

О ДВИЖЕНИИ КОСМИЧЕСКОГО ТЕЛА С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ ПРИ ПОЛЕТЕ К ВЕНЕРЕ

Н. Г. МАГНАРАДЗЕ

Введение. Как хорошо известно, задача попадания космического тела в планету или прохождения вблизи нее и определения соответствующей траектории является одной из граничных задач для системы дифференциальных уравнений небесной механики. Но, к сожалению, в виду сложности этой системы, упомянутую граничную задачу невозможно решить эффективно. Поэтому для расчета траектории приходится пользоваться приближенными методами решения упомянутой граничной задачи (метод последовательных приближений, методы численного интегрирования и т. д.).

В настоящей работе мы исследуем движение космического тела с переменной массой при полете к Венере в поле притяжений Солнца, Земли, Венеры и Юпитера.

Массу космического тела мы будем считать аналитической функцией (определенного класса) от времени t , принимающей настолько малые значения, что упомянутые небесные тела не подвергаются притяжению тела.

Предполагается, что Юпитер движется по круговой орбите вокруг Солнца.

Для координат космического тела мы строим степенные ряды по времени и доказываем их сходимость для достаточно малого промежутка времени при произвольных конечных начальных значениях координат и компонент скорости тела.

Для определения коэффициентов разложений неизвестных величин, нам удалось построить рекуррентные соотношения, достаточно удобные для их вычисления современными вычислительными машинами. При этом мы пользуемся одной схемой, являющейся обобщением схемы, недавно предложенной Стеффенсепом для решения ограниченной задачи трех тел с постоянными массами и нашедшей дальнейшее развитие и применение в наших работах.

Наконец, устанавливаем оценки погрешностей, которые получаются, когда мы ограничиваемся несколькими первыми членами упомянутых степенных рядов.

В следующей работе мы остановимся на выборе оптимальных начальных данных, обеспечивающих попадание космического тела в Венеру или прохождение вблизи нее.

1. Основная система дифференциальных уравнений. В основу нашего исследования мы положим известные уравнения И. В. Мещерского для движения тела переменной массы. Пользуясь этими уравнениями, можно показать, что основная система диф-

дифференциальных уравнений движения относительно некоторой абсолютной системы координат $\Omega\xi\eta\zeta$ имеет вид:

$$\frac{d^2\vec{\rho}_i}{dt^2} - \lambda_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \sum_{j=0}^4 k_0^2 m_j \frac{\vec{\rho}_{ij}}{\vec{\rho}_{ij}^3}, \quad (1)$$

где m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 обозначают массы, соответственно, Солнца, космического тела, Земли, Венеры и Юпитера,

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_1(t), & i=1 \\ 0, & i=0, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$\vec{\rho}_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ — радиус-вектор точки (ξ_i, η_i, ζ_i) ,
 $i=0, 1, 2, 3, 4$,

$$\vec{\rho}_{ij} = \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i,$$

$$\rho'_{ij} = |\vec{\rho}_{ij}| = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2},$$

k_0^2 — универсальная постоянная притяжения, а символ $\sum_{j=0}^4''$ означает знак суммирования, в котором пропущены члены, соответствующие $j=i$ и $j=1$.

В дальнейшем, для общности результатов и симметрии в формулах, мы будем считать, что $\lambda_i(t) \neq 0, i=0, 1, 2, 3, 4$.

Теперь введем относительную систему координат $Oxyz$, начало которой O поместим в центре Солнца.

Имеем

$$\vec{r}_{oi} = \vec{\rho}_i - \vec{\rho}_o, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}_{oj} - \vec{r}_{oi}.$$

Основная система дифференциальных уравнений в этой относительной системе координат имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}_{oi}}{dt^2} - \lambda_i \frac{d\vec{r}_{oi}}{dt} + (\lambda_o - \lambda_i) \frac{d\vec{\rho}_o}{dt} = -k_0^2 m_0 \frac{\vec{r}_{oi}}{\vec{r}_{oi}^3} + \\ + \sum_{j=2}^4 k_0^2 m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{\vec{r}_{ij}^3} - \sum_{j=2}^4 k_0^2 m_j \frac{\vec{r}_{oj}}{\vec{r}_{oj}^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $\sum_{j=2}^4''$ означает знак суммирования, в котором пропущен член при $j=i$.

2. Преобразованные основные уравнения. Положим

$$\frac{1}{r_{ij}^3} = u_{ij} \quad (i \neq j).$$

Тогда основная система получит вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}_{oi}}{dt^2} - \lambda_i \frac{d\vec{r}_{oi}}{dt} = -k_0^2 m_0 u_{oi} \vec{r}_{oi} + \sum_{j=2}^4 k_0^2 m_j u_{ij} (\vec{r}_{oj} - \vec{r}_{oi}) - \\ - \sum_{j=2}^3 k_0^2 m_j u_{oj} \vec{r}_{oj} - k_0^2 m_4 u_{o4} \vec{r}_{o4} + (\lambda_i - \lambda_o) \frac{d\vec{\rho}_o}{dt}, \\ \vec{r}_{ij} \frac{du_{ij}}{dt} + 3u_{ij} \frac{dr_{ij}}{dt} = 0, \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$r_j^2 = |\vec{r}_{oj} - \vec{r}_{oi}|^2, \quad (i \neq j) \quad (4)$$

Неизвестными в системе (3) являются

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{o1}, \vec{r}_{o2}, \vec{r}_{o3}, r_{o1}, r_{o2}, r_{o3}, \vec{r}_{12}, \vec{r}_{13}, \vec{r}_{14}, \vec{r}_{23}, \vec{r}_{24}, \vec{r}_{34}, \\ u_{o1}, u_{e2}, u_{e3}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{34} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Пусть при $t=0$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{oi}(0) = \vec{r}_{oi}^0, & \quad \vec{r}'_{oi}(0) = \vec{r}'_{oi}^0 \\ r_{ij}(0) = r_{ij}^0 > 0, & \quad u_{ij}(0) = u_{ij}^0 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Требуется определить величины (ξ) так, чтобы удовлетворялись дифференциальные уравнения (3), когечные уравнения (4) и начальные условия (6).

3. Основные рекуррентные равенства. Пусть

$$\lambda_i = \lambda_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i^{(n)} t^n, \quad i=0, 1, 2, 3, 4, \quad (7)$$

$$\frac{\vec{r}_{o4}}{r_{o4}^3} = u_{o4} \vec{r}_{o4} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{g}_n t^n, \quad (8)$$

$$\left| \lambda_i^{(n)} \right| < \frac{\Lambda_i H_0^n}{n(n+1)}, \quad \vec{g}_n = (a_n, b_n, c_n), \\ |a_n| < \frac{a H_0^n}{n(n+1)}, \quad |b_n| < \frac{b H_0^n}{n(n+1)}, \quad |c_n| < \frac{c H_0^n}{n(n+1)}, \\ n = 1, 2, \dots$$

$$\vec{\rho}_o = \vec{\rho}_o(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\rho}_o^{(n)} t^n, \quad (9)$$

$$\vec{\rho}_o = (\xi_o, \eta_o, \zeta_o), \quad \vec{\rho}_o^{(n)} = (\xi_o^{(n)}, \eta_o^{(n)}, \zeta_o^{(n)}), \\ |\xi_o^{(n)}| < \frac{\alpha_o H_0^n}{n(n+1)}, \quad |\eta_o^{(n)}| < \frac{\beta_o H_0^n}{n(n+1)}, \quad |\zeta_o^{(n)}| < \frac{\gamma_o H_0^n}{n(n+1)}, \\ n = 1, 2, \dots$$

$$\vec{r}_{oi} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{r}_{oi}^{(n)} t^n, \quad (10)$$

$$\vec{r}_{oi} = (x_{oi}, y_{oi}, z_{oi}), \quad \vec{r}_{oi}^{(n)} = (x_{oi}^{(n)}, y_{oi}^{(n)}, z_{oi}^{(n)})$$

$$|x_{oi}^{(n)}| < \frac{A_i H^n}{n(n+1)}, \quad |y_{oi}^{(n)}| < \frac{B_i H^n}{n(n+1)}, \quad |z_{oi}^{(n)}| < \frac{C_i H^n}{n(n+1)}, \quad (11)$$

$n = 1, 2, \dots$

$$r_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} r_{ij}^{(n)} t^n \quad (12)$$

$$|r_{ij}^{(n)}| < D_{ij} \frac{H^n}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$u_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{ij}^{(n)} t^n, \quad (14)$$

$$|u_{ij}^{(n)}| < E_{ij} \frac{H^n}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

В этих формулах $\Lambda_i, H_o, a, b, c, \alpha_o, \beta_o, \gamma_o$ — известные положительные постоянные. $A_i, B_i, C_i, D_{ij}, E_{ij}$ и H — неизвестные постоянные, которые нужно подобрать так, чтобы неравенства (11), (13), (15) имели место для всех $n = 1, 2, \dots$.

Очевидно, ряды (7), (8), (9) сходятся при $0 < t < \frac{1}{H_o}$, ибо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n H_o^n}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Подставляя ряды (10), (12), и (14) в уравнения (3) и (4), получим следующие рекуррентные соотношения между искомыми коэффициентами:

$$(n+2)(n+1)\vec{r}_{oi}^{(n+2)} = \sum_{j=1}^4 \sum_{v=1}^{n-1} k_0^2 m_j u_{ij}^{(v)} (\vec{r}_{oj}^{(n-v)} - \vec{r}_{oi}^{(n-v)}) -$$

$$- \sum_{j=1}^3 \sum_{v=1}^{n-1} k_0^2 m_j u_{oj}^{(v)} \vec{r}_{oj}^{(n-v)} - \sum_{v=1}^{n-1} k_0^2 m_o u_{oi}^{(v)} \vec{r}_{oi}^{(n-v)} +$$

$$+ \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_i^{(n-v)} (v+1) \vec{r}_{oi}^{(v+1)} - \sum_{v=1}^{n-1} (\lambda_o^{(n-v)} - \lambda_i^{(n-v)}) (v+1) \vec{p}_o^{(v+1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j [u_{ij}^{(0)} (\vec{r}_{oj}^{(n)} - \vec{r}_{oi}^{(n)}) + u_{ij}^{(n)} (\vec{r}_{oj}^{(0)} - \vec{r}_{oi}^{(0)})] - \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} & - \sum_{j=1}^3 k_0^2 m_j (u_{oj}^{(0)} \vec{r}_{oj}^{(n)} + u_{oj}^{(n)} \vec{r}_{oj}^{(0)}) - k_0^2 m_o (u_{oi}^{(0)} \vec{r}_{oi}^{(n)} + u_{oi}^{(n)} \vec{r}_{oi}^{(0)}) - \\ & - k_0^2 m_4 \vec{g}_n + [\lambda_i^{(n)} \vec{r}_{oi}^{(1)} + \lambda_o^{(0)} (n+1) \vec{r}_{oi}^{(n+1)}] - \\ & - [(\lambda_o^{(n)} - \lambda_i^{(n)}) \vec{p}_o^{(1)} + (\lambda_o^{(0)} - \lambda_i^{(0)}) (n+1) \vec{p}_o^{(n+1)}] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$\left. \begin{aligned} (n+1) u_{ij}^{(n+1)} \vec{r}_{ij}^{(0)} &= - \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) u_{ij}^{(v+1)} \vec{r}_{ij}^{(n-v)} - 3 \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) \vec{r}_{ij}^{(v+1)} u_{ij}^{(n-v)} - \\ & - u_{ij}^{(1)} \vec{r}_{ij}^{(n)} - 3 [r_{ij}^{(1)} u_{ij}^{(n)} + (n+1) r_{ij}^{(n+1)} u_{ij}^{(0)}], \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$i \neq j; \quad i, j = 0, 1, 2, 3, 4; \quad n = 0, 1, 2,$

$$\left. \begin{aligned} 2 r_{ij}^{(0)} \vec{r}_{ij}^{(n)} &= - \sum_{v=1}^{n-1} \vec{r}_{ij}^{(v)} r_{ij}^{(n-v)} + \sum_{v=1}^{n-1} (\vec{r}_{oj}^{(v)} - \vec{r}_{oi}^{(v)}, \vec{r}_{oj}^{(n-v)} - \vec{r}_{oi}^{(n-v)}) + \\ & + 2 (\vec{r}_{oi}^{(0)} - \vec{r}_{oi}^{(0)}, \vec{r}_{oj}^{(n)} - \vec{r}_{oi}^{(n)}), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$i \neq j; \quad i, j = 0, 1, 2, 3, 4; \quad n = 1, 2, \dots$

где символ (\vec{u}, \vec{v}) , как обычно, обозначает скалярное произведение векторов \vec{u} и \vec{v} .

4. Вывод основных рекуррентных неравенств. Очевидно, что неравенства (11), (13), (15) для первых нескольких значений индекса удовлетворяются, выбирая число H достаточно большим. Справедливость этих неравенств для любых натуральных n легко устанавливается с помощью принципа полной математической индукции.

Можно показать, что из равенств (16), (17), (18) следует неравенства:

$$\left. \begin{aligned} |x_{oi}^{(n+2)}| &< \frac{(7n+4)H^n}{3^n(n+1)^2(n+2)} \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j E_{ij} (A_i + A_j) + \\ & + \frac{(7n+4)H^n}{3^n(n+1)^2(n+2)^2} \sum_{j=1}^3 k_0^2 m_j E_{oj} A_j + \frac{(7n+4)H^n k_0^2 m_o E_{oi} A_i}{3^n(n+1)^2(n+2)^2} + \\ & + \frac{H^n}{n(n+1)^2(n+2)^2} \left\{ \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j [|u_{ij}^{(0)}|(A_i + A_j) + (|x_{oi}^{(0)}| + |x_{oi}^{(0)}|) E_{ij}] + \right. \\ & \left. + k_0^2 m_o (|u_{oi}^{(0)}| A_i + |x_{oi}^{(0)}| E_{oi}) \right\} + \frac{a H_o^n k_0^2 m_4}{n(n+1)^2(n+2)} + \\ & + \frac{H^{n+1} (40\alpha_i \Lambda_i + 20 A_i \Lambda_i)}{n(n+1)(n+2)} + \frac{H^{n+1} (2\alpha_o \Lambda_i + A_i \Lambda_i)}{2n(n+1)^2(n+2)} + \\ & + \frac{H^{n+1} [|\lambda_i^{(0)}| A_i + \alpha_o (|\lambda_o^{(0)}| + |\lambda_i^{(0)}|)]}{(n+1)^2(n+2)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned}
 |y_{oi}^{(n+2)}| &< \frac{(7n+4)H^n}{3n(n+1)^2(n+2)} \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j E_{ij} (B_i + B_j) + \\
 &+ \frac{(7n+4)H^n}{3n(n+1)^2(n+2)^2} \sum_{i=1}^3 k_0^2 m_j E_{oj} B_j + \frac{(7n+4)H^n k_0^2 m_o E_{oi} B_i}{3n(n+1)^2(n+2)^2} \\
 &+ \frac{H^n}{n(n+1)^2(n+2)^2} \left\{ \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j [|u_{ij}^{(0)}|(B_i + B_j) + (|y_{ij}^{(0)}| + |y_{oi}^{(0)}|) E_{ij}] + \right. \\
 &\quad \left. + k_0^2 m_o (|u_{oi}^{(0)}| B_i + |y_{oi}^{(0)}| E_{oi}) \right\} + \frac{b H_0^n k_0^2 m_4}{n(n+1)^2(n+2)} + \\
 &+ \frac{H^{n+1}(4\beta_i \Lambda_i + 2\alpha B_i \Lambda_i)}{n(n+1)(n+2)} + \frac{H^{n+1}(2\beta_o \Lambda_i + B_i \Lambda_i)}{2n(n+1)^2(n+2)} + \\
 &+ \frac{H^{n+1}(|\lambda_1^{(0)}| B_i + \beta_o (|\lambda_o^{(0)}| + |\lambda_i^{(0)}|))}{(n+1)(n+2)^2}, \\
 \\
 |\zeta_{oi}^{(n+2)}| &< \frac{(7n+4)H^n}{3n(n+1)^2(n+2)} \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j E_{ij} (C_i + C_j) + \\
 &+ \frac{(7n+4)H^n}{3n(n+1)^2(n+2)^2} \sum_{j=1}^3 k_0^2 m_j E_{oj} C_j + \frac{(7n+4)H^n k_0^2 m_o E_{oi} C_i}{3n(n+1)^2(n+2)^2} \\
 &+ \frac{H^n}{n(n+1)^2(n+2)^2} \left\{ \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j [|u_{ij}^{(0)}|(C_i + C_j) + (|\zeta_{ij}^{(0)}| + |\zeta_{oi}^{(0)}|) E_{ij}] + \right. \\
 &\quad \left. + k_0^2 m_o (|u_{oi}^{(0)}| C_i + |\zeta_{oi}^{(0)}| E_{oi}) \right\} + \frac{c H_0^n k_0^2 m_4}{n(n+1)^2(n+2)} + \\
 &+ \frac{H^{n+1}(4\alpha z_i \Lambda_i + 2\alpha C_i \Lambda_i)}{n(n+1)(n+2)} + \frac{H^{n+1}(2\gamma_o \Lambda_i + C_i \Lambda_i)}{2n(n+1)^2(n+2)} + \\
 &+ \frac{H^{n+1}(|\lambda_1^{(0)}| C_i + \gamma_o (|\lambda_o^{(0)}| + |\lambda_i^{(0)}|))}{(n+1)(n+2)^2}, \\
 \\
 |r_{ij}^{(n)}| &< \frac{(7n+4)H^n D_{ij}^2}{6n(n+1)(n+2)r_{ij}^{(0)}} + \\
 &+ \frac{(7n+4)H^n}{6n(n+1)(n+2)r_{ij}^{(0)}} [(A_i + A_j)^2 + (B_i + B_j)^2 (C_i + C_j)^2] + \\
 &+ \frac{H^n}{n(n+1)r_{ij}^{(0)}} [(|x_{oi}^{(0)}| + |x_{oj}^{(0)}|) (A_i + A_j) + (|y_{oi}^{(0)}| + |y_{oj}^{(0)}|) \times \\
 &\times (B_i + B_j) + (|\zeta_{oi}^{(0)}| + |\zeta_{oj}^{(0)}|) (C_i + C_j)],
 \end{aligned} \right\} \quad (20, 21, 22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 |u_{ij}^{(n+1)}| &< \frac{2(9n^2 + 18n + 8)H^{n+1}}{3n(n+1)^2(n+2)r_{ij}^{(0)}} E_{ij} D_{ij} + \\
 &+ \frac{2H^{n+1}}{n(n+1)^2 r_{ij}^{(0)}} E_{ij} D_{ij} + \\
 &+ \frac{3H^{n+1} |u_{ij}^{(0)}|}{(n+1)(n+2)r_{ij}^{(0)}} D_{ij}.
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

5. Вывод основных неравенств для коэффициентов $A_i, B_i, C_i, D_{ij}, E_{ij}$. Для доказательства справедливости неравенств (11), (13), (15) при любом натуральном n , следует доказать существование положительных постоянных $H, A_i, B_i, C_i, D_{ij}, E_{ij}$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{9}{11} \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j E_{ij} (A_i + A_j) + \frac{9}{11} k_0^2 m_j E_{oj} A_j + \frac{9}{11} k_0^2 m_o E_{oi} A_i + \\
 &+ \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j [|u_{ij}^{(0)}| (A_i + A_j) + (|x_{ij}^{(0)}| + |x_{oi}^{(0)}|) E_{ij}] + \\
 &+ \sum_{j=1}^3 k_0^2 m_j (|u_{ij}^{(0)}| A_j + |x_{ij}^{(0)}| E_{oi}) + k_0^2 m_o (|u_{oi}^{(0)}| A_i + |x_{oi}^{(0)}| E_{oi}) + \\
 &+ a k_0^2 m_4 + H [4\alpha \Lambda_i (2\alpha_i + A_i) + (\alpha_o + \frac{1}{2} A_i) \Lambda_i + |\lambda_i^{(0)}| A_i + \\
 &+ \frac{3}{2} \alpha_o (|\lambda_o^{(0)}| + |\lambda_i^{(0)}|)] < A_i H^2,
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{9}{11} \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j E_{ij} (B_i + B_j) + \frac{9}{11} k_0^2 m_j E_{oj} B_j + \frac{9}{11} k_0^2 m_o E_{oi} B_i + \\
 &+ \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j [|u_{ij}^{(0)}| (B_i + B_j) + (|y_{ij}^{(0)}| + |y_{oi}^{(0)}|) E_{ij}] + \\
 &+ \sum_{j=1}^3 k_0^2 m_j (|u_{ij}^{(0)}| B_j + |y_{ij}^{(0)}| E_{cj}) + k_0^2 m_o (|u_{oi}^{(0)}| B_i + |y_{oi}^{(0)}| E_{oi}) + \\
 &+ b k_0^2 m_4 + H [4\alpha \Lambda_i (2\beta_i + B_i) + (\beta_o + \frac{1}{2} B_i) \Lambda_i + |\lambda_i^{(0)}| B_i + \\
 &+ \frac{3}{2} \beta_o (|\lambda_o^{(0)}| + |\lambda_i^{(0)}|)] < B_i H^2,
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{9}{11} \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j E_{ij} (C_i + C_j) + \frac{9}{11} k_0^2 m_j E_{oj} C_j + \frac{9}{11} k_0^2 m_o E_{oi} C_i + \\ & + \sum_{j=1}^4 k_0^2 m_j (|u_{ij}^{(0)}| (C_i + C_j) + (|\zeta_{ij}^{(0)}| + |\zeta_{ij}^{(0)}| E_{ij}) + \\ & + \sum_{j=1}^3 k_0^2 m_j (|u_{ij}^{(0)}| C_j + |\zeta_{ij}^{(0)}| E_{oj}) + k_0^2 m_o (|u_{oi}^{(0)}| C_i + |\zeta_{oi}^{(0)}| E_{oi}) + \\ & + c k_0^2 m_4 + H [40 \Lambda_i (2\gamma_i + C_i) + (\gamma_o + \frac{1}{2} C_i) \Lambda_i + |\lambda_i^{(0)}| C_i + \\ & + \frac{3}{2} \gamma_o (|\lambda_i^{(0)}| + |\lambda_i^{(0)}|)] < C_1 H^2, \\ & \frac{7}{6} D_{ij}^2 + \frac{7}{6} [(A_i + A_j)^2 + (B_i + B_j)^2 + (C_i + C_j)^2] + \\ & + (|x_{ij}^{(0)}| + |x_{ij}^{(0)}|) (A_i + A_j) + (|y_{ij}^{(0)}| + |y_{ij}^{(0)}|) (B_i + B_j) + \\ & + (|\zeta_{ij}^{(0)}| + |\zeta_{ij}^{(0)}|) (C_i + C_j) < r_{ij}^{(0)} D_{ij}, \\ & D_{ij} < \frac{3 r_{ij}^{(0)} E_{ij}}{49 E_{ij} + 9 |u_{ij}^{(0)}|}. \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} (26) \\ (27) \\ (28) \end{matrix}$$

Постоянныи E_{ij} фиксируем совершенно произвольно, а постоянные D_{ij} выберем настолько малыми, чтобы удовлетворялись (28). Далее, еще несколько уменьшая D_{ij} , в случае необходимости, постоянные A_i , B_i и C_i выбираем настолько малыми, чтобы удовлетворялись (27). Наконец, фиксируя все эти постоянные, H выбираем настолько большим числом, чтобы удовлетворялись (24), (25) и (26).

6. Доказательство сходимости рядов и оценка их остатков. Пусть

$$0 < t < \frac{1}{H^*},$$

где $H^* = \max(H, H_o)$.

Тогда, очевидно, что ряды (10), (12) и (14) сходятся при

$$0 < t < \frac{1}{H^*}, \text{ ибо}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n H^{*n}}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Пусть

$$x_{oi}(t) = \sum_{k=1}^t x_{oi}^{(k)} t^k + R_i^{(n)}(t), \quad (29)$$

тогда для остатка $R_i^{(n)}(t)$ из (29) получим оценку

$$\left| R_i^{(n)}(t) \right| < \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_{oi}^{(k)}| t^k < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A_i H^k t^k}{k(k+1)} <$$

$$< \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A_i H^{*k} t^k}{k(k+1)} < \frac{A_i}{n+1}$$

равномерно при $0 < t < \frac{1}{H^*}$.

Неравенства, аналогичные (30), получаются также для оценки остаточных членов рядов (12) и (14).

Июль, 1963.

Кафедра астрономии
Тбилисского государственного
университета

ON THE MOTION OF THE SPACE BODY WITH THE VARIABLE MASS IN ITS FLIGHT TO VENUS

N. G. MAGNARADZE

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенев Е. П., Гребенников Е. А., Денин В. Г., Пирогов Е. Н. Некоторые вопросы динамики полета к Венере. Сообщения ГАИШ, 1962, № 125, 12—41.
2. Дубошин Г. Н. Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Астр. Журн. 1925, 2, № 4, 5—11; 1927, 4, № 2, 123—142; 1928, 5, № 2—3, 153—172; 1929, 6, № 2, 162—179.
3. Дубошин Г. Н. О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами. Астр. Журн. 1930, 7, № 3—4, 153—172.
4. Дубошин Г. Н. Небесная механика, основные задачи и методы. Москва, 1963.
5. Космодемянский А. А. Курс теоретической механики. Москва, 1955.
6. Магнарадзе Н. Г. Некоторые замечания к задаче движения материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Бюлл. Абастуман. астрофиз. обс., 1958, № 22, 139—144.
7. Магнарадзе Н. Г. Об ограниченной задаче трех тел, когда притягиваемое тело имеет переменную массу. Бюлл. Абастуман. астрофиз. обс., 1959, № 24, 145—159.
8. Магнарадзе Н. Г. Об ограниченной пространственной задаче трех тел, когда масса притягиваемого тела является заданной функцией от времени. Бюлл. Абастуман. астрофиз. обс., 1961, № 26, 215—224.
9. Магнарадзе Н. Г. Об одном случае ограниченной задачи трех тел, когда притягиваемое тело имеет переменную массу. Бюлл. Абастуман. астрофиз. обс., 1961, № 26, 191—214.
10. Магнарадзе Н. Г. О поступательно-вращательном движении космического тела относительно Земли. Проблемы движения искусственных небесных тел. Москва, 1963, 278—292.
11. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. Москва, 1952.
12. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, А., т. 2, 1937.
13. Steffensen J. F. On the restricted problem of three bodies. Kgl. danske videnskab. selskab. Mat.-fys. medd., 1956, 30, № 18, p. 17.