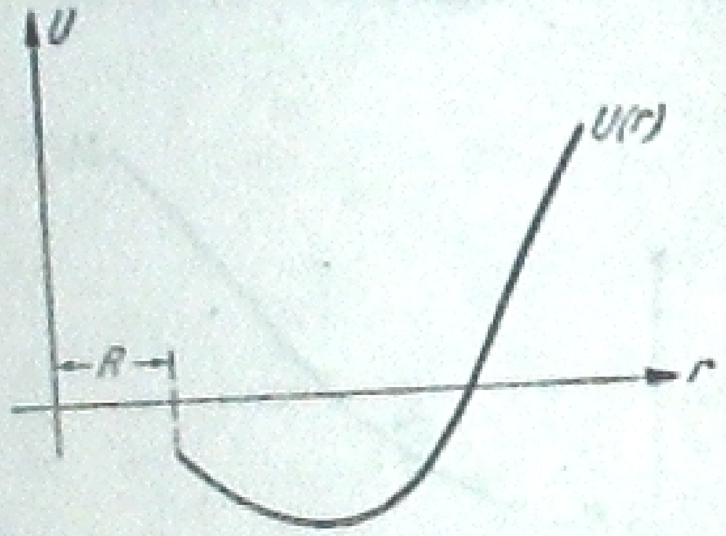
Случай III:

$$h>0.$$

На основании (26) имеем $U(R)<0$. Здесь, независимо от знака D, функция $U(r)$ обращается в нуль только один раз (черт. 4а и черт. 4б).



Черт. 4а ბაბ.



Черт. 4б ბაბ.

Сопоставляя полученные результаты, окончательно приходим к такому выводу. Число решений уравнений Лагранжа зависит от знаков h и D следующим образом:

	$h<0$	$h=0$	$h>0$	
$D\geqq 0$	нет решения	нет решения	одно решение	(27)
$D<0$	или нет или два решения	одно решение	одно решение	

Эти результаты получены при следующих предположениях:

$$\begin{gathered} r>R\approx 1, \\ \psi<60^\circ \text{ или } \cos\psi>0{,}5, \\ 5\,(R\cos\psi+h)^2-R^2\geqq 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Для полного выяснения вопроса о числе решений уравнений Лагранжа надо еще рассмотреть подробнее случай, когда h и D оба отрицательны.

Если условия (28) не выполнены, то уравнения Лагранжа могут иметь даже три решения. Пусть, напр., дано:

$$P=2.01,\quad R=1,$$
$$Q=2.0,\quad \cos\psi=0.1,$$

тогда уравнение $U=0$ имеет вид:

$$r^2-(2{,}11-2r^{-3})^2-0{,}99=0. \tag{29}$$

Здесь

$$h=+0{,}01 \text{ и } D=+0{,}68$$

и по схеме (27) должно быть одно решение. Нетрудно проверить, что уравнение (29) и, следовательно, соответствующие уравнения Лагранжа имеют три решения:

$$\begin{aligned} r_1&=1.00\,38, & \rho_1&=0.03\,26 \\ r_2&=1.01\,91, & \rho_2&=0.12\,03 \\ r_3&=2.15\,34, & \rho_3&=1.80\,97 \end{aligned} \tag{29a}$$

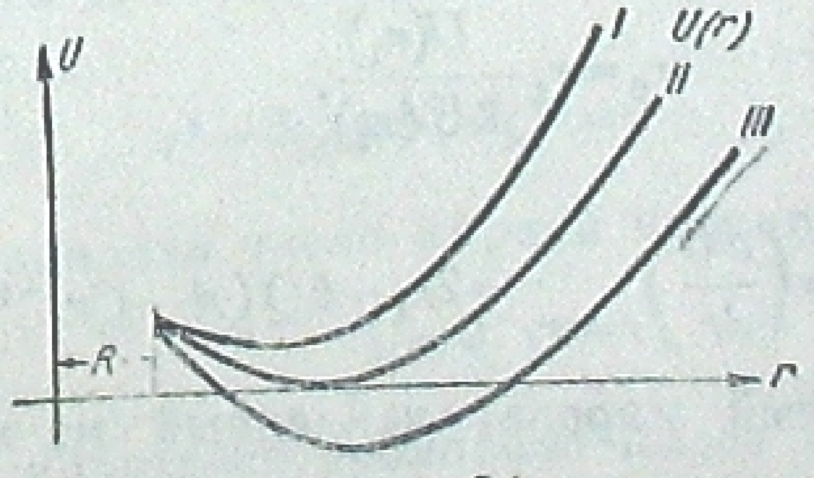
Случай, когда $h<0$ и $D<0$. Из схемы (27) видно, что в этом случае уравнения Лагранжа или вовсе не имеют решений, или же имеют два решения. При этих условиях (25) функция $U(r)$ имеет один минимум. Обозначим значение аргумента в точке минимума через r_0. Ясно, что r_0 определяется из уравнения:

$$\frac{dU}{dr}=0 \text{ или } r^8-3Q\,(R\cos\psi+P)r^3+3Q^2=0. \tag{30}$$

Решение этого уравнения дает единственный корень $r_0>R$. Соответствующее значение функции $U(r)$ обозначим через U_0.

Так как в данном случае $h<0$, то значения функции $U(r)$ на концах рассматриваемого промежутка положительны. Поэтому вопрос о числе корней уравнения $U=0$ решается по знаку U_0, т. е. по знаку функции $U(r)$ в точке минимума. Ясно, что здесь могут иметь место три подслучая.

I $U_0>0$—нет вещественного решения.
II $U_0=0$—имеется двукратное решение $r=r_0$. (31)
III $U_0<0$— имеются два различных решения (черт. 5).



Черт. 5 ბაბ.

В третьем случае корни r_1 и r_2 уравнения $U=0$ распределены так:

$$r_1<r_0<r_2.$$

Если бы удалось решить уравнение (30) и этим самым вычислить значение U_0 для общего случая, тогда наша задача была бы решена. Но, к сожалению, уравнение (30) в общем случае решить не удается.

Способ решения уравнений Лагранжа. По данным величинам P, Q, R и $\cos\psi$ сперва вычисляем A и S^2 по формулам:

$$A=R\cos\psi+P,$$
$$S^2=R^2\sin^2\psi=R^2(1-\cos^2\psi),$$

и составляем функцию $U(r)$:

$$U=r^2-(A-Qr^{-3})^2-S^2. \tag{32}$$

Ищем решения уравнения $U=0$. Вычисляем h и D по формулам:

$$h=P-Qr^{-3},$$
$$D=2R-6Q(R\cos\psi+h)R^{-4}.$$

Затем проверяем необходимое условие:

$$5(R\cos\psi+h)^2\geqq R^2$$

и по схеме (27) устанавливаем число решений:

	$h<0$	$h=0$	$h>0$
$D\geqq 0$	нет решения	нет решения	одно решение
$D<0$	или нет или два решения	одно решение	одно решение

(33)

Случай единственного решения. Приближенные значения Qr^{-3} и r^2 находим из таблицы I. Эта таблица величин Qr^{-3} и r^2 составлена нами в предположении, что

$$P=Q \text{ и } R=1, \text{ (следовательно } h=0).$$

Подставим значения Qr^{-3} и r^2 в (32) и вычислим U, абсолютное значение которого покажет, насколько ошибочны табличные величины. После этого уточняем корень r по формуле Ньютона.

$$r_2=r_1-\frac{U(r_1)}{U'(r_1)},$$

где

$$U'(r_1)=\left(\frac{dU}{dr}\right)_{r=r_1}=2r_1-6Q(A-Qr_1^{-3})r_1^{-4}.$$

Здесь r_1, приближенный корень, найденный из таблицы, и r_2 — более точный корень.

Если $U'(r_1)$ близко к нулю, то нужно применить способ линейного интерполирования

$$r_3=r_2-\frac{r_2-r_1}{U_2-U_1}U_2=r_1-\frac{r_2-r_1}{U_2-U_1}U_1.$$

Таблица I ცხრილი

cos ψ / P	1,0		0,9		0,8		0,7		0,6		0,5	
	Qr^{-3}	r^2	Qr^{-3}	r^2	Qr^{-3}	r^2	Qr^{-3}	r^2	Qr^{-3}	r^2	Qr^{-3}	r^2
0.4	0.303	1.2	0.350	1.1	0.400	1 0	—	—	—	—	—	—
.5	.266	1.5	.307	1.4	.352	1.3	0.453	1.1	—	—	—	—
.6	.237	1.9	.271	1.7	.311	1.5	.379	1.3	0.498	1.1	—	—
.7	.213	2 2	.241	2.0	.277	1.8	.325	1.7	.403	1.4	0.571	1.1
.8	.193	2.6	.217	2.4	.247	2.2	.287	2.0	.345	1.7	.438	1.5
.9	.175	3.0	.196	2.8	.221	2.5	.256	2.3	.300	2.1	.368	1.8
1.0	.161	3.4	.178	3.2	.201	2.9	.229	2.7	.269	2.4	.318	2.1
1.1	.148	3.8	.163	3.6	.183	3.3	.206	3 0	238	2.8	.280	2.5
1.2	.137	4.3	.151	4.0	.168	3.6	.188	3.4	.214	3.2	.248	2.9
1.3	.127	4.7	.139	4.4	.154	4.0	.172	3 8	.194	3.6	.223	3.2
1.4	.118	5 2	.129	4.9	.142	4.5	.158	4.3	.178	4.0	.202	3.6
1.5	.110	5.7	.120	5.4	.132	5.0	.146	4.7	.163	4.4	.184	4.0
1.6	.103	6 2	.112	5.9	.123	5.5	.135	5 2	.150	4.8	.169	4 5
1.7	.096	6.8	.105	6.4	.115	6.0	.126	5.7	.139	5.3	.155	4.9
1.8	.090	7.3	.098	7.0	.107	6.5	.117	6.2	.128	5.8	.143	5.4
1.9	.085	7.9	.092	7.5	.100	7.1	.110	6 7	.120	6.3	.133	5.9
2.0	.080	8.5	.087	8.1	.094	7.7	.103	7 3	.112	6.9	.124	6.4
2.1	.076	9.1	.082	8.7	.088	8.3	.096	7 8	.105	7.4	.115	6.9
2.2	.072	9.8	.077	9.3	.083	8.9	090	8.4	.098	7.9	.108	7.5
2.3	.068	10.4	.073	10.0	.079	9.6	.085	9.0	.092	8.5	.101	8.0
2.4	.065	11.1	.069	10.6	.074	10.2	.080	9.6	.087	9.1	.095	8.6
2.5	.062	11.8	.066	11.3	.071	10.8	.076	10.3	.082	9.7	.089	9.2
2.6	.959	12.5	.063	12.0	.067	11.5	.072	10.9	.078	10.4	.084	9.8
2.7	.056	13.3	.059	12.7	.064	12.2	.068	11.6	.074	11.0	.080	10.5
2.8	.053	14.0	.057	13.5	.060	12.9	.065	12.3	.070	11.7	.075	11.2
2.9	.051	14.8	.054	14.2	.058	13 6	.062	13.0	.066	12.4	.071	11.8
3 0	.049	15.6	.052	15.0	.055	14.4	.659	13.8	.063	13.2	.068	12.5
3.1	.047	16.4	.049	15.8	.053	15.2	.056	14.5	.060	13.9	.064	13.3
3.2	.045	17.3	.047	16.6	.050	16.0	.053	14.3	057	14.6	.c61	14.0
3.3	.043	18.1	.045	17.5	.048	16.8	.051	16.1	.054	15.4	.058	14.8
3.4	.041	19.0	.044	18.3	.046	17.6	.049	16.9	.052	16.2	.055	15.5
3.5	.039	19.9	.042	19.2	.044	18.5	.047	17.8	.050	17.0	.053	16.3
3.6	.038	20.8	'040	20.1	.042	19 3	.045	18.6	.048	17.9	.051	17.1

Случай $h<0$ и $D<0$. Здесь надо найти корень уравнения (30), который имеет вид:

$$r^8-3QAr^3+3Q^2=0$$

и по схеме (31) установить число корней уравнения:

$$U=0.$$

Если окажется, что последнее уравнение имеет два корня, то их можно искать следующим образом.

Первый корень близок к R и он приближенно равен (по формуле Ньютона):

$$r_1 = R - \frac{U(R)}{D} = R + \frac{h\,(2R\cos\psi + h)}{2R - 6Q\,(R\cos\psi + h)\,R^{-4}}.$$

Второй корень приближенно находим из таблицы, как в случае единственного решения. После этого оба корня будем уточнять или по формуле Ньютона, или же по способу линейного интерполирования.

В случае $h<0$ и $D<0$ чаще всего на практике нет надобности решать уравнение (30), можно прямо искать первый корень

$$r_1 = R - \frac{U(R)}{D}.$$

Если первый корень найден, или же будет установлено, что для какого-нибудь значения $r>R$ функция $U(r)$ отрицательна, то вопрос решен: уравнение $U=0$ имеет два корня.

Разъясним теперь на примерах применение полученных нами результатов.

Первый пример: Пусть требуется решить систему:

$$\rho = 1.9328 - 1.9653\,r^{-3},$$
$$r^2 = (\rho + 0.966552)^2 + 0.098758$$

(М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. I, стр. 191, 1941 г.).

Так как здесь

$$h = +0.06,$$

то имеется одно решение. Из таблицы находим:

$$Qr^{-3} = 0.086, \quad r^2 = 8.0.$$

После этого вычисления можно расположить следующим образом:

Первое приближ.	Второе приближ.	Третье приближ.
$r=2.828$,	2.830000,	2.830158,
$r^3=$	22.665187,	22.668983,
$A=2.899$,	2.899352,	2.899352,
$Qr^{-3}=0.086$ (табл.),	0.086710,	0.086696,
$A-Qr^{-3}=2.813$,	2.812642,	2.812656,
$S^2=0.099$,	0.098758,	0.098758,
$(A-Qr^{-3})^2=7.913$,	7.910956,	7.911030.
$(A-Qr^{-3})^2+S^2=8.012$,	8.009714,	8.009788,
$r^2=8.0$,	8.008900,	8.009794,
$U=-0.012$,	-0.000814,	$+0.000006$.
Формула Ньютона: $U'=+5.1$,	$+5.143$,	
$\Delta r=+0.002$,	$+0.000158$,	

В третьем столбце значение U в пределах точности шестизначного вычисления можно считать равным нулю. Итак, окончательно:

$$r = 2.830158, \quad \rho = 1.846105.$$

Второй пример.

Дано: $P=1.9132$, $\cos\psi=0.871321$,
$Q=2.0071$, $R=0.981321$.

Так как здесь: $h=-0.210708$, $D=-6.405$,

то могут быть два решения.

Составляем функции $U(r)$:

$$U = r^2 - (2.768246 - 2.0071\cdot r^{-3}) - 0.231888.$$

Ищем первое решение:

$$r_1 = R - \frac{U(R)}{D} = 1.03,$$

$r=1.03$,	1.025000,	1.025089,
$r^3=.1.093$,	1.076891,	1.077174,
$A=2.768$,	2.768246,	2.768246,
$Qr^{-3}=1.84$,	1.863791,	1.863307,
$A-Qr^{-3}=0.93$,	0.904455,	0.904939,
$S^2=0.232$,	0.231888,	0.231888,
$(A-Qr^{-3})^2=0.865$,	0.818039,	0.818914.
$(A-Qr^{-3})^2+S^2=1.097$,	1.049927,	1.050802,
$r^2=1.061$,	1.050625,	1.050807,
$U=-0.036$,	$+0.000698$,	$+0.000005$,
Формула Ньютона: $U^1=-7.5$,	-7.818,	
$\Delta r=-0.005$,	$+0.000089$.	

Ищем теперь второе решение.

Из таблицы находим:

$$Qr^{-3} = 0.089, \quad r^2 = 8.0.$$

$r=2.828$,	2.710000,	2.710582,
$r^3=$	19.902511,	19.915337,
$A=2.768$,	2.768246,	2.768246,
$Qr^{-3}=0.089$,	0.100846,	0.100782,
$A-Qr^{-3}=2.679$,	2.667400,	2.667464,
$S^2=0.232$,	0.231888,	0.231888,
$(AQr^{-3})^2=7.177$,	7.115023,	7.115364.
$(A-Qr^{-3})^2+S^2=7.409$,	7.346911,	7.347252,
$r^2=8.0$,	7.344100,	7.347255,
$U=+0.591$,	-0.002811,	$+0.000003$.
Формула Ньютона: $U^1=+5$,	$+4.825$,	
$\Delta r=-0.118$,	$+0.000582$,	

Итак:

Первое решение: $r_{I} = 1.025089$, $\rho_{I} = 0.049893$,

Второе решение: $r_{II} = 2.710582$, $\rho_{II} = 1.812418$.

В заключение считаю приятным долгом выразить искреннюю признательность чл.-корр. АН СССР, проф. М. Ф. Субботину за ценные советы и директору Абастуманской астрофизической обсерватории Е. К. Харадзе—за содействие осуществлению данного исследования.

Октябрь, 1948.

ЛИТЕРАТУРА—ლიტერატურა:

1. Mem. de l'Acad. des Sc. Berlin, Oeuvres, vol. IV, 1778.
2. Gauss C. F., Theoria motus corporum coelestium etc, 1809.
3. Laplace P. S., Traité de Mécanique Céleste, t. I, 1799.
4. M. N. 71, 1911.
5. Уч. Зап. Ленингр. Гос. Универс. № 27, вып. 5.
6. М. Ф. Субботин. Курс небесной механики, т. I, стр. 189, 1941.

სამი დაკვირვებით ორბიტის განსაზღვრის მეთოდში ლაგრანჟის განტოლებათა გამოკვლევის საკითხისათვის

ა. ფურცხვანიძე

(რეზიუმე)

ერთიმეორესთან ახლო მდებარე სამი დაკვირვების საფუძველზე ორბიტის გამოთვლის საქმეში ძირითად სიძნელეს ლაგრანჟის განტოლებათა ამოხსნა წარმოადგენს. როგორც ცნობილია, ამ განტოლებებს, რომელნიც გეოცენტრულ მანძილს გვაძლევენ შუა დაკვირვების მომენტისთვის, ყოველთვის არა აქვთ ამოხსნა და ასეთ შემთხვევაში შეუძლებელი ხდება ორბიტის განსაზღვრა მოცემულ დაკვირვებათა საფუძველზე.

ბქამდე არ არსებობს ზუსტად ჩამოყალიბებული კრიტერიუმი, რომლის მიხედვითაც შეიძლებოდეს ლაგრანჟის განტოლებათა ფესვების რაოდენობის წინასწარი განსაზღვრა.

ავტორი გამოიკვლევს განტოლებათა
გადმოცემს განტოლებათა ფესვების რაოდენობის საკითხს და
ამ დარგში მნიშვნელოვანი შედეგები ჰქონდათ მიღებული ლაგრანჟს[1],
გაუსს[2], ლაპლასს[3], შარლიეს[4] და რუს ასტრონომს მ. ვილიევს[5],
მაგრამ მათი გამოკვლევები ეხებოდა ზოგად შემთხვევას, რაც დიდ სიძნელეებს
იწვევდა გამოკვლევაში და შეუძლებელს ხდიდა უკანასკნელის ბოლომდე
მიყვანას.
ამოხსნის მარტივ ხერხს.

მოცემული ამოცანა ამ ნაშრომში გადაწყვეტილია კერძო შემთხვევისთვის, რომელიც ასტეროიდების ორბიტების გამოთვლისათვის გამოიყენება. გარკვეული პირობებისთვის ლაგრანჟის განტოლებათა გამოკვლევა შესაძლებელი უფრო ზუსტი ფორმით, ვიდრე ეს აქამდე იყო.

(1) წარმოადგენს ლაგრანჟის განტოლებათა იმ სახეს, როგორც ისინი მოჰყავთ ციური მექანიკის კურსებში[6]. მათ შეიძლება მიეცეს (14) სახე. აქ უცნობებია ცთომილის გეოცენტრული და ჰელიოცენტრული მანძილები ρ და r. ჩვეულებრივ, ლაგრანჟის განტოლებებს ამარტივებენ და ისე გამოიკვლევენ. ჩვენ ვიკვლევთ უშუალოდ (14) სისტემას.

(15)—პირობების შემოღებით, რაც სამართლიანია უმრავლეს შემთხვევაში, (14)-ის გარდაქმნით ვღებულობთ (17)-ს. უკანასკნელით გამოხატული U ფუნქცია განიხილება როგორც r ცვლადის ფუნქცია. თუ იგი ნულად იქცევა, მაშინ r ლაგრანჟის განტოლებათა ფესვი ყოფილა. ამგვარად, ლაგრანჟის განტოლებათა სისტემის ამოხსნა დაიყვანება r-ის იმ მნიშვნელობათა მოძებნაზე, რომელთათვის $U(r)$ ნულს უტოლდება.

რიგ გარდაქმნათა შემდეგ ვღებულობთ $U(r)$ ფუნქციის ძირითად თვისებებს, რომლებიც (25)-ის სახით დაიწერება, სადაც D U-ს წარმოებულია და (20)-ით არის გამოხატული.

(12) და (17) გვაძლევს (26)-ს. აქედან (იხ. აგრეთვე ნახაზები 2а, 2б, 3а, 3б, 4а, 4б) გამომდინარეობს, რომ ლაგრანჟის განტოლებათა ამოხსნის რიცხვი დამოკიდებულია h და D სიდიდეების ნიშანზე და ეს დამოკიდებულება (27)-ით გამოიხატება. ამავე დროს მოითხოვება, რომ შესრულებული იყოს (28) პირობები. თუ ეს ასე არ არის, მაშინ განტოლებათა სისტემას შეიძლება სამი ფესვიც ჰქონდეს (მაგ., (29), (29а)).

როცა h და D უარყოფითი სიდიდეებია, უნდა გამოვითვალოთ $U(r)$-ის მნიშვნელობა მინიმუმში (U_0). განტოლებათა ამოხსნის რიცხვის შესახებ გვექნება (31) შემთხვევები (იხ. აგრეთვე ნახ. 5).

ავტორს მოჰყავს ლაგრანჟის განტოლებათა ამოხსნის ხერხი, შეადგენს ფუნქციას $U(r)$ (32), დაადგენს ამოხსნათა რიცხვს—(33) და განიხილავს ცალ-ცალკე შემთხვევებს: 1) ერთადერთი ამოხსნისა და 2) ორი ფესვის არსებობისა. სიდიდეებისათვის Qr^{-3} და r^{3} შედგენილია ცხრილი I.

დასასრულ, საილუსტრაციოდ მოყვანილია მაგალითები, რომლებშიაც გამოყენებულია მიღებული შედეგები.

ოქტომბერი, 1948.