

ლოტკა-ვოლტერას განზოგადებული განტოლება

ილია დარჯანია

*სამაგისტრო ნაშრომი წარდგენილია ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ბიზნესის, ტექნოლოგიისა და განათლების ფაკულტეტზე
მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მინიჭების მოთხოვნების შესაბამისად*

თანამედროვე მათემატიკის ძირითადი პარადიგმები და გამოყენებები

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: გიორგი რაქვიაშვილი

ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თბილისი, 2026

განაცხადი

როგორც წარდგენილი სამაგისტრო ნაშრომის ავტორი, ვაცხადებ, რომ ნაშრომი წარმოადგენს ჩემს ორიგინალურ ნამუშევარს და არ შეიცავს სხვა ავტორების მიერ აქამდე გამოქვეყნებულ, გამოსაქვეყნებლად მიღებულ ან დასაცავად წარდგენილ მასალებს, რომლებიც ნაშრომში არ არის მოხსენიებული ან ციტირებული სათანადო წესების შესაბამისად.

ილია დარჯანია 8.06.2026

აბსტრაქტი

წინამდებარე ნაშრომი ეძღვნება განზოგადებული და კონკურენტული ლოტკა–ვოლტერას განტოლებების მათემატიკურ კვლევას მათემატიკური ბიოლოგიისა და დინამიკური სისტემების თეორიის ფარგლებში. ნაშრომში ჯერ განხილულია მათემატიკური ბიოლოგიის რამდენიმე ძირითადი ცნება, მათ შორის კვებითი ქსელი, ფუნქციური პასუხი და საზოგადოების მატრიცა, რომლებიც მნიშვნელოვანია ეკოლოგიური ურთიერთქმედებების ფორმალიზაციისათვის. შემდგომ წარმოდგენილია დინამიკური სისტემების ძირითადი ცნებები: ატრაქტორი, წერტილოვანი ატრაქტორი, ფიქსირებული წერტილის სტაბილურობა, პუანკარე–ბენდიქსონის თეორემა და ლიაპუნოვის ექსპონენტები. განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა ლიაპუნოვის ექსპონენტის როლს, როგორც ქაოსური ქცევის რაოდენობრივ ინდიკატორს.

ნაშრომის ძირითად ნაწილში შესწავლილია განზოგადებული ლოტკა–ვოლტერას განტოლებები, მათი პარამეტრების ბიოლოგიური ინტერპრეტაცია, ფიქსირებული წერტილები, სტაბილურობა და შესაძლო დინამიკური რეჟიმები. ნაჩვენებია, რომ მოდელს შეუძლია აღწეროს როგორც კონკურენცია და მტაცებელი–მსხვერპლის ტიპის ურთიერთობები, ასევე უფრო რთული მრავალსახეობიანი სისტემები. განხილულია ამ მოდელის გამოყენებები ერთ ტროფიკულ დონეზე არსებული საზოგადოებებისათვის, მოსავლიანობის პროგნოზირება მონოკულტურისა და ბიკულტურის ექსპერიმენტების საფუძველზე და სახეობათა გაქრობის ადრეული გაფრთხილების იდეა.

ასევე განხილულია კონკურენტული ლოტკა–ვოლტერას განტოლებები ორი და მრავალი სახეობის შემთხვევებისთვის. ნაჩვენებია, რომ ასეთ სისტემებში შესაძლებელია არა მხოლოდ სტაბილური თანაარსებობა ან გადაშენება, არამედ რთული ასიმპტოტური ქცევებიც, მათ შორის ქაოსი. განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა ოთხგანზომილებიან მაგალითს, სადაც მიღებულია ქაოტური დინამიკა და დადებითი მაქსიმალური ლიაპუნოვის ექსპონენტი, რაც ადასტურებს, რომ მრავალსახეობიან კონკურენტულ ეკოლოგიურ სისტემებშიც შეიძლება წარმოიშვას ქაოტური ატრაქტორები.

ნაშრომი აჩვენებს, რომ ლოტკა–ვოლტერას ტიპის მოდელები წარმოადგენს ეფექტურ მათემატიკურ ჩარჩოს ეკოლოგიური დინამიკის, სტაბილურობის, ბიფურკაციების და ქაოსის შესასწავლად. მიღებული შედეგები მნიშვნელოვანია როგორც თეორიული ეკოლოგიისათვის, ისე კომპლექსური ბიოლოგიური სისტემების მოდელირებისათვის.

ნაშრომი არის მიმოხილვითი ხასიათის და მისი გამოყენება მომდევნო სამეცნიერო მუშაობისთვის სავარაუდოდ უნდა იყოს შესაძლებელი.

Abstract

This thesis is devoted to the mathematical study of generalized and competitive Lotka–Volterra equations within the framework of mathematical biology and dynamical systems theory. First, several basic concepts of mathematical biology are discussed, including food webs, functional response, and the community matrix, all of which are important for the formalization of ecological interactions. The thesis then introduces fundamental notions from dynamical systems theory, such as attractors, point attractors, stability of fixed points, the Poincaré–Bendixson theorem, and Lyapunov exponents. Special attention is paid to the role of the Lyapunov exponent as a quantitative indicator of chaotic behavior.

The main part of the thesis studies the generalized Lotka–Volterra equations, the biological interpretation of their parameters, fixed points, stability, and possible dynamical regimes. It is shown that the model can describe both competition and predator–prey type interactions, as well as more complex multispecies systems. Applications of the model to single trophic communities are considered, including the prediction of species yields from monoculture and biculture experiments and the idea of early warning signals for species collapse.

The thesis also examines competitive Lotka–Volterra equations for both two-species and N-species cases. It is shown that such systems may exhibit not only stable coexistence or extinction, but also more complex asymptotic behavior, including chaos. Particular attention is given to a four-dimensional example displaying chaotic dynamics and a positive maximal Lyapunov exponent, confirming that chaotic attractors may arise even in multispecies competitive ecological systems.

The thesis demonstrates that Lotka–Volterra type models provide an effective mathematical framework for studying ecological dynamics, stability, bifurcations, and chaos. The obtained results are important both for theoretical ecology and for the modeling of complex biological systems.

აბსტრაქტი	i
Abstract	ii
შესავალი	1
1. მათემატიკური ბიოლოგიის ზოგი ცნება	3
1.1. კვებითი ქსელი	3