ТБИЛИССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. А. С. ПУШКИНА

На правах рукописи

Г. Д. Размадзе

Обучение пределам и связанным с ними некоторым вопросам в средней школе

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
педагогических наук по специальности
«методика математики»

Тбилиси — 1964

ТБИЛИССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. А. С. ПУШКИНА

На правах рукописи

Г. Д. Размадзе

Обучение пределам и связанным с ними некоторым вопросам в средней школе

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук по специальности «методика математики»

Тбилиси — 1964

Работа выполнена в Горийском педагогическом институте им. Бараташвили.
Защита диссертации состоится в Тбилисском государственном пединституте имени А. С. Пушкина.

„——"————————196 года

Ученый секретарь:

Известно, что программа по математике для средней школы содержит вопросы, связанные с понятием предела переменной величины. Таковыми являются: длина окружности, площадь круга, площадь поверхности, объем круглого тела и бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Чтобы логическим путем обучить учащихся этим вопросам, надо ознакомить их с элементами теории пределов.

Раньше в X классе изучались числовые последовательности. В дальнейшем эта тема была изъята из программ, а в IX классе ввели изучение «предела».

По программам 1963—64 гг. в X классе предусматривалось изучение тем «числовые последовательности» и «пределы». Безусловно, это требование программы педагогически оправдано, однако разрозненное прохождение указанных тем нарушает принцип последовательности обучения.

В процессе долголетней практической работы в разных средних школах г. Гори и сел Горийского района (Мерети. Шиндиси, Карели) мы убедились, что при изучении порознь тем «числовые последовательности» и «пределы» учащиеся усваивали понятия переменной величины и ее предела механически. Излагая же числовые последовательности и пределы совместно, мы получили ощутимый результат. Из раздела «числовые последовательности» нами были рассмотрены вопросы, помогающие: по алгебре — изучению прогрессий и предела переменной величины, а по геометрии — в рассуждениях по определению длины окружности. На частных примерах мы знакомили учащихся с понятиями возрастающей, убывающей и ограниченной последовательности чисел, а ознакомление с более общими видами числовых последовательностей путем рассмотрения различных примеров проводилось на занятиях математического кружка.

В 1958—61 годах работая в Цхинвальском педагогическом институте и руководя педагогической практикой студентов в XI классе 4-й средней школы, мы поручали студентам в связи с определениями и доказательствами теорем о поверхностях и объемах круглых тел использовать те сведения из «пределов», которые учащиеся получили в IX классе.

Выяснилось, что в IX классе понятие предела было воспринято учащимися механически; они, например, не могли объяснить, почему апофема правильной пирамиды, вписанной в конус, стремится к образующей конуса, или апофема основания пирамиды стремится к радиусу основания конуса.

Хотя на приемных экзаменах в педагогический институт абитуриенты определяли предел переменной величины, но на практике этим понятием они воспользоваться не могли.

Таким образом, мы убедились, что преподавание вопросов высшей математики в средней школе не стоит на должной высоте.

Это обстоятельство и явилось причиной написания работы. Диссертационная работа преследует следующие цели:

а) помочь преподавателям математики при обучении элементам теории пределов и при внеклассной работе;

б) помочь учащимся, заинтересованным математикой, усвоить элементы высшей математики.

Весь материал в работе распределен на три главы.

Глава 1. Некоторые замечания о существующем положении обучения «пределам».

Глава 2. Элементы последовательностей и теории пределов.

Глава 3. Применение пределов.

Приводим краткий обзор содержания этих глав.

§ 1 первой главы содержит сведения относительно того, как раньше в средних учебных заведениях осуществлялось обучение элементам высшей математики и каково положение в настоящее время. Тут же мы пытаемся обосновать, насколько помогает прохождение элементов высшей математики обучению «школьной» математике.

§ 2 этой главы содержит обзор литературы по вопросам преподавания числовых последовательностей и пределов. На конкретных примерах нами показано, что в некоторых работах недостаточно разработана методика обучения числовым последовательностям и пределу, а некоторые из них содержат такие приемы обучения этим вопросам, которые неприемлемы для средней школы.

В диссертации дается критика разработки вопросов, связанных с преподаванием числовых последовательностей, содержащаяся в методическом пособии С. Цхакая по преподаванию арифметической прогрессии (издано в 1940 г.), указано на недостаточность разбираемых примеров для преподавания числовых последовательностей, отмечается, что автор ошибочно отождествляет понятия числовой последовательности и ряда. Книга Г. Лорткипанидзе «Изучение вопросов теории пределов в средней школе», изданная в 1950 г., содержит определение предела только для монотонной числовой последовательности. Очевидно, будет лучше, если понятие предела будет определено на конкретных, наглядных примерах, а не трафаретно, сухо, абстрактно.

Приведенные в книге определения возрастающей и убывающей числовой последовательности, числовых последовательностей, ограниченных сверху и снизу, носят теоретический характер, тогда как для средней школы они должны быть подкреплены практическими примерами. То же самое можно сказать и о приводимом в этой же книге переходе от понятия предела числовой последовательности к понятию предела переменной величины.

Хотя автор дает простые, но общие доказательства теорем о пределах, однако было бы лучше, если при доказательстве была бы использована наглядность. Хорошо показано в книге применение теории пределов в геометрии.

Программой предусмотрено прохождение вопросов теории пределов в курсе алгебры средней школы. Программным требованиям вполне отвечает книга доцента Харабадзе «Частный курс методики преподавания математики», 1949 г.

В журнале «Школа и жизнь» (на грузинском языке) в № 8, 1961 г. помещена статья М. Хомезури «Как я преподаю пределы в IX классе». Вначале перечислены вопросы, для изучения которых материал теории пределов имеет большое значение. Но рассмотрение отдельных вопросов обучения пределам одностороннее. Кроме того, в указанной статье определение предела переменной связано с т. н. «частным моментом», что, безусловно, будет непонятно учащимся (мы это проверили на практике). Математически и методически целесообразнее, если в средней школе понятие предела будет дано в связи с числовыми последовательностями.

В журнале «Математика в школе» (1951 г., № 3) помещена статья Г. М. Карпенко, в которой хорошо изложено понятие числовой последовательности. В этой статье удачна также иллюстрация существования предела числовой последовательности, но для школы неприемлема приведенная в статье методика доказательства теорем относительно числовых последовательностей; доказательства теорем проведены тем методом, который используется для студентов в курсе математического анализа. В статье не содержится применения вопросов в геометрии, что надо считать ее недостатком.

В статье Ф. А. Белецкого «Понятие предела в курсе IX класса», помещенной в журнале «Математика в школе» (1951 г. № 3) даются разные приемы вычисления предела числовой последовательности. Очевидно, что за неимением времени на уроке, вычисление предела одной и той же последовательности разными способами практически не осуществимо. Надо пользоваться только наиболее рациональным способом. В упомянутой статье предел числовой последовательности

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots$$

вычислен по формуле суммы членов геометрической прогрессии. Этот прием неприемлем потому, что до прохождения числовых последовательностей учащиеся еще не будут знакомы с прогрессиями.

На 65 стр. того же журнала И. Г. Токарчук дает удачное описание и применение прибора, который делает наглядным существование предела одной числовой последовательности. Но в соответствии с действующими программами пользование прибором целесообразнее проводить не на уроке, а на внеклассном занятии в связи с изучением предела переменной величины.

В журнале «Математика в школе» (1958 г. № 4) В. И. Веретинникова рассматривает теорему о пределе суммы и произведения переменных величин на основе интуиции и наглядности. Это хороший путь. Но в выводах автор допускает некоторые ошибки. Например, она пишет:

$$„\lim S = \lim \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot 0 = 0“$$

(заранее показано, что $BC \to 0$) на основании чего заключает о справедливости теоремы относительно предела произведения переменных величин. В математическом понимании этим доказывается, что, $\lim S = 0$. А это обозначает лишь то, что площадь треугольника (в упомянутой работе S обозначает площадь рассматриваемого треугольника) бесконечно мала, но отнюдь не то, что теорема справедлива относительно предела произведения переменных величин. Запись

$$\lim \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot O$$

не ясна. Что касается равенства

$$\lim \frac{1}{2} AC \cdot BC = 0,$$

то оно указывает лишь на то, что произведение постоянного числа на бесконечно малую величину бесконечно мало и т. д.

В первой главе диссертации содержатся также замечания относительно определения предела переменной, приведенного в книге О. И. Смирновой «Функции в курсе математики в X классе», 1956 г.

Вполне приемлемо изложение вопроса преподавания прогрессий на базе числовых последовательностей в книге В. М. Брадиса «Методика преподавания математики в средней школе» 1959 г., так же как и методика преподавания элементов высшей математики, приведенная в книге коллектива авторов под редакцией С. Е. Ляпина («Методика преподавания математики», 1956 г.).

Работая и проводя наблюдения в классе или во внеклассной работе, мы убеждались, что учащиеся недостаточно вникали в содержание определения предела функции в смысле Гейне. Вместе с тем они хорошо разбирались в этих вопросах, когда им на чертеже показывали, что значит, что пределом функции $y = f(x)$ служит, например, число b. Учащиеся вспоминают из X класса геометрическое определение предела переменной величины. Они легко разбирались в том, что когда $|x - a| < \delta$, тогда $|y - b| < \varepsilon$, где через δ обозначено малое положительное число, соответствующее числу ε. Очевидно, что при решении примеров на определение предела функции учащиеся практически знакомились с тем, что означает предложение: числу ε соответствует положительное число δ. Таким образом, по-нашему, было бы лучше, если бы в упомянутой книге определение предела функции было наглядным.

Во введении ко второй главе указано место понятия функции в средней школе. В частности, отмечено, что известному немецкому математику Ф. Клейну принадлежат большие заслуги в деле введения понятия функции в курс средней школы.

Понятие функции шире понятия функциональной зависимости. Нами отмечается, что, в основном, существует три вида функциональной зависимости: 1) графический (геометрический), 2) операционный и 3) табличный. Мы излагаем суть каждого из них и приводим определения функции, данные Дирихле и Лобачевским. Даем обзор возникновения и различных стадий развития понятия функции и подробно освещаем вопросы, играющие основную роль в изучении функции. В частности, отмечаем, что для объяснения функциональной зависимости важно знание понятия множества. Поэтому учащихся с начала же надо ознакомить с этим понятием. Уже в младших классах они встречаются с различными множествами чисел, например, с множествами натуральных чисел, четных и нечетных чисел, их квадратов и кубов и т. д.

Приведены практические примеры, поясняющие взаимно-однозначное соответствие между величинами, и рассмотрено два конкретных примера для общего определения функциональной зависимости между величинами.

После определения графика функции частными примерами поясняется, что, вообще, графиком функции служит кривая, а в частном случае — прямая.

Кроме соображений, вытекающих их нашей практической работы, мы исходим из проекта программы, опубликованного в журнале «Математика в школе» — (№ 4 1959 г.). Считаем, что при прохождении темы «Функции и графики» целесообразно объяснить учащимся приращение аргумента и функции. Рассматривая конкретные примеры, приводим определение приращения аргумента и функции с соответствующими примерами на вычисления.

Для изучения «Функции» не менее важно знание «промежутков определения функции».

В диссертации приведен следующий пример функции:

$$y=\frac{x}{x-1}$$

и указанно, что $x \neq 1$ представляет собой допустимое значение аргумента, а при значении $x=1$ данная функция теряет смысл — деление на нуль не имеет смысла.

Таким образом, наряду с распределением по классам вопросов, нужных для изучения «Функции», в работе приведены примеры изучения некоторых актуальных вопросов, после чего следует изучение числовых последовательностей.

Для определения последовательности считаем целесообразным написать учащимся следующие числовые множества:

1) $1,\ 2,\ 3, \ldots;$

2) $2,\ 4,\ 6, \ldots;$

3) $1,\ 3,\ 5, \ldots;$

4) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}, \ldots$

и т. д.

После этого учащимся следует пояснить, что каждое из них называется «числовой последовательностью» [1], отметив при этом, что последовательность может состоять из отрезков, многоугольников, точек и т. д., называющихся элементами последовательности.

Для объяснения общего члена последовательности предварительно приводим следующие примеры:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \qquad (1)$$

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, \ldots \qquad (2)$$

$$7,\ \frac{11}{3},\ \frac{15}{5}, \ldots, \frac{4n+3}{2n-1}, \ldots \qquad (3)$$

и т. д.

Выписываем отдельные члены

$$\frac{n}{n+1},\quad \frac{2n-1}{n},\quad \frac{4n+3}{2n-1}$$

и говорим, что они называются соответственно общими членами в вышеприведенных примерах.

Числовые последовательности приведены и в виде формулы. Например, последовательность (1) можно записать и так:

$$a_n=\frac{n}{n+1},\ n=1,\ 2,\ 3, \ldots .$$

Здесь указываем на функциональную зависимость между a_n и натуральным аргументом. Приведены различные приемы нахождения общих членов различных числовых последовательностей.

Вот некоторые из них:

1) Для составления общего члена последовательности

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7}, \ldots$$

мы поручаем учащимся обнаружить признак распределения членов в последовательности. С этой целью учащимся пред-

[1] Большего сказать здесь нельзя.

лагается обратить внимание на знаменатели этих дробей. Они легко заметят, что знаменателями являются последовательно все нечетные числа, а числители равны 1. После этого, воспользовавшись выражением $2n-1$, которое при $n=1, 2, 3,\dots$ дает нечетные числа, легко записать вид общего члена данной последовательности:

$$\frac{1}{2n-1}.$$

2. Последовательность

1,2; 2,02; 3,002; . . . . .

представлена в диссертации следующим образом:

$$1+\frac{2}{10},\quad 2+\frac{2}{10^2},\quad 3+\frac{2}{10^3},\dots,$$

там же записан общий член

$$n+\frac{2}{10^n}.$$

3) Для определения общего члена последовательности

$$1,\ 2,\ \frac{7}{3},\ \frac{5}{2},\dots,$$

в отдельной строчке переписываем ее в следующем виде:

$$\frac{1}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{10}{4},\dots$$

и записываем общий член

$$\frac{3n-2}{n}.$$

На основании рассмотренных примеров замечаем, что не существует универсального приема, пригодного для построения числовой последовательности по нескольким ее элементам.

Понятие числовой последовательности мы используем при изучении прогрессии. Арифметические и геометрические прогрессии определены как числовые последовательности определенного вида. Заостряем внимание на вопросах, отсутствующих в учебниках, но нужных для преподавателя.

Таковыми являются формулы арифметической и геометрической прогрессии, их свойства и т. д. Эти вопросы предназначены для преподавателя в качестве теоретического упражнения. При помощи понятия общего члена числовой последовательности приведен образец решения одной задачи.

Наконец, отмечено, что при одиннадцатилетнем обучении в X классах средней школы следует проходить следующий материал: 1) общий член числовой последовательности, 2) определение числовой последовательности, 3) понятие предела числовой последовательности, 4) существование предела монотонной и ограниченной последовательности (без доказательства), 5) теоремы о пределах, 6) решение примеров на нахождение пределов и 7) вывод формулы для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Первый и второй из перечисленных вопросов рассмотрены в диссертации порознь, так как их прохождение в связи с другими вопросами усложнило бы положение. Остальные же вопросы освещены в параграфе «классификация переменных». Таким путем достигается большая экономия времени.

Определению предела переменной посвящен отдельный параграф диссертации.

Следующим вопросом второй главы являются «постоянные и переменные величины». Казалось бы, что рассмотрение этого вопроса меняет структуру построения диссертации, но это сделано с целью объединить все вопросы, касающиеся переменной.

Нами указано, в каком классе следует изучать эти вопросы и в каком виде предложить учащимся их определение.

Учащиеся должны убедиться в том, что одна и та же переменная, оставаясь неизменной в одних условиях, может принимать различные числовые значения при других условиях. В первом случае величина определена как постоянная, а во втором — как переменная.

Наконец, сформулировано определение постоянной и переменной величины и приведены соответствующие примеры.

Рассматривая частные случаи для основательного изучения «пределов» в средней школе, мы приводим определение и геометрическое представление возрастающей, убывающей, ограниченной, неограниченной последовательностей. Там же решаются соответствующие примеры, даны упражнения для учащихся.

До общего определения понятия предела рассмотрены простейшие переменные, пределы которых заданы непосредственно. На этих же примерах показано, что переменная может быть больше или меньше своего предела. Показана причина того, что абсолютное значение разности переменной и предела принимает участие в общем определении предела. До введения общего определения предела проведена следующая работа:

1. Пример 1. Пусть переменная определена на следующей последовательности:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

На числовой оси вправо от начала отсчета, отметим отрезок ОА единичной длины (рис. 1).

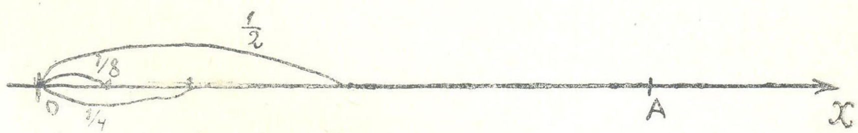

Рис. 1.

Разделим ОА пополам. Точке деления соответствует первое значение переменной $\frac{1}{2}$. Полученный отрезок также разделим пополам. Точке деления соответствует второе значение переменной $\frac{1}{4}$ и т. д.

Из чертежа явствует, что отрезки постепенно уменьшаются так, что, чем больше порядок соответствующей переменной последовательности, тем более сгущаются их концы. Наконец, учащимся объясняется, что пределом переменной является O записывается так $\lim x = 0$; указывается и другая запись этого факта: $x \to 0$.

Пример 2. Пусть переменная принимает следующие числовые значения:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$$

На числовой оси от точки О, отмерим единичный отрезок, найдем точки, соответствующие различным значениям переменной.

Получим чертеж (рис. 2), из которого видно, что значения переменной постепенно отдаляются от точки О и сгущаются возле точки с абсциссой 1, которая будет пределом рассматриваемой переменной.

На других примерах показано, что переменная может приближаться к своему пределу как слева, так и справа.

После этого приведено общее определение предела. Предварительно на конкретных примерах учащимся объясняются,

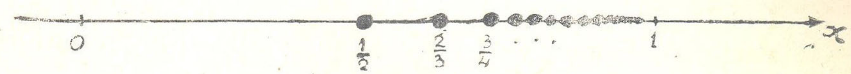

Рис. 2.

переменной, абсолютная величина разности между переменной и ее пределом меньше произвольно взятого положительного малого числа. С этой целью рассмотрено два примера: где: $\lim x = 1$.

Записаны разности:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4};$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1};$$

$$\ldots\ldots$$

и поставлен вопрос: могут ли существовать такие значения переменной, начиная с которых разность между 1 и значениями переменной была бы меньше любого произвольно малого положительного числа, например, $\frac{1}{10^{10}}$. Очевидно, учащиеся сумеют назвать такое значение переменной. Таковым будет $\frac{10^{10}}{10^{10}+1}$. Действительно,

$$1-\frac{10^{10}}{10^{10}+1}=\frac{10^{10}+1-10^{10}}{10^{10}+1}=\frac{1}{10^{10}+1}<\frac{1}{10^{10}};$$

$$1-\frac{10^{10}+1}{10^{10}+2}=\frac{1}{10^{10}+2}<\frac{1}{10^{10}};$$

$$1-\frac{10^{10}+2}{10^{10}+3}=\frac{1}{10^{10}+3}<\frac{1}{10^{10}};$$

. . . .

Таким образом, наглядность и конкретные примеры создают основу сознательного изучения учащимися понятия предела.

После общего определения предела переменной величины геометрически показано (для общего случая): а) что пределом переменной является число А, если точки, соответствующие значениям переменной, сгущаются возле точки, соответствующей А;

б) что переменная, имеющая предел, является ограниченной;

в) что переменная не может иметь больше одного предела;

г) когда переменная не будет иметь предела (в виде числа).

Приводятся упражнения для закрепления материала.

Для развития навыков самостоятельной работы, для расширения математического горизонта и для выявления одаренных математическими способностями учащихся большое значение имеют математические кружки. Поэтому в диссертации определенное внимание уделяется методической разработке материала, предназначенного для внеклассной работы.

С этой целью, наряду с ознакомлением учащихся на уроках путем разбора конкретных примеров с понятиями бесконечно малой и бесконечно большой величины, дается методика изучения конкретных свойств бесконечно малых величин и основные теоремы о пределах. Наглядное представление о свойствах бесконечно малых дается на геометрических примерах. Этот материал, в основном, предназначен для практических упражнений во время внеклассной работы.

1. О сумме бесконечно малых.[1]

[1] Рассматривается конечная сумма слагаемых.

Начерчен прямоугольный треугольник ABC и рассмотрено бесконечное перемещение вершины С вдоль прямой (например, вправо), проходящей через эту вершину параллельно основанию (рис. 3).

Как известно, внешний угол треугольника равен сумме внутренних, не смежных с ним углов. Поэтому пишем

$$\angle DBC=\angle A+\angle C, \ldots \tag{1}$$

На чертеже видно, что с постепенным уменьшением угла ДБС, углы А и С постепенно уменьшаются, т. е. при рассматриваемом процессе эти углы стремятся к нулю, причем они не обращаются в нуль, т. к. сторона треугольника ВС не совпадает с продолжением основания ввиду того, что

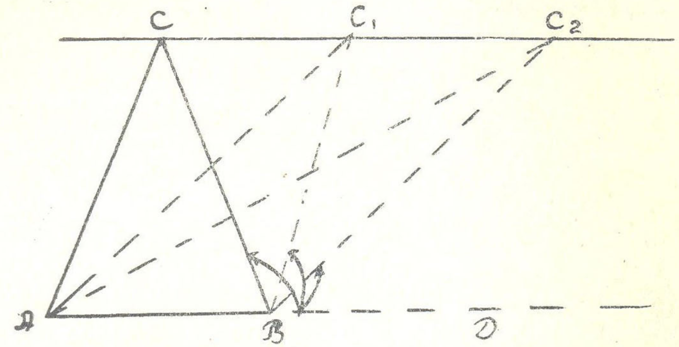

Рис. 3.

$$\angle BAC+\angle ACB<2d.$$

Таким образом получим:

$$\lim\angle DBC=0, \tag{2}$$

$$\lim\angle A=0, \quad \lim\angle C=0 \tag{3}$$

На основании равенства (1) и (2) имеем:

$$\lim(\angle A+\angle C)=0,$$

где $\angle A$ и $\angle C$ бесконечно малы (см. третье условие). Из последнего равенства следует, что вся сумма также бесконечно мала.

2. О произведении бесконечно малых.

Рассматриваем квадрат $ABCD$. Соединяя средние точки $A_1B_1C_1D_1$ его сторон, получаем квадрат. Аналогично вписываем квадрат $A_2B_2C_2D_2$ и т. д., наглядно обосновывая стремление к нулю площади и стороны данного квадрата. Пишем соответствующую формулу.

В диссертации показано, каким образом должна быть иллюстрирована справедливость основных теорем на геометрических примерах.

Как известно, по старой программе «пределы» изучались в IX классе. Было бы педагогически неоправдано объяснять учащимся соответствующего возраста понятие предела в особом виде. Несмотря на это, после доказательства теорем мы требуем от учащихся решения примеров на вычисление пределов, не упоминая слов «предел функции». Переменную задаем в виде равенства, в первой части которого стоит определенное выражение. Учащимися осознано, что нахождение предела переменной то же самое, что нахождение предела выражения. В диссертации приведено решение примеров и даны упражнения с ответами .Теперь, когда в XI классе в качестве учебного вопроса введен предел функции, надо говорить с учащимися этого класса прибегая к термину «предел функции».

В диссертации, обращено особое внимание на использование предела числовой последовательности в определении предела переменной, а также предела переменной в определении предела функции.

Путем рассмотрения частных примеров показано, что

$$\lim x^n = (\lim x)^n, \quad \lim \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim x};$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 \pm x)^k - 1}{x} = \pm k;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[k]{1 \pm x} - 1}{x} = \pm \frac{1}{k};$$

где n и k натуральные числа. (k можно предполагать рациональным числом).

После рассмотрения способа осуществления этого требования приведены образцы решения примеров, из которых наиболее трудные отнесены на кружковую работу, а более простые предназначены для классной работы в XI классе после ознакомления с определением предела функции.

В третьей главе рассмотрены те вопросы, для изучения которых большое значение имеют «пределы».

Отмечено, что по практическим соображениям лучше, если в XI классе понятие «Предел функции» будет определено геометрически, после чего учащиеся сознательно разберутся в смысле равенства

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Там же в этом смысле определено понятие предела функции и рассмотрены случаи, когда;

1. a—конечное число;
2. a—бесконечно;
3. b—конечно;
4. b—бесконечно.

В заключении путем рассмотрения частных примеров обосновано, что определение предела функции не дает способа вычисления предела, оно лишь позволяет проверить, является ли данное число пределом функции.

Программой средней школы не предусмотрено изучения «непрерывности функции». В диссертации изучение этого вопроса отнесено к внеклассной работе.

Непрерывность и разрыв функции изложены путем рассмотрения графиков, известных ученикам из младших классов (VIII-X).

В диссертации приведен ряд упражнений для более глубокого овладения упомянутыми вопросами.

В процессе наблюдения над внеклассными занятиями учащихся средних классов и из практики студентов мы убедились, что лучше будет, если понятие производной функции ввести в средней школе в связи с примерами механики и геометрии.

В диссертации для определения производной функции избран этот путь. Рассмотрены случаи прямолинейного движения с равномерной и неравномерной скоростями, решены задачи из второй части сборника алгебраических задач Н. Ларичева, касающиеся определения производной (как геометрически, так и вообще).

Мы придерживаемся того мнения, что формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии следует выводить в курсе алгебры X класса и здесь же давать ее применение для обращения периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь. Наряду с этим приведено применение этой формулы для прохождения тех вопросов из теории «рядов», в связи с которыми учащимся придется выполнять упражнения на «ряды» по сборнику алгебраических задач П. Ларичева (часть II).

Для получения приближенного значения числа π, мы пользуемся формулой удвоения числа сторон правильного многоугольника.

$$a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a^2_n}},$$

по которой составляем последовательность периметров (при $n=3,6,\dots,96\dots$).

$$P_6,\ P_{12},\dots,\ P_{192}$$

или

$$6a_6,\ 12a_{12},\dots,\ 192a_{192},$$

Потом находим приближенное значение

$$a_{192}\simeq 0{,}0327235,$$

и после этого приближенное значение

$$P_{192}=192a_{192}\simeq 6{,}28$$

Заметим, что это приближение происходит снизу.

Теперь вычислим P'_{192} — периметр правильного многоугольника с 192 сторонами, описанного вокруг окружности. Для этого воспользуемся формулой

$$b_{2n}=\frac{2a_{2n}}{\sqrt{4-a^2_{2n}}}.$$

По этой формуле

$$b_{192}\simeq 0{,}032727$$

Следовательно,

$$P'_{192}=192\ b_{192}\simeq 6{,}29$$

Заметим, что это приближение происходит сверху.

Ввиду того, что длина окружности является общим пределом периметров как описанных, так и вписанных правильных многоугольников, в нашем случае она будет расположена между P'_{192} и P_{192}. Следовательно, если напишем

$$2\pi\simeq P_{192}$$

(для нашего случая $R=1$, следовательно, согласно формуле для вычисления длины окружности $C=2\pi R$ пишем $C=2\pi$) погрешность не будет превышать 0,01 [1].

т. е.

$$\pi\simeq 3{,}14.$$

Примечание. Этот вопрос нами предусмотрен для внеклассной работы.

В заключении диссертации в виде замечания приведены те вопросы из стереометрии, для основательного изучения которых в XI классе применяется «классификация переменных» и понятие предела. В частности, в отличие от учебника логическим путем показана причина того, что периметр основания правильной призмы, вписанной в цилиндр, стремится к длине окружности основания призмы, а апофема стремится к радиусу. Кроме того, тем же путем показано стремление апофемы правильной пирамиды к образующей конуса.

Диссертация является результатом длительного исследования. Все положения, отвечающие требованиям официальной программы по математике, проверены на практике.

Проведенная работа показала, что при обучении элементам высшей математики в предложенной нами последовательности учащиеся легче усваивают математику и с большей любовью относятся к ее изучению.

Наши рекомендации проверялись на практике учителями математики 1 русской школы г. Гори (Г. Хатидзе и И. Хоргуашвили), IV средней школы (П. Андриадзе), Карельский (Е. Гелашвили) села Хидистави Горийского района (В. Копоридзе), села Ларгвиси Ленингорского района (З. Хуцишвили) и др. Все они отмечают положительный результат применения нашей методики обучения пределам. По вопросам диссертации нами опубликованы две работы.

---

[1] $P'_{192}-P_{192}=0{,}01$.