მარტივი და ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების დრეკადობის და თერმოდრეკადობის ბმული კვაზისტატიკის თეორიის ამოცანები

მარიამ მიქელაშვილი

სადოქტორო ნაშრომი წარმოდგენილია ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბიზნესის, ტექნოლოგიისა და განათლების ფაკულტეტზე მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მინიჭების მოთხოვნის შესაბამისად

თანამედროვე მათემატიკის ძირითადი პარადიგმები და გამოყენებები

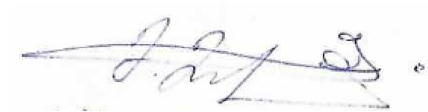
სამეცნიერო ხელმძღვანელი: მერაბ სვანაძე, პროფესორი

ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თბილისი, 2023

განაცხადი

როგორც წარდგენილი სადოქტორო ნაშრომის ავტორი, ვაცხადებ, რომ ნაშრომი წარმოადგენს ჩემს ორიგინალურ ნამუშევარს და არ შეიცავს სხვა ავტორების მიერ აქამდე გამოქვეყნებულ, გამოსაქვეყნებლად მიღებულ ან დასაცავად წარდგენილ მასალებს, რომლებიც ნაშრომში არ არის მოხსენიებული ან ციტირებული სათანადო წესების შესაბამისად.



მარიამ მიქელაშვილი

ხელმოწერა და თარიღი 27.02.2023

მადლობა

მინდა გულწრფელი მადლობა გადავუხადო ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელს, პროფ. მერაბ სვანაძეს გაწეული დახმარებისთვის. ძალიან დიდია მისი წვლილი ჩემს პროფესიულ ზრდაში და სადოქტორო ნაშრომის შექმნაში. ბედნიერი ვარ, რომ მასთან მუშაობის პატივი მხვდა წილად.

აბსტრაქტი

ნაშრომში განხილულია დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიები მარტივი და ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალებისთვის, რომლებშიც ერთდროულადაა გათვალისწინებული დარსის კანონი და ფორების ფარდობითი მოცულობის ცვლილება. გამოკვლეულია ამ თეორიების მდგრადი რხევის შიგა და გარე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები. კერძოდ, თითოეულ თეორიაში მიღებულია შემდეგი შედეგები: ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით აგებულია მდგრადი რხევის განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნი და დადგენილია მისი ძირითადი თვისებები, მიღებულია გრინის იგივეობები და დამტკიცებულია მდგრადი რხევის სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული (კლასიკური) ამონახსნების ერთადერთობის თეორემები, აგებულია ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალები და მოყვანილია მათი ძირითადი თვისებები; ბოლოს, პოტენციალთა მეთოდისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დამტკიცებულია აღნიშნული ამოცანების კლასიკური ამონახსნების არსებობის თეორემები.

ძირითადი თემატური საძიებო სიტყვები: დრეკადობა, თერმოდრეკადობა, კვაზისტატიკა, ფოროვანი მასალები, სასაზღვრო ამოცანები, არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები.

საგნობრივი კლასიფიკატორები MSC2020: 74F05, 74F10, 74G25, 74G30, 35E05.

Abstract

In this work, the coupled linear quasi-static theories of elasticity and thermoelasticity for materials with single and double porosities is considered which simultaneously takes into account Darcy's law and the change of volume fraction of pores. The basic internal and external boundary value problems of steady vibrations are investigated. Indeed, the following results are obtained in each theory: the fundamental solution of the system of steady vibration equations is constructed by means of elementary functions and its basic properties are presented; Green’s identities are obtained and the uniqueness theorems for the regular (classical) solutions of the boundary value problems of steady vibrations are proved, the surface and volume potentials are constructed and the basic properties of these potentials are given; finally, the existence theorems for classical solutions of the boundary value problems of steady vibrations are proved by means of the potential method and the theory of singular integral equations.

Key words: Elasticity, thermoelasticity, quasi-statics, porous materials, boundary value problems, existence and uniqueness theorems.

MSC2020: 74F05, 74F10, 74G25, 74G30, 35E05.

სარჩევი

თავი 1. შესავალი

1.1. ფოროვან სხეულთა მათემატიკური თეორიების მოკლე მიმოხილვა

მარტივი და ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების მექანიკური თვისებების პროგნოზირება, ას წელზე მეტია, უწყვეტ გარემოთა მექანიკის ერთ-ერთი აქტუალური თემაა. ფოროვან გარემოთა მათემატიკური მოდელების აგება და მათი ინტენსიური კვლევა გამოწვეულია ფოროვანი მასალების ფართო გამოყენებით სამოქალაქო და გეოტექნიკურ ინჟინერიაში, ტექნოლოგიაში, ჰიდროლოგიასა და ბოლო წლებში, მედიცინასა და ბიოლოგიაში (იხ. [2, 17, 19, 21, 22, 33, 87] და იქვე მითითებული ლიტერატურა). ამასთანავე, როგორც ცნობილია, ასტროფიზიკური, გეოლოგიური და ბიოლოგიური სხეულები ძირითადად მიკროსტრუქტურის მქონე ფოროვანი მასალებია [18, 28, 60].

კლასიკური განმარტებით, მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალებს მიეკუთვნება ის ფოროვანი სხეულები, რომელთა ფორების დიამეტრი 50-1000 ნმ (nm) დიაპაზონისაა და უწოდებენ მაკრო ფორებს. ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალებს გარდა მაკრო ფორებისა, გააჩნიათ უფრო მცირე ზომის ფორები, რომელთა დიამეტრი 2-50 ნმ დიაპაზონისაა და უწოდებენ მეზო ფორებს ან ბზარებს (დეტალებისთვის იხ. [85]).

ისტორიულად, პირველად აიგო მარტივი ფოროვნობის, ხოლო შემდეგ - ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების მათემატიკური მოდელები. კერძოდ, დღეისათვის აგებულია მრავალი თეორია, რომლებიც აღწერენ მარტივი და ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების მექანიკურ თვისებებს (მაგ., იხ. [2, 14, 17, 33] და იქვე მითითებული ლიტერატურა) და მათგან ყველაზე პოპულარულია დარსის კანონზე ან ფორების ფარდობითი მოცულობის კონცეფციაზე დაფუძნებული თეორიები. დღეისათვის ამ თეორიების ამოცანების გამოკვლევა აქტუალურია როგორც თეორიული, ასევე პრაქტიკული თვალსაზრისით.

1941 წელს მ.ა. ბიოს [4] მიერ აიგო მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალებისთვის ფოროდრეკადობის პირველი მათემატიკური მოდელი კვაზისტატიკის შემთხვევაში,

რომელიც ეფუძნება დარსის კანონს. ეს კანონი განსაზღვრავს ფორებში სითხის წნევის ცვლილების კანონზომიერებას. ამის გამო, ბიოს თეორიაში ძირითადი განტოლებათა სისტემა ჩაწერილია გადაადგილების ვექტორისა და სითხის წნევის ცვლილების მიმართ.

მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალების ბიოს ფოროდრეკადობისა [4] და ფოროთერმოდრეკადობის [5] კლასიკური თეორიები დღეისათვის სრულყოფი-ლადაა გამოკვლეული. ამ თეორიებში მიღებული ძირითადი შედეგები და ისტორიული ინფორმაცია მოყვანილია [14, 17, 33, 55, 58, 86] მონოგრაფიებსა და მათში მითითებულ ლიტერატურაში. ფოროდრეკადობის განტოლებებთან დაკავშირებული ამოცანების ანალიზური ამონახსნების შესახებ ლიტერატურის ფართო მიმოხილვა მოცემულია [54] ნაშრომში.

მეორე მხრივ, 1979 წელს ჯ. ნუნზიატომ და ს. კოუინიმ [50] ფორების ფარდობითი მოცულობის კონცეფციის საფუძველზე ააგეს არაწრფივი მათემატიკური მოდელი მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალებისთვის, ხოლო ამ მოდელის წრფივი ვერსია იგივე ავტორებმა შემოგვთავაზეს [20] სტატიაში. ნუნზიატო-კოუინის ამ მოდელებში განტოლებათა მთავარი სისტემა ჩაიწერა გადაადგილების ვექტორისა და ფორების ფარდობითი მოცულობის ცვლილების მიმართ. შემდეგ, დ. იეშანმა [35] ამავე კონცეფციაზე დაყრდნობით ააგო მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალების თერმოდრეკადობის წრფივი თეორია. ამასთანავე, ბოლო 40 წლის განმავლობაში ფარდობითი მოცულობის კონცეფციაზე დაფუძნებული აღნიშნული მოდელები განზოგადდა ამავე სტრუქტურის მქონე მასალებისათვის და [1, 27, 34, 51] ნაშრომებში აიგო სხვადასხვა მიკროსტრუქტურული თეორია. ამ მიმართულებით მიღებული ძირითადი შედეგები მოყვანილია [15, 36, 58] მონოგრაფიებში.

გასული საუკუნის 80-ანი წლებიდან პარალელურად მიმდინარეობდა მათემატიკური მოდელების აგება ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალებისთვის. კერძოდ, 1982 წელს რ. ვილსონმა და ე. აიფანტისმა [88] ააგეს ამავე სტრუქტურის მქონე დრეკადი მასალებისთვის დარსის კანონზე დაფუძნებული კვაზისტატიკის პირველი წრფივი თეორია. ამ თეორიის ძირითადი განტოლებები ჩაწერილია

გადაადგილების ვექტორის, ფორებსა და ბზარებში სითხის წნევების ცვლილებების მიმართ. ორგვარი ფოროვნობის მქონე დრეკადი და თერმოდრეკადი მასალების უფრო ზოგადი თეორიები აგებულია [3, 29, 40, 89] ნაშრომებში და სრულყოფილადაა გამოკვლეული [8, 9, 16, 30, 52, 53, 59, 61, 62, 65, 73-78, 82-84] სტატიებში.

უფრო მეტიც, ბოლო 20 წლის განმავლობაში მიმდინარეობს დარსის კანონზე დაფუძნებული ახალი მათემატიკური მოდელების აგება და მათი შესწავლა სამგვარი და ოთხგვარი ფოროვნობის მქონე მასალებისთვის. ამ მიმართულებით მიღებული ძირითადი შედეგების ფართო მიმოხილვა მოცემულია ბ. სტრაუგანის [60] და მ. სვანაძის [66] მონოგრაფიებში.

2014 წელს დ. იეშანმა და რ. ქვინტანილამ [38] განაზოგადეს ნუნზიატო-კოუინის წრფივი თეორია (იხ. [20]) და ააგეს ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების თერმოდრეკადობის წრფივი მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება ფორების ფარდობითი მოცულობის კონცეფციას. ამ ახალ თეორიაში დამოუკიდებელი ცვლადებია გადაადგილების ვექტორი, მასალის ტემპერატურის ცვლილება, ფორებისა და ბზარების ფარდობითი მოცულობების ცვლილებები. ბოლო წლებში მიმდინარეობს ამ თეორიის სხვადასხვა ამოცანის ინტენსიური შესწავლა. კერძოდ, ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები გამოკვლეულია [25, 26, 37, 41, 42, 63, 64, 67, 81] სტატიებში.

ფარდობითი მოცულობის კონცეფციაზე დაფუძნებული ფოროვანი გარემოს ალტერნატიული თეორიები აგებულია [11, 12, 23, 24] შრომებში. დღეისათვის ეს თეორიები შესწავლილია სხვადასხვა მკვლევარის მიერ და ლიტერატურის ფართო სია მოყვანილია [21, 22] მონოგრაფიებში. ფარდობითი მოცულობის კონცეფციის ისტორიული განვითარების შესახებ (1894 წლიდან დაწყებული) საინტერესო მიმოხილვა მოცემულია [21] წიგნში და [10] სტატიაში.

მნიშვნელოვანია აღინიშნოს შემდეგი: ა) დარსის კანონზე დაფუძნებულ თეორიებში გათვალისწინებულია ფორებში სითხის წნევის ცვლილება, ხოლო ფორების ფარდობითი მოცულობის ცვლილება უგულებელყოფილია (ანუ სხეულის დეფორმაციისას ფორების მოცულობა უცვლელია); ბ) ფორების ფარდობითი

მოცულობის კონცეფციაზე დაფუძნებულ თეორიებში გათვალისწინებულია ფორების ფარდობითი მოცულობის ცვლილება, ხოლო სითხის წნევის ცვლილება უგულებელყოფილია (ანუ სხეულის დეფორმაციისას ფორებში სითხის წნევა უცვლელია).

ცხადია, როცა ფოროვანი სხეული განიცდის დეფორმაციას, მაშინ ერთდროულად ხდება როგორც ფორების მოცულობის ცვლილება, ასევე ფორებში სითხის წნევის ცვლილება. უფრო მეტი, თუ ამ სამი მექანიკური სიდიდიდან (სხეულის დეფორმაცია, სითხის წნევის ცვლილება და ფორების მოცულობის ცვლილება) იცვლება ერთ-ერთი, მაშინ მოსალოდნელია დანარჩენი ორი სიდიდის ცვლილებაც.

მაშასადამე, ფოროვან სხეულთა მექანიკაში აღნიშნული სამი მექანიკური სიდიდის ცვლილება ბმული პროცესია და უფრო ზუსტი მათემატიკური მოდელის აგებისას სამივე სიდიდის ცვლილება ერთდროულად უნდა იყოს გათვალისწინებული. აქედან გამომდინარე, დარსის კანონისა და ფორების ფარდობითი მოცულობის კონცეფციის კომბინაცია იძლევა ფოროვანი მასალის მექანიკური თვისებების შესახებ უფრო ზუსტ და დეტალურ ინფორმაციას.

მეორე მხრივ, რადგან ფოროვანი მასალების მექანიკური თვისებები ბუნებით ბმულია, ამიტომ პრაქტიკულ ამოცანებში ვაწყდებით სხვადასხვა ბმულ პროცესებს, რომლებიც ფუნდამენტურ როლს თამაშობენ საინჟინრო და ბიოლოგიური ფოროვანი მასალების ფართო გამოყენებებში (დეტალებისთვის იხ. [45, 56, 57] და იქვე მითითებული ლიტერატურა). ცხადია, დარსის კანონისა და ფორების ფარდობითი მოცულობის კონცეფციის კომბინაციის საფუძველზე აგებული მოდელები გვაძლევს ფოროვანი სხეულების მექანიკური თვისებების უფრო დეტალურად აღწერის შესაძლებლობას. რის გამოც, ასეთი მოდელების აგება და მათი კვლევა უაღრესად მნიშვნელოვანია როგორც თეორიული, ასევე პრაქტიკული თვალსაზრისით.

აღნიშნული მექანიკური სიდიდეების ბმული პროცესის იდეა პირველად გამოყენებულ იქნა მ. სვანაძის მიერ [68, 69] შრომებში, რომლებშიც დარსის კანონისა და ფორების ფარდობითი მოცულობის კონცეფციის კომბინირებით აიგო

დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის ბმული მათემატიკური მოდელები მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალებისთვის. ახლახანს, შესაძლებელი გახდა ამ მოდელების განზოგადება. კერძოდ, აიგო დრეკადობისა და ბლანტი დრეკადობის ახალი ბმული მათემატიკური მოდელები ორგვარი და სამგვარი ფოროვნობის მქონე მასალებისთვის (იხ. [70-72, 79, 80]). შემდეგ, ამ მოდელების კვაზისტატიკის ამოცანები გამოკვლეულ იქნა [6, 7, 46-48] შრომებში.

წინამდებარე სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება მარტივი და ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი თეორიების კვაზისტატიკის მდგრადი რხევის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევას. პოტენციალთა მეთოდი (სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი) და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია კვლევის მთავარი საშუალებაა. მათემატიკურ ფიზიკასა და დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში ამ მეთოდის განვითარების შესახებ სრულყოფილი ინფორმაცია შესაბამისად მოცემულია [31, 32, 39] და [13, 43, 44] მონოგრაფიებში, ხოლო მრავალგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია მოყვანილია ს. მიხლინის [49] წიგნში.

1.2. ნაშრომის სტრუქტურა

სადისერტაციო ნაშრომის სტრუქტურა შემდეგნაირია. იგი შედგება ექვსი თავისგან. პირველი თავის წინა პარაგრაფში გაკეთდა ფოროვან სხეულთა კლასიკური და თანამედროვე ძირითადი მათემატიკური თეორიების მოკლე მიმოხილვა, ხოლო მომდევნო პარაგრაფში მოყვანილია ის ძირითადი ცნებები და აღნიშვნები, რომლებიც შემდეგ თავებში ხშირად იქნება გამოყენებული.

მეორე თავი ეძღვნება მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალების დრეკადობის ბმული კვაზისტატიკის თეორიის ამოცანების გამოკვლევას და იგი შედგება 7 პარაგრაფისგან. პარაგრაფ 2.1-ში მოყვანილია ამ თეორიის მდგრადი რხევის ძირითადი განტოლებები. განტოლებათა მთავარი სისტემა ჩაწერილია

გადაადგილების ვექტორის, ფორების ფარდობითი მოცულობისა და ფორებში სითხის წნევის ცვლილებების მიმართ. პარაგრაფ 2.2-ში ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით აგებულია ამ სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნი და დადგენილია მისი ძირითადი თვისებები. პარაგრაფ 2.3-ში ჩამოყალიბებულია ამ თეორიის მდგრადი რხევის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები. პარაგრაფ 2.4-ში მიღებულია გრინის ფორმულები (იგივეობები) და მომდევნო პარაგრაფში დამტკიცებულია ამ ამოცანების ერთადერთობის თეორემები. პარაგრაფ 2.6-ში აგებულია ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალები და დადგენილია მათი ძირითადი თვისებები. ბოლოს, პარაგრაფ 2.7-ში, პოტენციალთა მეთოდისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დამტკიცებულია ამ თეორიის მდგრადი რხევის სასაზღვრო ამოცანების კლასიკური ამონახსნების არსებობის თეორემები. ამ თავის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია [46] ნაშრომში.

მესამე თავში გამოკვლეულია მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალების თერმოდრეკადობის ბმული კვაზისტატიკის თეორიის ამოცანები და იგი შედგება 7 პარაგრაფისგან. პარაგრაფ 3.1-ში მოყვანილია ამ თეორიის მდგრადი რხევის ძირითადი განტოლებები. განტოლებათა მთავარი სისტემა ჩაწერილია გადაადგილების ვექტორის, ტემპერატურის, ფორების ფარდობითი მოცულობისა და ფორებში წნევის ცვლილებების მიმართ. პარაგრაფ 3.2-ში ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით აგებულია ამ სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნი და დადგენილია მისი ძირითადი თვისებები. პარაგრაფ 3.3-ში ჩამოყალიბებულია ამ თეორიის მდგრადი რხევის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები. პარაგრაფ 3.4-ში მიღებულია გრინის ფორმულები და მომდევნო პარაგრაფში დამტკიცებულია ამ ამოცანების ერთადერთობის თეორემები. პარაგრაფ 3.6-ში აგებულია ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალები და დადგენილია მათი ძირითადი თვისებები. ბოლოს, პარაგრაფ 3.7-ში, პოტენციალთა მეთოდისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დამტკიცებულია ამ თეორიის მდგრადი რხევის სასაზღვრო ამოცანების კლასიკური ამონახსნების არსებობის თეორემები. ამ თავის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია [47] ნაშრომში.

მეოთხე თავი ეძღვნება ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების დრეკადობის ბმული კვაზისტატიკის თეორიის ამოცანების გამოკვლევას და იგი შედგება 6 პარაგრაფისაგან. პარაგრაფ 4.1-ში მოყვანილია ამ თეორიის მდგრადი რხევის ძირითადი განტოლებები. განტოლებათა მთავარი სისტემა ჩაწერილია გადაადგილების ვექტორის, ფორებისა და ბზარების ფარდობითი მოცულობების, ფორებსა და ბზარებში სითხის წნევების ცვლილებების მიმართ. პარაგრაფ 4.2-ში ჩამოყალიბებულია ამ თეორიის მდგრადი რხევის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები. პარაგრაფ 4.3-ში მიღებულია გრინის ფორმულები და დამტკიცებულია ამ ამოცანების ერთადერთობის თეორემები. პარაგრაფ 4.4-ში ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით აგებულია ამ სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნი და დადგენილია მისი ძირითადი თვისებები. პარაგრაფ 4.5-ში აგებულია ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალები და დადგენილია მათი ძირითადი თვისებები. ბოლოს, პარაგრაფ 4.6-ში, დამტკიცებულია ამ თეორიის მდგრადი რხევის სასაზღვრო ამოცანების კლასიკური ამონახსნების არსებობის თეორემები. ამ თავის ძირითადი შედეგები იბეჭდება [48] ნაშრომში.

მეხუთე თავში გამოკვლეულია ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების თერმოდრეკადობის ბმული კვაზისტატიკის თეორიის ამოცანები და იგი შედგება 6 პარაგრაფისაგან. პარაგრაფ 5.1-ში მოყვანილია ამ თეორიის მდგრადი რხევის ძირითადი განტოლებები. განტოლებათა მთავარი სისტემა ჩაწერილია გადაადგილების ვექტორის, ტემპერატურის, ფორებისა და ბზარების ფარდობითი მოცულობების, ფორებსა და ბზარებში სითხის წნევების ცვლილებების მიმართ. პარაგრაფ 5.2-ში ჩამოყალიბებულია ამ თეორიის მდგრადი რხევის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები. პარაგრაფ 5.3-ში მიღებულია გრინის ფორმულები და დამტკიცებულია ამ ამოცანების ერთადერთობის თეორემები. პარაგრაფ 5.4-ში ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით აგებულია მდგრადი რხევის განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნი და დადგენილია მისი ძირითადი თვისებები. პარაგრაფ 5.5-ში აგებულია ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალები და დადგენილია მათი ძირითადი თვისებები. პარაგრაფ 5.6-ში

დამტკიცებულია ამ თეორიის მდგრადი რხევის სასაზღვრო ამოცანების კლასიკური ამონახსნების არსებობის თეორემები.

მეექვსე თავში შეჯამებულია სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები და მოყვანილია ამ შედეგების საფუძველზე მომავალი კვლევის შესაძლებლობები.

ბოლოს, სადისერტაციო ნაშრომს თან ერთვის გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხა, რომელიც შედგება 89 დასახელებისგან.

1.3. ძირითადი აღნიშვნები

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ იმ ძირითად ცნებებს და აღნიშვნებს, რომლებიც შემდეგში ხშირად იქნება გამოყენებული.

ვთქვათ, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ევკლიდეს სამგანზომილებიანი $\mathbb{R}^3$ სივრცის წერტილია, ხოლო t დროის პარამეტრია, $t \geq 0$. ვიგულისხმოთ, რომ ფოროვან სხეულს უჭირავს $\mathbb{R}^3$ სივრცის რაიმე არე. შემდეგში განვიხილავთ მარტივი და ორგვარი ფოროვნობის მქონე დრეკად სხეულებს, რომელთა ჩონჩხი იზოტროპული და ერთგვაროვანი მასალაა λ და μ ლამეს მუდმივებით და ρ სიმკვრივით, $\rho > 0$; შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ მარტივი ფოროვნობის შემთხვევაში სხეულს გააჩნია მაკრო მასშტაბის ზომის ფორები. ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალებს აქვთ როგორც მაკრო, ასევე მეზო (ან მიკრო) მასშტაბის ზომის ფორები, რომლებსაც ხშირად ბზარებს უწოდებენ. ამასთანავე, ფორები შევსებულია სითხით ან გაზით.

ნაშრომში გამოვიყენებთ სამეცნიერო ლიტერატურაში მიღებულ შემდეგ აღნიშვნებს: მუქი ფერის ლათინური ასოებით აღვნიშნავთ ვექტორებსა და მატრიცებს, ფუნქციის ზემოთ წერტილი კი ნიშნავს წარმოებულს t დროის მიმართ, ხოლო მძიმის შემდეგ ინდექსი ნიშნავს კერძო წარმოებულს შესაბამისი კოორდინატით. ამასთანავე, ლათინური და ბერძნული განმეორებითი ინდექსები შესაბამისად აღნიშნავენ ჯამს 1-დან 3-მდე და 1-დან 2-მდე.

შემდეგში, ∇ და Δ სიმბოლოებით შესაბამისად აღნიშნული იქნება გრადიენტისა და ლაპლასის ოპერატორები, ე.ი.

$$\nabla = \mathbf{D_x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right), \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

ამასთანავე, $\delta(\mathbf{x})$ და δ_{lj} სიმბოლოებით შესაბამისად აღვნიშნავთ დირაკის დელტას და კრონეკერის სიმბოლოს, ხოლო $\mathbf{J}_m = (\delta_{lj})_{m\times m}$ აღნიშნავს ერთეულოვან მატრიცას, სადაც m ნატურალური რიცხვია.

ორი ვექტორის $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_l)$ და $\mathbf{U}' = (U_1{}', U_2{}', \dots, U_l{}')$ სკალარული ნამრავლი აღვნიშნოთ $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}'$ სიმბოლოთი, სადაც

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}' = \sum_{j=1}^{l} U_j \overline{U_j'}$$

და $\overline{U_j'}$ არის U_j'-ის კომპლექსურად შეუღლებული ($l = 1,2,\cdots$). როცა $l = 3$, მაშინ ამ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი აღვნიშნოთ $\mathbf{U} \times \mathbf{U}'$ სიმბოლოთი. სივრცის $\mathbf{x}$ წერტილზე და t დროზე დამოკიდებულ ფუნქციებს (ვექტორებს, მატრიცებს) აღვნიშნავთ $\widehat{\ }$ (ქუდი) სიმბოლოთი.

შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ Ω^+ არის $\mathbb{R}^3$-ის შემოსაზღვრული არე, რომლის საზღვარია S გლუვი ზედაპირი, $\overline{\Omega^+} = \Omega^+ \cup S$, ცხადია, $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$ უსასრულო არეა S საზღვრით, $\overline{\Omega^-} = \Omega^- \cup S$. ამასთანავე, $\mathbf{n}(\mathbf{z})$-ით აღვნიშნოთ S ზედაპირის $\mathbf{z}$ წერტილში გავლებული გარე (Ω^+-ის მიმართ) ერთეულოვანი ნორმალი, ხოლო $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ არის წარმოებული $\mathbf{n}$ ვექტორის მიმართულებით.

ვთქვათ, $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ დრეკადი ფოროვანი სხეულის ჩონჩხის $\mathbf{x}$ წერტილის გადაადგილების სამკომპონენტიანი ვექტორია დროის t მომენტში, $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$. $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t)$ ფუნქცია ფოროვანი სხეულის თავდაპირველი T_0 ტემპერატურის ცვლილებაა, $T_0 > 0$; $\hat{t}_{lj}(l, j = 1,2,3)$ ძაბვის ტენზორის კომპონენტია, $\hat{\mathbf{F}}' = (\hat{F}_1', \hat{F}_2', \hat{F}_3')$ მოცულობითი ძალაა, μ' და ρ_1 შესაბამისად სითხის სიბლანტე და სიმკვრივეა.

მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულის ფორების ფარდობითი მოცულობის ცვლილება აღვნიშნოთ $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$-ით, ხოლო ამ ფორებში სითხის წნევის ცვლილება $\hat{p}(\mathbf{x}, t)$ -ით. შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ $\hat{\sigma}_j$ $(j = 1,2,3)$ ფოროვანი სხეულის

მაწონასწორებელი ძალის კომპონენტია, $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$ სითხის ნაკადის ვექტორია, $\hat{s}_1$ სხეულის გარე მაწონასწორებელი მოცულობითი ძალაა, ხოლო $\hat{\mathbf{s}}_2$ სითხის გარე ძალაა ფოროვანი ფაზისთვის, κ' ფოროვანი სხეულის შიგა მაკროსკოპული გამტარიანობაა.

ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულის ფორებისა და ბზარების ფარდობითი მოცულობების ცვლილებები შესაბამისად აღვნიშნოთ $\hat{\varphi}_1(\mathbf{x}, t)$ და $\hat{\varphi}_2(\mathbf{x}, t)$-ით, ხოლო ამ ფორებსა და ბზარებში სითხის წნევების ცვლილებები - $\hat{p}_1(\mathbf{x}, t)$ და $\hat{p}_2(\mathbf{x}, t)$ -ით.

თავი 2. მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალების დრეკადობის ბმული კვაზისტატიკის თეორიის ამოცანები

2.1. ძირითადი განტოლებები

მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის განტოლებები ეფუძნება ერთმანეთთან დაკავშირებულ ოთხი ტიპის თანაფარდობებს, რომლებიც წარმოდგენილია შემდეგი სახით [46]:

1. **წონასწორობის განტოლებები**

$$\hat{t}_{lj,j} = -\rho \widehat{F}_l', \qquad \hat{\sigma}_{j,j} + \hat{\xi}_1 = -\rho \hat{s}_1, \qquad l = 1,2,3, \tag{2.1}$$

სადაც $\hat{\xi}$ ფუნქცია სხეულის შიდა წონასწორობის ძალაა, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი სახით

$$\hat{\xi}_1 = -b\hat{e}_{rr} - \alpha_1 \hat{\varphi} + m\hat{p}, \tag{2.2}$$

$\hat{e}_{lj}$ ძაბვის ტენზორის კომპონენტია, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$\hat{e}_{lj} = \frac{1}{2}\left(\hat{u}_{l,j} + \hat{u}_{j,l}\right). \tag{2.3}$$

2. **ძირითადი განტოლებები**

$$\hat{t}_{lj} = 2\mu\hat{e}_{lj} + \lambda\hat{e}_{rr}\delta_{lj} + (b\hat{\varphi} - \beta\hat{p})\delta_{lj},$$
$$\hat{\sigma}_l = \alpha\hat{\varphi}_{,l}, \qquad l,j = 1,2,3, \tag{2.4}$$

სადაც β ეფექტური ძაბვის პარამეტრია, ხოლო b, m, α და α_1 მასალის ძირითადი მუდმივებია.

3. **სითხის მასის შენახვის განტოლება**

$$\hat{v}_{j,j} + a\dot{\hat{p}} + \beta\dot{\hat{e}}_{rr} + m\dot{\hat{\varphi}} = 0, \tag{2.5}$$

სადაც a ფორების კუმშვადობის განმსაზღვრელი სიდიდეა.

4. **დარსის კანონი**

$$\hat{\mathbf{v}} = -\frac{\kappa'}{\mu'}\nabla\hat{p} - \rho_1\hat{\mathbf{s}}_2. \tag{2.6}$$

გავითვალისწინოთ (2.2)-(2.4) და (2.6) ტოლობები (2.1) და (2.5) თანაფარდობებში. ცხადია, მივიღებთ მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის განტოლებათა შემდეგ

სისტემას ჩაწერილს $\hat{\mathbf{u}}$ გადაადგილების ვექტორის, $\hat{\varphi}$ ფორების ფარდობითი მოცულობისა და $\hat{p}$ სითხის წნევის ცვლილებების მიმართ

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta\hat{\mathbf{u}} + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\,\hat{\mathbf{u}} + b\nabla\hat{\varphi} - \beta\nabla\hat{p} = -\rho\hat{\mathbf{F}}',\\
&\alpha\Delta\hat{\varphi} - \alpha_1\hat{\varphi} - b\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{u}} + m\hat{p} = -\rho\hat{s}_1,\\
&k\Delta\hat{p} - a\dot{\hat{p}} - \beta\,\mathrm{div}\,\dot{\hat{\mathbf{u}}} - m\dot{\hat{\varphi}} = -\rho_1\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{s}}_2,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

სადაც $k = \frac{\kappa'}{\mu'}$.

თუ $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{p}$, $\hat{\mathbf{F}}'$, $\hat{s}_1$ და $\hat{\mathbf{s}}_2$ ფუნქციები დროის პარამეტრზე ჰარმონიულადაა დამოკიდებული, მაშინ გვაქვს

$$\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p}, \hat{\mathbf{F}}', \hat{s}_1, \hat{\mathbf{s}}_2\}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Re}\big[\{\mathbf{u}, \varphi, p, \mathbf{F}', s_1, \mathbf{s_2}\}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\big].$$

ამ თანაფარდობის ძალით (2.7)-დან მივიღებთ მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის მდგრადი რხევის განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\,\mathbf{u} + b\nabla\varphi - \beta\nabla p = -\rho\mathbf{F}',\\
&(\alpha\Delta - \alpha_1)\varphi - b\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + mp = -\rho s_1,\\
&(k\Delta + i\omega a)p + i\omega(\beta\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + m\varphi) = -\rho_1\mathrm{div}\,\mathbf{s}_2,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

სადაც ω რხევის სიხშირეა, $\omega > 0$.

შემოვიღოთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი მატრიცულ დიფერენციალური ოპერატორი:

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x}) = \big(M_{lj}(\mathbf{D_x})\big)_{5\times 5}, \quad M_{lj} = \mu\Delta\delta_{lj} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j},$$

$$M_{l4} = -M_{4l} = b\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad M_{l5} = -\beta\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad M_{44} = \alpha\Delta - \alpha_1,$$

$$M_{45} = m, \quad M_{5l} = i\omega\beta\,\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad M_{54} = i\omega m, \quad M_{55} = k\Delta + i\omega a,$$

$$l, j = 1,2,3.$$

ცხადია, (2.8) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{2.9}$$

სადაც $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi, p)$ და $\mathbf{F} = (-\rho\mathbf{F}', -\rho s_1, -\rho_2\mathrm{div}\,\mathbf{s}_2)$ ხუთკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია და $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

2.2. ფუნდამენტური ამონახსნი

ამ თავში ვიგულისხმოთ, რომ მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალის ძირითადი მუდმივები აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad (3\lambda + 2\mu)\alpha_1 - 3b^2 > 0,$$
$$k > 0, \quad a > 0, \quad \alpha > 0. \tag{2.10}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mu_0 = \lambda + 2\mu, \quad a_1 = \mu_0\alpha_1 - b^2, \quad a_2 = \mu_0 m^2 - 2bm\beta + \alpha_1\beta^2,$$
$$a_3 = \mu_0 a + \beta^2, \quad a_4 = \mu_0 m - b\beta. \tag{2.11}$$

მაშინ (2.10) და (2.11)-დან გვაქვს

$$\mu_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad a_2 \geq 0, \quad a_3 > 0,$$
$$a_4^2 = \mu_0 a_2 - \beta^2 a_1 = \mu_0(aa_1 + a_2) - a_1 a_3, \quad aa_1 + a_2 > 0. \tag{2.12}$$

სამართლიანია შემდეგი ლემა.

ლემა 2.1. თუ ξ_1 და ξ_2 არის

$$\alpha k \mu_0 \xi^2 - (i\omega\alpha a_3 - k a_1)\xi - i\omega(aa_1 + a_2) = 0 \tag{2.13}$$

კვადრატული განტოლების ფესვები ξ-ის მიმართ, მაშინ

ა) $\xi_l \neq 0 \ (l = 1\,, 2)$;

ბ) $\xi_1 \neq \xi_2$;

გ) $\operatorname{Im} \xi_l \neq 0 \ (l = 1\,, 2)$, როცა $a_4 \neq 0$;

დ) $\xi_1 = -\dfrac{a_1}{\alpha\mu_0} < 0, \quad \xi_2 = \dfrac{i\omega a_3}{k\mu_0}$, როცა $a_4 = 0$.

დამტკიცება. (2.12)-ის ბოლო უტოლობიდან გვაქვს ა) თვისების სამართლიანობა. ასევე, (2.13) განტოლების $\mathcal{D}$ დისკრიმინანტი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმულით

$$\mathcal{D} = k^2 a_1^2 - \omega^2\alpha^2 a_3^2 - 2i\omega\alpha k[2\mu_0(aa_1 + a_2) - a_1 a_3].$$

რადგან

$$2\mu_0(aa_1 + a_2) - a_1 a_3 = 2a_4^2 + a_1 a_3 > 0.$$

ამიტომ $\mathcal{D} \neq 0$, ე.ი. გვაქვს ბ) შემთხვევის სამართლიანობა.

ვთქვათ, ξ_0 არის (2.13) განტოლების ნამდვილი ფესვი. მაშინ აღნიშნული განტოლების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების განცალებით მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$\alpha\mu_0\xi_0 + a_1 = 0, \qquad \alpha a_3\xi_0 + a a_1 + a_2 = 0. \tag{2.14}$$

(2.14)-დან შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ $\mu_0(a a_1 + a_2) - a_1 a_3 = 0$. თუ გავითვალისწინებთ (2.12)-ს, მივიღებთ $a_4 = 0$.

მაშასადამე, თუ $a_4 \neq 0$, მაშინ გვაქვს გ) შემთხვევის სამართლიანობა, ხოლო თუ $a_4 = 0$, მაშინ (2.12) და (2.13) თანაფარდობებიდან მივიღებთ დ) შემთხვევის სამართლიანობას. ■

განმარტება 2.1. $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \left(G_{lj}(\mathbf{x})\right)_{5\times5}$ მატრიცას ეწოდება (2.8) განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი, თუ განზოგადებულ ფუნქციათა კლასში იგი აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_5,$$

სადაც $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

ავაგოთ $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცა შემდეგი მეთოდით. პირველ რიგში განვიხილოთ განტოლებათა არაერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{aligned} &\mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} - b\nabla\varphi + i\omega\beta\nabla p = \boldsymbol{\mathcal{F}}', \\ &(\alpha\Delta - \alpha_1)\varphi + b\,\mathrm{div}\mathbf{u} + i\omega m p = \mathcal{F}_4, \\ &(k\Delta + i\omega a)p - \beta\,\mathrm{div}\mathbf{u} + m\varphi = \mathcal{F}_5, \end{aligned} \tag{2.15}$$

სადაც $\mathcal{F}_l$ $(l = 1,2,3,4,5)$ გლუვი ფუნქციებია $\mathbb{R}^3$-ში, $\boldsymbol{\mathcal{F}}' = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$. მაშინ, (2.15) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{x}), \tag{2.16}$$

სადაც $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$ არის $\mathbf{M}$ მატრიცის ტრანსპონირებული, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi, p)$, $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\boldsymbol{\mathcal{F}}', \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5)$.

ვიმოქმედოთ (2.15) სისტემის პირველ ტოლობაზე div ოპერატორით. რის შედეგადაც მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$\begin{aligned} &\mu_0\Delta\mathrm{div}\mathbf{u} - b\Delta\varphi + i\omega\beta\Delta p = \mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}', \\ &b\,\mathrm{div}\mathbf{u} + (\alpha\Delta - \alpha_1)\varphi + i\omega m p = \mathcal{F}_4, \\ &-\beta\,\mathrm{div}\mathbf{u} + m\varphi + (k\Delta + i\omega a)p = \mathcal{F}_5. \end{aligned} \tag{2.17}$$

ჩავწეროთ (2.17) სისტემა შემდეგი სახით

$$\mathbf{A}(\Delta)\mathbf{V} = \mathbf{\Phi}, \tag{2.18}$$

სადაც $\mathbf{V} = (\mathrm{div}\mathbf{u}, \varphi, p) = (V_1, V_2, V_3)$, $\mathbf{\Phi} = (\mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}', \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ და

$$\mathbf{A}(\Delta) = \left(A_{lj}(\Delta)\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \mu_0\Delta & -b\Delta & i\omega\beta\Delta \\ b & \alpha\Delta - \alpha_1 & i\omega m \\ -\beta & m & k\Delta + i\omega a \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Lambda_1(\Delta) = \frac{1}{\alpha k \mu_0}\det \mathbf{A}(\Delta) = \Delta(\Delta + \lambda_1^2)(\Delta + \lambda_2^2), \tag{2.19}$$

სადაც λ_1^2 და λ_2^2 არის (2.13) განტოლების ფესვები (ξ-ის მიმართ). ლემა 2.1-ის ძალით, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\mathrm{Im}\lambda_l > 0$ ($l = 1, 2$).

ადვილად ჩანს, რომ (2.18)-დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Lambda_1(\Delta)\mathrm{div}\mathbf{u} = \Psi_1, \qquad \Lambda_1(\Delta)\varphi = \Psi_2, \qquad \Lambda_1(\Delta)p = \Psi_3, \tag{2.20}$$

სადაც

$$\Psi_l = \frac{1}{\alpha k \mu_0} A_{jl}^* \Phi_j, \qquad l = 1, 2, 3 \tag{2.21}$$

და A_{jl}^* არის $\mathbf{A}$ მატრიცის A_{jl} ელემენტის ალგებრული დამატება.

ვიმოქმედოთ $\Lambda_1(\Delta)$ ოპერატორით (2.15) სისტემის პირველ ტოლობაზე და გამოვიყენოთ (2.20) თანაფარდობები. მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\Lambda_2\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{\Psi}}, \tag{2.22}$$

სადაც $\Lambda_2(\Delta) = \Delta\Lambda_1(\Delta)$ და

$$\widetilde{\mathbf{\Psi}} = \frac{1}{\mu}\Lambda_1\boldsymbol{\mathcal{F}}' - \frac{1}{\mu}\nabla[(\lambda + \mu)\Psi_1 - b\Psi_2 + i\omega\beta\Psi_3]. \tag{2.23}$$

ცხადია, (2.20) და (2.22)-ის ძალით გვაქვს

$$\mathbf{\Lambda}(\Delta)\mathbf{U} = \mathbf{\Psi}, \tag{2.24}$$

სადაც $\mathbf{\Psi} = (\widetilde{\mathbf{\Psi}}, \Psi_2, \Psi_3)$ ხუთკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა და

$$\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_{lj})_{5\times 5}, \qquad \Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \Lambda_{33} = \Lambda_2, \qquad \Lambda_{44} = \Lambda_{55} = \Lambda_1,$$

$$\Lambda_{lj} = 0, \qquad l \neq j, \qquad l, j = 1, 2, \ldots, 5. \tag{2.25}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$m_{l1} = -\frac{1}{\alpha k \mu \mu_0}[(\lambda + \mu)A_{l1}^* - bA_{l2}^* + i\omega\beta A_{l3}^*],$$

$$m_{lj} = \frac{1}{\alpha k \mu} A_{lj}^*, \qquad l = 1, 2, 3, \qquad j = 2, 3. \tag{2.26}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.26)-ს (2.21) და (2.23)-ში, მივიღებთ

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{1}{\mu}\Lambda_1\boldsymbol{\mathcal{F}}' + m_{11}\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}' + m_{21}\nabla\mathcal{F}_4 + m_{31}\nabla\mathcal{F}_5,$$

$$\Psi_2 = m_{12}\mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}' + m_{22}\mathcal{F}_4 + m_{32}\mathcal{F}_5,$$

$$\Psi_3 = m_{13}\mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}' + m_{23}\mathcal{F}_4 + m_{33}\mathcal{F}_5. \tag{2.27}$$

ცხადია, (2.27) ტოლობები შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\boldsymbol{\mathcal{F}}, \tag{2.28}$$

სადაც

$$\mathbf{N} = \left(N_{lj}\right)_{5\times5}, \qquad N_{lj} = \frac{1}{\mu}\Lambda_1\delta_{lj} + m_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j},$$

$$N_{l4} = m_{12}\frac{\partial}{\partial x_l}, \qquad N_{l5} = m_{13}\frac{\partial}{\partial x_l}, \qquad N_{4j} = m_{21}\frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$N_{44} = m_{22}, \qquad N_{45} = m_{23}, \qquad N_{5j} = m_{31}\frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$N_{54} = m_{32}, \qquad N_{55} = m_{33}, \qquad l,j = 1,2,3. \tag{2.29}$$

თუ (2.16) და (2.24) ტოლობებს გავითვალისწინებთ (2.28)-ში, გვექნება

$$\mathbf{M}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{N}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\Lambda}(\Delta). \tag{2.30}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

ა) $$\gamma_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}, \qquad \gamma_0'(\mathbf{x}) = -\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi}, \qquad \gamma_j(\mathbf{x}) = -\frac{e^{i\lambda_j|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}, \qquad j = 1,2; \tag{2.31}$$

ბ) $$\eta_{10} = \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}, \qquad \eta_{11} = \frac{1}{\lambda_1^2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}, \qquad \eta_{12} = \frac{1}{\lambda_2^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)},$$

$$\eta_{20} = -\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_1^4\lambda_2^4}, \qquad \eta_{21} = \frac{1}{\lambda_1^4(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}, \qquad \eta_{22} = \frac{1}{\lambda_2^4(\lambda_1^2-\lambda_2^2)};$$

გ) $$\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \left(\Upsilon_{lj}(\mathbf{x})\right)_{5\times5}, \qquad \Upsilon_{11}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{22}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{33}(\mathbf{x}) = \Upsilon_2(\mathbf{x}),$$

$$\Upsilon_{44}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{55}(\mathbf{x}) = \Upsilon_1(\mathbf{x}), \qquad \Upsilon_{lj}(\mathbf{x}) = 0, \qquad l \neq j, \qquad l,j = 1,2,\dots,5, \tag{2.32}$$

სადაც

$$\Upsilon_1(\mathbf{x}) = \eta_{10}\gamma_0(\mathbf{x}) + \eta_{11}\gamma_1(\mathbf{x}) + \eta_{12}\gamma_2(\mathbf{x}),$$

$$\Upsilon_2(\mathbf{x}) = \eta_{20}\gamma_0(\mathbf{x}) + \eta_{10}\gamma_0'(\mathbf{x}) + \eta_{21}\gamma_1(\mathbf{x}) + \eta_{22}\gamma_2(\mathbf{x}).$$

ცხადია,

$$\Delta\gamma_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \qquad \Delta^2\gamma_0'(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \qquad \left(\Delta + \lambda_j^2\right)\gamma_j(\mathrm{x}) = \delta(\mathbf{x}). \tag{2.33}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.19), (2.25), (2.32) და (2.33) თანაფარდობებს, შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა

$$\mathbf{\Lambda}(\Delta)\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_5, \tag{2.34}$$

ე.ი. $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x})$ არის $\mathbf{\Lambda}(\Delta)$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{D_x})\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}). \tag{2.35}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (2.30), (2.34) და (2.35) ტოლობებს, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{N}(\mathbf{D_x})\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Lambda}(\Delta)\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_5.$$

ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 2.1. $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (G_{lj}(\mathbf{x}))_{5\times5}$ მატრიცა, რომელიც განსაზღვრულია (2.35) ფორმულით, (2.8) სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნია, სადაც $\mathbf{N}(\mathbf{D_x})$ და $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x})$ მოცემულია (2.29) და (2.32) თანაფარდობებით.

ადვილად ჩანს, რომ $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცის $G_{lj}(\mathbf{x})$ ელემენტები წარმოდგება შემდეგი სახით

$$G_{lj}(\mathbf{x}) = N_{lj}(\mathbf{D_x})\Upsilon_2(\mathbf{x}), \quad G_{lm}(\mathbf{x}) = N_{lm}(\mathbf{D_x})\Upsilon_1(\mathbf{x}),$$
$$l = 1, 2, \dots, 5, \qquad j = 1, 2, 3, \qquad m = 4, 5.$$

თეორემა 2.1-დან გამომდინარეობს $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცის შემდეგი ძირითადი თვისებები.

თეორემა 2.2. $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცის თითოეული სვეტი წარმოადგენს

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნს, როცა $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

თეორემა 2.3. შემდეგი შეფასებები

$$G_{lj}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \qquad G_{44}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \qquad G_{55}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}),$$
$$G_{lm}(\mathbf{x}) = O(1), \qquad G_{mj}(\mathbf{x}) = O(1), \qquad G_{45}(\mathbf{x}) = O(1),$$
$$G_{54}(\mathbf{x}) = O(1), \qquad l, j = 1, 2, 3, \qquad m = 4, 5$$

სამართლიანია კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში.

თეორემა 2.4. $\mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{x}) = \left(G_{lj}^{(0)}(\mathbf{x})\right)_{5\times5}$ მატრიცა, რომელიც განსაზღვრულია თანაფარდობებით

$$G_{lj}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\left(\Delta\delta_{lj} - \frac{\lambda+\mu}{\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j}\right)\gamma_0'(\mathbf{x}) = -\frac{\lambda+3\mu}{8\pi\mu\mu_0}\frac{\delta_{lj}}{|\mathbf{x}|} - \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu\mu_0}\frac{x_l x_j}{|\mathbf{x}|^3},$$

$$G_{44}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha}\gamma_0(\mathbf{x}), \qquad G_{55}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{k}\gamma_0(\mathbf{x}),$$

$$G_{lm}^{(0)}(\mathbf{x}) = G_{mj}^{(0)}(\mathbf{x}) = G_{45}^{(0)}(\mathbf{x}) = G_{54}^{(0)}(\mathbf{x}) = 0,$$

$$l, j = 1,2,3, \qquad m = 4,5,$$

შემდეგი სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნია

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \alpha\Delta\varphi = 0, \qquad k\Delta p = 0.$$

თეორემა 2.5. შემდეგი თანაფარდობა

$$G_{lj}(\mathbf{x}) - G_{lj}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathrm{const} + O(|\mathbf{x}|), \qquad l, j = 1, 2, \ldots, 5$$

სამართლიანია კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში.

მაშასადამე, 2.3 და 2.5 თეორემების საფუძველზე კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში $\mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{x})$ მატრიცა წარმოადგენს $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ ფუნდამენტური მატრიცის სინგულარულ ნაწილს.

ასევე აღვნიშნოთ, რომ $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცა აგებულია $\gamma_0, \gamma_0', \gamma_1, \gamma_2$ ოთხი ელემენტარული ფუნქციის საშუალებით.

2.3. სასაზღვრო ამოცანები

განსაზღვრება 2.1. $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_5)$ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება რეგულარული Ω^--ში (ან Ω^+-ში), თუ

ა) $U_l \in C^2(\Omega^-) \cap C^1(\overline{\Omega^-})$ $\left(\text{ან } U_l \in C^2(\Omega^+) \cap C^1\left(\overline{\Omega^+}\right)\right)$,

ბ) $U_l(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1})$, $\qquad U_{l,j}(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|^{-1})$, (2.36)

როცა $|\mathbf{x}| \gg 1$, $l = 1,2,\ldots,5$ და $j = 1,2,3$.

შემდეგში გამოვიყენებთ $\mathbf{R}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = \left(R_{lj}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n})\right)_{5\times5}$ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორს, სადაც

$$R_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\mu\delta_{lj}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}+\mu n_j\frac{\partial}{\partial x_l}+\lambda n_l\frac{\partial}{\partial x_j},\qquad R_{l4}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=bn_l,$$

$$R_{l5}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=-\beta n_l,\quad R_{44}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\alpha\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}},\quad R_{55}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=k\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}},$$

$$R_{ml}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=R_{45}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=R_{54}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=0, \tag{2.37}$$

$$l,j=1,2,3,\quad m=4,5.$$

მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის მდგრადი რხევის ძირითადი შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად.

ვიპოვოთ (2.9) სისტემის რეგულარული $\mathbf{U}$ ამონახსნი, როცა $\mathbf{x}\in\Omega^+$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{\Omega^+\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^+=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{2.38}$$

შიგა $(I)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანაში და

$$\lim_{\Omega^+\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\mathbf{R}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\left\{\mathbf{R}\big(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\mathbf{U}(\mathbf{z})\right\}^+=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{2.39}$$

შიგა $(II)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანაში, სადაც $\mathbf{F}$ და $\mathbf{f}$ ხუთკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია.

ვიპოვოთ (2.9) სისტემის რეგულარული $\mathbf{U}$ ამონახსნი, როცა $\mathbf{x}\in\Omega^-$, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{\Omega^-\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^-=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{2.40}$$

გარე $(I)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანაში და

$$\lim_{\Omega^-\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\mathbf{R}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\left\{\mathbf{R}\big(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\mathbf{U}(\mathbf{z})\right\}^-=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{2.41}$$

გარე $(II)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანაში, სადაც $\mathbf{F}$ და $\mathbf{f}$ ხუთკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია და $\mathrm{supp}\mathbf{F}$ შემოსაზღვრულია Ω^--ში.

2.4. გრინის ფორმულები

ამ პარაგრაფში მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმულ წრფივ კვაზისტატიკის თეორიაში აიგება გრინის ფორმულები (იგივეობები),

რომლებსაც მომდევნო პარაგრაფებში გამოვიყენებთ მდგრადი რხევის სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამონახსნების ერთადერთობის საკითხის შესწავლისას.

შემდეგში გამოვიყენებთ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორებს:

ა) $$\mathbf{M}^{(0)}(\mathbf{D_x}) = \left(M_{lj}^{(0)}(\mathbf{D_x})\right)_{3\times3}, \qquad M_{lj}^{(0)}(\mathbf{D_x}) = \mu\Delta\delta_{lj} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j},$$

$$\mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{D_x}) = \left(M_{lr}^{(1)}(\mathbf{D_x})\right)_{3\times5}, \qquad M_{lr}^{(1)}(\mathbf{D_x}) = M_{lr}(\mathbf{D_x}),$$

$$\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{D_x}) = \left(M_{1r}^{(2)}(\mathbf{D_x})\right)_{1\times5}, \qquad M_{1r}^{(2)}(\mathbf{D_x}) = M_{4r}(\mathbf{D_x}),$$

$$\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{D_x}) = \left(M_{1r}^{(3)}(\mathbf{D_x})\right)_{1\times5}, \qquad M_{1r}^{(3)}(\mathbf{D_x}) = M_{5r}(\mathbf{D_x});$$

ბ) $$\mathbf{R}^{(0)}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = \left(R_{lj}^{(0)}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n})\right)_{3\times3}, \qquad R_{lj}^{(0)}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = R_{lj}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}),$$

$$\mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = \left(R_{lr}^{(1)}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n})\right)_{3\times5}, \qquad R_{lr}^{(1)}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = R_{lr}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}),$$

სადაც $l, j = 1, 2, 3$ და $r = 1, 2, \dots, 5$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$W^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\mathrm{div}\mathbf{u}\ \mathrm{div}\overline{\mathbf{u}'} + \frac{\mu}{2}\sum_{l,j=1; l\neq j}^{3}(u_{l,j} + u_{j,l})(\overline{u'_{l,j}} + \overline{u'_{j,l}})$$

$$+\frac{\mu}{3}\sum_{l,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \overline{u'_l}}{\partial x_l} - \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_j}\right),$$

$$W^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}') = W^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') + (b\varphi - \beta p)\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}'},$$

$$W^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi') = \alpha\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + (b\mathrm{div}\mathbf{u} - mp)\overline{\varphi'} + \alpha_1\varphi\overline{\varphi'},$$

$$W^{(3)}(\mathbf{U}, p') = k\nabla p \cdot \nabla p' - i\omega(ap + \beta\mathrm{div}\mathbf{u} + m\varphi)\overline{p'}. \tag{2.42}$$

სამართლიანია შემდეგი ლემა.

ლემა 2.2. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi, p)$ რეგულარული ვექტორია Ω^+-ში, $u'_j, \varphi' p' \in C^1(\Omega^+) \cap C\left(\overline{\Omega^+}\right)$, $j = 1, 2, 3$, მაშინ

$$\int_{\Omega^+}\left[\mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + W^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}')\right]d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}' d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+}\left[\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\varphi'(\mathbf{x})} + W^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi')\right]d\mathbf{x} = \alpha\int_S \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\overline{\varphi'} d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+} \left[\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{p'(\mathbf{x})} + W^{(3)}(\mathbf{U}, p')\right] d\mathbf{x} = k \int_S \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \overline{p'} d_{\mathbf{z}} S, \tag{2.43}$$

სადაც $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi', p')$, $\mathbf{u}' = (u_1', u_2', u_3')$.

დამტკიცება. სამართლიანია შემდეგი იგივეობები (მაგ., იხ. [44]):

$$\int_{\Omega^+} \left[\mathbf{M}^{(0)}(\mathbf{D_x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + W^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}')\right] d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{R}^{(0)}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{u}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{z}) d_{\mathbf{z}} S,$$

$$\int_{\Omega^+} \left[\Delta\varphi(\mathbf{x})\overline{\varphi'(\mathbf{x})} + \nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla\varphi'(\mathbf{x})\right] d\mathbf{x} = \int_S \frac{\partial\varphi(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})} \overline{\varphi'(\mathbf{z})} d_{\mathbf{z}} S,$$

$$\int_{\Omega^+} \left[\nabla\varphi(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) \operatorname{div}\overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x})}\right] d\mathbf{x} = \int_S \varphi(\mathbf{z})\mathbf{n}(\mathbf{z})\overline{\mathbf{u}'(\mathbf{z})} d_{\mathbf{z}} S. \tag{2.44}$$

ცხადია, (2.42)-ის ძალით (2.44)-დან მივიღებთ (2.43) იგივეობებს. ■

ლემა 2.2-ის და უსასრულობაში ქრობის (2.36) პირობის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა.

ლემა 2.3. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi, p)$ რეგულარული ვექტორია Ω^--ში, $u_j', \varphi', p' \in C^1(\Omega^-) \cap C(\overline{\Omega^-})$, $j = 1, 2, 3$, $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi', p')$ აკმაყოფილებს (2.36) პირობას, მაშინ

$$\int_{\Omega^-} \left[\mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + W^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}')\right] d\mathbf{x} = -\int_S \mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}' d_{\mathbf{z}} S,$$

$$\int_{\Omega^-} \left[\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\varphi'(\mathbf{x})} + W^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi')\right] d\mathbf{x} = -\alpha \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \overline{\varphi'} d_{\mathbf{z}} S,$$

$$\int_{\Omega^-} \left[\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{p'(\mathbf{x})} + W^{(3)}(\mathbf{U}, p')\right] d\mathbf{x} = -k \int_S \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \overline{p'} d_{\mathbf{z}} S. \tag{2.45}$$

ლემა 2.2 და ლემა 2.3-ის გამოყენებით მიიღება შემდეგი თეორემების სამართლიანობა.

თეორემა 2.6. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi, p)$ რეგულარული ვექტორია Ω^+-ში, $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi', p') \in C^1(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$, $j = 1, 2, 3$, მაშინ

$$\int_{\Omega^+} [\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}'(\mathbf{x}) + W(\mathbf{U}, \mathbf{U}')] d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{R}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{U}'(\mathbf{z}) d_{\mathbf{z}} S, \tag{2.46}$$

სადაც $W(\mathbf{U},\mathbf{U}')=W^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}')+W^{(2)}(\mathbf{U},\varphi')+W^{(3)}(\mathbf{U},p')$.

თეორემა 2.7. თუ $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\varphi,p)$ და $\mathbf{U}'=(\mathbf{u}',\varphi',p')$ რეგულარული ვექტორებია Ω^--ში, მაშინ

$$\int\limits_{\Omega^-}[\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{U}'(\mathbf{x})+W(\mathbf{U},\mathbf{U}')]d\mathbf{x}=-\int\limits_{S}\mathbf{R}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{U}'(\mathbf{z})d_{\mathbf{z}}S. \qquad (2.47)$$

(2.46) და (2.47) ფორმულები გრინის პირველი იგივეობებია Ω^+ და Ω^- არეებისთვის მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმულ წრფივ კვაზისტატიკის თეორიაში.

განვიხილოთ განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$\begin{aligned}&\mu\Delta\tilde{\mathbf{u}}+(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}}+b\nabla\tilde{\varphi}-i\omega\beta\nabla\tilde{p}=\mathbf{0},\\&(\alpha\Delta-\alpha_1)\tilde{\varphi}-b\,\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}}+i\omega m\tilde{p}=0,\\&(k\Delta+i\omega a)\tilde{p}+(\beta\,\mathrm{div}\tilde{\mathbf{u}}+m\tilde{\varphi})=0,\end{aligned} \qquad (2.48)$$

სადაც $\tilde{u}_l$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{p}$ ფუნქციები განსაზღვრულია $\Omega^\pm$-ში, $\tilde{\boldsymbol{u}}=(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3)$, $l=1,2,3$. ცხადია, (2.48) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{D_x})\widetilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x})=\mathbf{0}, \qquad (2.49)$$

სადაც $\widetilde{\mathbf{U}}=(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\varphi},\tilde{p})$ ხუთკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა, ხოლო $\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{D_x})=\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{D_x})$. ადვილად ჩანს, რომ $\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{D_x})=(\widetilde{M}_{lj}(\mathbf{D_x}))_{5\times5}$ არის $\mathbf{M}(\mathbf{D_x})$-ის ასოციაციური ოპერატორი.

განვსაზღვროთ $\widetilde{\mathbf{R}}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\left(\tilde{R}_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})\right)_{5\times5}$ მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორი შემდეგი სახით

$$\begin{gathered}\tilde{R}_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=R_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}),\qquad \tilde{R}_{l5}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=-i\omega\beta n_l,\qquad \tilde{R}_{rs}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=R_{rs}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}),\\ l=1,2,3,\qquad j=1,2,3,4,\qquad r=4,5,\qquad s=1,2,\dots,5,\end{gathered} \qquad (2.50)$$

სადაც $R_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})$ მოცემულია (2.37) ფორმულით.

უშუალო გამოთვლებით მივიღებთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 2.8. ვთქვათ, $\widetilde{\mathbf{U}}_j$ არის $\widetilde{\mathbf{U}}=(\widetilde{U}_{lj})_{5\times5}$ მატრიცის j-ური სვეტი. თუ $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\varphi,p)$ და $\widetilde{\mathbf{U}}_j$ ($j=1,2,\dots,5$) რეგულარული ვექტორებია $\Omega^\pm$-ში, მაშინ

$$\int\limits_{\Omega^\pm}\left\{\left[\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{D_y})\widetilde{\mathbf{U}}(\mathbf{y})\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{U}(\mathbf{y})-\left[\widetilde{\mathbf{U}}(\mathbf{y})\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{D_y})\mathbf{U}(\mathbf{y})\right\}d\mathbf{y}$$

$$= \pm \int_S \left\{ \left[\widetilde{\mathbf{R}}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n}) \widetilde{\mathbf{U}}(\mathbf{z}) \right]^{\mathrm{T}} \mathbf{U}(\mathbf{z}) - \left[\widetilde{\mathbf{U}}(\mathbf{z}) \right]^{\mathrm{T}} \mathbf{R}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n}) \mathbf{U}(\mathbf{z}) \right\} d_{\mathbf{z}} S. \qquad (2.51)$$

(2.51) ფორმულა წარმოადგენს გრინის მეორე იგივეობას Ω^+ და Ω^- არეებისათვის მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმულ წრფივ კვაზისტატიკის თეორიაში.

ვთქვათ, $\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ მატრიცა განსაზღვრულია ფორმულით

$$\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{x}), \qquad (2.52)$$

სადაც $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მოცემულია (2.35) თანაფარდობით. ცხადია, $\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ მატრიცა (2.49) განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნია.

თუ (2.51)-ში გამოვიყენებთ $\widetilde{\mathbf{U}}(\mathbf{y}) = \widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ მატრიცას, მაშინ (2.49) და (2.52) ფორმულებით სტანდარტული გამოთვლების შედეგად მივიღებთ შემდეგი თეორემების სამართლიანობას.

თეორემა 2.9. თუ $\mathbf{U}$ რეგულარული ვექტორია Ω^+-ში, მაშინ

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \int_S \left\{ \left[\widetilde{\mathbf{R}}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n}) \mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \right]^{\mathrm{T}} \mathbf{U}(\mathbf{z}) - \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \mathbf{R}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n}) \mathbf{U}(\mathbf{z}) \right\} d_{\mathbf{z}} S$$

$$+ \int_{\Omega^+} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{M}\big(\mathbf{D_y}\big) \mathbf{U}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \text{როცა} \quad \mathbf{x} \in \Omega^+. \qquad (2.53)$$

თეორემა 2.10. თუ $\mathbf{U}$ რეგულარული ვექტორია Ω^--ში, მაშინ

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = -\int_S \left\{ \left[\widetilde{\mathbf{R}}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n}) \mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \right]^{\mathrm{T}} \mathbf{U}(\mathbf{z}) - \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \mathbf{R}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n}) \mathbf{U}(\mathbf{z}) \right\} d_{\mathbf{z}} S$$

$$+ \int_{\Omega^+} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{M}\big(\mathbf{D_y}\big) \mathbf{U}(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y}, \quad \text{როცა} \quad \mathbf{x} \in \Omega^-. \qquad (2.54)$$

(2.53) და (2.54) ფორმულები გრინის მესამე იგივეობებია Ω^+ და Ω^- არეებისთვის მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმულ წრფივ კვაზისტატიკის თეორიაში.

2.5. ერთადერთობის თეორემები

ამ პარაგრაფში შევისწავლით $(I)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(II)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამონახსნების ერთადერთობის საკითხს.

ფორმულა (2.42)-დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$W^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}) = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + W^{(0)}(\mathbf{u}) + (b\varphi - \beta p)\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}},$$

$$W^{(2)}(\mathbf{U},\varphi) = \alpha|\nabla\varphi|^2 + \alpha_1|\varphi|^2 + (b\mathrm{div}\mathbf{u} - mp)\bar{\varphi},$$

$$W^{(3)}(\mathbf{U},p) = k|\nabla p|^2 - i\omega a|p|^2 - i\omega(\beta\mathrm{div}\mathbf{u} + m\varphi)\bar{p}, \tag{2.55}$$

სადაც

$$W^{(0)}(\mathbf{u}) = \frac{\mu}{2}\sum_{l,j=1;\ l\neq j}^{3}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right|^2 + \frac{\mu}{3}\sum_{l,j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right|^2. \tag{2.56}$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 2.11. თუ $(I)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანას გააჩნია რეგულარული ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(I)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანას აქვს ორი რეგულარული ამონახსნი. მაშინ მათი სხვაობა $\mathbf{U}$ იქნება $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ შიგა ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{U}$ არის

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{2.57}$$

ერთგვაროვანი განტოლების რეგულარული ამონახსნი, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^+$ და აკმაყოფილებს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობას

$$\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^+ = \mathbf{0}, \text{ როცა } \mathbf{z} \in S. \tag{2.58}$$

თუ (2.55)-(2.58)-ს გავითვალისწინებთ (2.43)-ში, მაშინ მივიღებთ

$$\int_{\Omega^+} W^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\,d\mathbf{x} = 0, \qquad \int_{\Omega^+} W^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)\,d\mathbf{x} = 0,$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}^+} W^{(3)}(\mathbf{U},p)\,d\mathbf{x} = 0. \tag{2.59}$$

ასევე, (2.55) ფორმულებიდან მარტივად მტკიცდება შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა

$$\mathrm{Re}[W^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})]=\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2+W^{(0)}(\mathbf{u})+b\mathrm{Re}[\varphi\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}]-\beta\mathrm{Re}[p\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}],$$

$$\mathrm{Re}\big[W^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)\big]=\alpha|\nabla\varphi|^2+\alpha_1|\varphi|^2+b\mathrm{Re}[\varphi\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}]-m\mathrm{Re}[\varphi,\bar{p}],$$

$$\mathrm{Im}\big[W^{(3)}(\mathbf{U},p)\big]=-\omega a|p|^2-\omega\beta\mathrm{Re}[p\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}]-\omega m\mathrm{Re}[\varphi,\bar{p}].$$

აქედან გამომდინარე ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathrm{Re}\big[W^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\big]+\mathrm{Re}\big[W^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)\big]-\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\big[W^{(3)}(\mathbf{U},p)\big]=\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2$$

$$+2b\mathrm{Re}[\varphi\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}]+\alpha_1|\varphi|^2+W^{(0)}(\mathbf{u})+\alpha|\nabla\varphi|^2+a|p|^2. \tag{2.60}$$

გამოვიყენოთ (2.10) თანაფარდობები (2.60)-ში, მაშინ მივიღებთ

$$\mathrm{Re}\big[W^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\big]+\mathrm{Re}\big[W^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)\big]-\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\big[W^{(3)}(\mathbf{U},p)\big]\geq 0. \tag{2.61}$$

სადაც (2.53)-დან გვაქვს

$$\int\limits_{\Omega^+}\left\{\mathrm{Re}\big[W^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\big]+\mathrm{Re}\big[W^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)\big]-\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\big[W^{(3)}(\mathbf{U},p)\big]\right\}d\mathbf{x}=0. \tag{2.62}$$

თუ (2.62) ტოლობას ჩავსვამთ (2.60) და (2.61) თანაფარდობებში, მაშინ მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\begin{gathered}\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2+2b\mathrm{Re}[\varphi\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}]+\alpha_1|\varphi|^2=0,\\ W^{(0)}(\mathbf{u})=0,\\ |p|^2=0.\end{gathered} \tag{2.63}$$

ცხადია, (2.63)-ის პირველი და მესამე ტოლობებიდან გვაქვს

$$\varphi(\mathbf{x})=p(\mathbf{x})=0 \tag{2.64}$$

და

$$\mathrm{div}\mathbf{u}(\mathbf{x})=0, \tag{2.65}$$

როცა $\mathbf{x}\in\Omega^+$.

ამასთან ერთად, (2.56) და (2.65) თანაფარდობიდან (2.63)-ის მეორე ტოლობის ძალით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\mathbf{u}$ ხისტი გაადგილების ვექტორია და ჩაიწერება შემდეგი ფორმით

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\widetilde{\boldsymbol{a}}+\widetilde{\boldsymbol{b}}\times\mathbf{x}, \tag{2.66}$$

სადაც $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ და $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ ნებისმიერი სამკომპონენტიანი მუდმივი ვექტორებია. თუ გავითვალისწინებთ (2.66)-ს (2.58) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობაში, მაშინ მივიღებთ $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^+$. აქედან გამომდინარე, $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^+$. ■

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.12. $(II)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანის ორი რეგულარული ამონახსნი ერთმანეთისგან განსხვავდება $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi, p)$ ვექტორით, სადაც φ და p აკმაყოფილებენ (2.64) პირობას, ხოლო $\mathbf{u}$ ხისტი გადაადგილების ვექტორია და აქვს (2.66)-ის ფორმა, სადაც $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ და $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ სამკომპონენტიანი მუდმივი ვექტორებია და $\mathbf{x} \in \Omega^+$.

თეორემა 2.13. თუ $(K)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ გარე სასაზღვრო ამოცანას აქვს რეგულარული ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია, სადაც $K = I, II$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(K)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ $(K = I, II)$ ამოცანას აქვს ორი რეგულარული ამონახსნი. მაშინ მათი სხვაობა $\mathbf{U}$ არის $(K)^+_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{U}$ წარმოადგენს (2.57) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნს, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^-$, აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას

$$\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^- = \mathbf{0} \tag{2.67}$$

$K = I$ შემთხვევაში და

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{D}_\mathbf{z}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^- = \mathbf{0} \tag{2.68}$$

$K = II$ შემთხვევაში.

ცხადია, (2.45)-დან (2.55), (2.67) და (2.68)-ის ძალით გვექნება

$$\int_{\Omega^-} W^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0, \qquad \int_{\Omega^-} W^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi) d\mathbf{x} = 0,$$

$$\int_{\Omega^-} W^{(3)}(\mathbf{U}, p) d\mathbf{x} = 0. \tag{2.69}$$

თეორემა 2.11-ისა და (2.69) თანაფარდობის გამოყენებით მივიღებთ (2.64) და (2.66) ტოლობებს, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^-$. ამასთან ერთად, (2.66)-დან (2.36)-ის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^-$ და გვექნება $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^+$. ■

2.6. ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალები

ამ პარაგრაფში განვსაზღვრავთ ზედაპირულ და მოცულობით პოტენციალებს და დავადგენთ მათ ძირითად თვისებებს, რომლებსაც გამოვიყენებთ მომდევნო პარაგრაფში.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

1) მარტივი ფენის პოტენციალი

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{g}(\mathbf{y})d_{\mathbf{y}}S,$$

2) ორმაგი ფენის პოტენციალი

$$\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \int_S [\widetilde{\mathbf{R}}(\mathbf{D}_\mathrm{y},\mathbf{n}(\mathbf{y})\mathbf{G}^\mathrm{T}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]^\mathrm{T}\,\mathbf{g}(\mathbf{y})d_{\mathbf{y}}S,$$

3) მოცულობითი პოტენციალი

$$\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^\pm) = \int_{\Omega^\pm} \mathbf{G}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\phi}(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

სადაც $\mathbf{G}$ არის $\mathbf{M}(\mathbf{D}_\mathbf{x})$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა და წარმოიდგინება (2.35) სახით, $\widetilde{\mathbf{R}}$ მოიცემა (2.50) ფორმულით, ხოლო $\mathbf{g}$ და $\boldsymbol{\phi}$ ხუთკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 2.14. თუ $S \in C^{r+1,v}, \mathbf{g} \in C^{r,v'}(S), 0 < v' < v \le 1$ და r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მაშინ

ა) $\mathbf{P}^{(1)}(.,\mathbf{g}) \in C^{0,v'}(\mathbb{R}^3) \cap C^{r+1,v'}(\overline{\Omega^\pm}) \cap C^\infty(\Omega^\pm)$,

ბ) $\mathbf{M}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^\pm$,

გ) $\mathbf{R}(\mathbf{D}_\mathbf{z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g})$ სინგულარული ინტეგრალია, როცა $\mathbf{z} \in S$,

დ) $\{\mathbf{R}(\mathbf{D}_\mathbf{z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\}^\pm = \mp\dfrac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{D}_\mathbf{z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}), \quad \boldsymbol{z} \in S,$ (2.70)

ე) $\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}),\ \dfrac{\partial}{\partial x_l}\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = O(|\mathbf{x}|^{-2})$,

როცა $|\mathbf{x}| \gg 1$ და $l = 1,2,3$.

თეორემა 2.15. თუ $S \in C^{r+1,v}, \mathbf{g} \in C^{r,v'}(S), 0 < v' < v \leq 1$, მაშინ

ა) $\mathbf{P}^{(2)}(.,\mathbf{g}) \in C^{r+1,v'}\left(\overline{\Omega^{\pm}}\right) \cap C^{\infty}(\Omega^{\pm})$,

ბ) $\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\pm}$,

გ) $\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})$ სინგულარული ინტეგრალია, როცა $\mathbf{z} \in S$,

დ) $\left\{\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\right\}^{\pm} = \pm\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}), \qquad \mathbf{z} \in S,$ (2.71)

ე) $\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = O(|\mathbf{x}|^{-2}),\ \ \frac{\partial}{\partial x_l}\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = O(|\mathbf{x}|^{-3})$

როცა $|\mathbf{x}| \gg 1$ და $l = 1,2,3$.

ვ) $\{\mathbf{R}(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\}^{+} = \{\mathbf{R}(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\}^{-}$,

სადაც r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ხოლო m ნატურალური რიცხვია და $\mathbf{z} \in S$.

თეორემა 2.16. თუ $S \in C^{r+1,v}, \boldsymbol{\phi} \in C^{r,v'}(\Omega^{+}), 0 < v' < v \leq 1$, მაშინ

ა) $\mathbf{P}^{(3)}(\cdot,\boldsymbol{\phi},\Omega^{+}) \in C^{1,v'}(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\Omega^{+}) \cap C^{2,v'}\left(\overline{\Omega_0^{+}}\right)$,

ბ) $\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^{+}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{+}$,

სადაც Ω_0^{+} არეა $\mathbb{R}^3$-ში და $\Omega_0^{+} \subset \Omega^{+}$, ხოლო r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია.

თეორემა 2.17. თუ $S \in C^{1,v}, \mathrm{supp}\boldsymbol{\phi} = \Omega \subset \Omega^{-}, \boldsymbol{\phi} \in C^{0,v'}(\Omega^{-}), 0 < v' < v \leq 1$, მაშინ

ა) $\mathbf{P}^{(3)}(\cdot,\boldsymbol{\phi},\Omega^{-}) \in C^{1,v'}(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\Omega^{-}) \cap C^{2,v'}(\overline{\Omega_0^{-}})$,

ბ) $\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^{-}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{-}$,

სადაც Ω არეა $\mathbb{R}^3$-ში და $\overline{\Omega_0^{-}} \subset \Omega^{-}$.

თეორემები 2.14-2.17 მტკიცდება მსგავსად, როგორც ანალოგიური თეორემები [44] ნაშრომში.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$\mathcal{N}^{(1)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{N}^{(2)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{R}\big(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{N}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{N}^{(4)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{R}\big(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{N}_\varsigma \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \varsigma \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}), \quad \mathbf{z} \in S, \tag{2.72}$$

სადაც ς კომპლექსური რიცხვია. თეორემა 2.14 და 2.15-ის საფუძველზე $\mathcal{N}^{(1)}$ $(r = 1,2,3,4)$ და $\mathcal{N}_\varsigma$ სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორებია.

თუ $\mathbf{\Gamma}^{(r)} = (\Gamma_{lj}^{(r)})_{5\times 5}$ არის $\mathcal{N}^{(r)}$ $(r = 1,2,3,4)$ ოპერატორის სიმბოლო, მაშინ (2.72)-დან გვაქვს

$$\det\mathbf{\Gamma}^{(1)} = \det\mathbf{\Gamma}^{(2)} = -\det\mathbf{\Gamma}^{(3)} = -\det\mathbf{\Gamma}^{(4)}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) = -\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)}{32\mu_0^2} < 0. \tag{2.73}$$

ცხადია, $\mathcal{N}^{(r)}$ ოპერატორი არის ნორმალური ტიპის, სადაც $r = 1,2,3,4$.

ამასთანავე, თუ $\mathbf{\Gamma}_\varsigma$ და $\mathrm{ind}\mathcal{N}_\varsigma$ შესაბამისად $\mathcal{N}_\varsigma$ ოპერატორის სიმბოლო და ინდექსია, მაშინ ანალოგიურად მივიღებთ

$$\det\mathbf{\Gamma}_\varsigma = -\frac{\mu_0^2 - \mu^2\varsigma^2}{32\mu_0^2}$$

და $\det\mathbf{\Gamma}_\varsigma = 0$ კომპლექსური სიბრტყის მხოლოდ ორ ς_1 და ς_2 წერტილში. თუ გავითვალისწინებთ (2.73)-ს და $\det\mathbf{\Gamma}_1 = \det\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ ტოლობას, შეგვიძლია დავწეროთ $\varsigma_j \neq 1$ $(j = 1,2)$ და

$$\mathrm{ind}\mathcal{N}_1 = \mathrm{ind}\mathcal{N}^{(1)} = \mathrm{ind}\mathcal{N}_0 = 0.$$

მსგავსად გვექნება

$$\mathrm{ind}\mathcal{N}^{(2)} = -\mathrm{ind}\mathcal{N}^{(1)} = 0, \qquad \mathrm{ind}\mathcal{N}^{(3)} = -\mathrm{ind}\mathcal{N}^{(4)} = 0.$$

ცხადია, სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი $\mathcal{N}^{(r)}$ $(r = 1,2,3,4)$ ნორმალური ტიპისაა და მისი ინდექსი ნულია. მაშასადამე, ამ ოპერატორებისთვის სამართლიანია ნეტერის თეორემები.

შევნიშნოთ, რომ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის ძირითადი ცნებები და თეორემები (მათ შორის ნეტერის თეორემები) მოყვანილია [44] და [49] მონოგრაფიებში.

2.7. არსებობის თეორემები

ამ პარაგრაფში დავამტკიცებთ $(K)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(K)^{-}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამონახსნების არსებობის თეორემებს პოტენციალთა მეთოდისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით, სადაც $K = I, II$.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 2.16 და თეორემა 2.17-ის საფუძველზე მოცულობითი პოტენციალი $\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{F}, \Omega^{\pm})$ არის (2.9) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი, სადაც $\mathbf{F} \in C^{0,\nu'}(\Omega^{\pm})$, $0 < \nu' \leq 1$, ხოლო $\mathrm{supp}\mathbf{F}$ შემოსაზღვრული არეა Ω^{-} -ში. რის გამოც, საკმარისია დავამტკიცოთ $(K)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ და $(K)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანების რეგულარული ამონახსნების არსებობის თეორემები. ცხადია, ამ თეორემებიდან მივიღებთ $(K)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(K)^{-}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამონახსნების არსებობას, სადაც $K = I, II$.

ამოცანა $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}), \tag{2.74}$$

სადაც $\mathbf{g}$ ხუთკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{x} \in \Omega^{+}$.

თეორემა 2.15-ის საფუძველზე, $\mathbf{U}$ ვექტორ-ფუნქცია (2.57)-ის ამონახსნია, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{+}$. თუ გავითვალისწინებთ (2.38) და (2.71)-ს, მაშინ (2.74)-დან მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{N}^{(1)}\mathbf{g}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{2.75}$$

სადაც $\mathbf{g}$ უცნობი ვექტორ-ფუნქციაა და $\boldsymbol{z} \in S$. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის (2.75) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია.

ცხადია, (2.75)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით

$$\mathcal{N}^{(2)}\mathbf{h}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}, \tag{2.76}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$, ხოლო $\mathbf{h}$ ხუთკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა. ვაჩვენოთ, რომ (2.76)-ს აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

ვთქვათ, $\mathbf{h}_0$ არის (2.76) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. თეორემა 2.14-ის და (2.76) ტოლობის საფუძველზე ვექტორ-ფუნქცია $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{h_0})$ იქნება $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$

ამოცანის რეგულარული ამონახსნი. როგორც ვიცით (იხ. თეორემა 2.13), $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ე.ი.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}, \tag{2.77}$$

სადაც $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$.

ასევე, თეორემა 2.14 და (2.77) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} = 0,$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. ცხადია, $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ ვექტორი $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნია და თეორემა 2.11-ის ძალით ვღებულობთ

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}, \tag{2.78}$$

როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{+}$. თუ გავითვალისწინებთ (2.70), (2.77) და (2.78) ფორმულებს, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathbf{h}_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \{\mathbf{R}(\mathbf{D}_{\mathbf{z}}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} - \{\mathbf{R}(\mathbf{D}_{\mathbf{z}}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0},$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

აქედან გამომდინარე, (2.76) განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ფრედჰოლმის თეორემის საფუძველზე (2.75) არაერთგვაროვანი განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის.

მაშასადამე, დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.18. თუ $S \in C^{2,\nu}, \mathbf{f} \in C^{1,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \leq 1$, მაშინ არსებობს $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი, რომელიც ერთადერთია და წარმოიდგინება (2.74) ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (2.75) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ყოველთვის ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის.

ამოცანა $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი მარტივი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \tag{2.79}$$

სადაც $\mathbf{h}$ ხუთკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. თეორემა 2.14-ის ძალით $\mathbf{U}$ ვექტორ-ფუნქცია (2.57) განტოლების ამონახსნია, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. ამასთანავე, (2.41) (2.70) ფორმულების გამოყენებით უცნობი $\mathbf{h}$ ვექტორისთვის (2.79)-დან მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{N}^{(2)}\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}),$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

თეორემა 2.18-ში დავამტკიცეთ, რომ (2.79) ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. აქედან გამომდინარე, (2.80) განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის და სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.19. თუ $S \in C^{2,v}, \mathbf{f} \in C^{0,v'}(S), 0 < v' < v \leq 1$, მაშინ $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი არსებობს, იგი ერთადერთია და წარმოიდგინება (2.79) მარტივი ფენის პოტენციალის სახით, სადაც $\mathbf{h}$ არის (2.80) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის.

ამოცანა $(I)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ჯამის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}), \tag{2.81}$$

სადაც $\mathbf{g}$ ხუთკომპონენტიანი უცნობი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$.

თეორემა 2.14 და თეორემა 2.15-ის ძალით $\mathbf{U}$ ვექტორ-ფუნქცია (2.59) განტოლების რეგულარული ამონახსნია, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. თუ გავითვალისწინებთ (2.40) სასაზღვრო პირობას და (2.71) ფორმულას, მაშინ (2.81)-დან უცნობი $\mathbf{g}$ ვექტორ-ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{N}^{(5)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) \equiv \mathcal{N}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{2.82}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

დავამტკიცოთ, რომ (2.82) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია. ცხადია, $\mathcal{N}^{(5)}$ ნორმალური ტიპის სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორია და $\operatorname{ind}\mathcal{N}^{(5)} = \operatorname{ind}\mathcal{N}^{(3)} = 0$. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ

$$\mathcal{N}^{(5)}\mathbf{g_0}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \tag{2.83}$$

ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

დავუშვათ, $\mathbf{g}_0$ არის (2.83) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. მაშინ

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}_0) + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}_0) \tag{2.84}$$

ვექტორი იქნება $(I)_{\mathbf{0,0}}^{-}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი და თეორემა 2.13-ის ძალით მივიღებთ (2.77) ტოლობას.

ასევე, (2.70), (2.71) და (2.80) ტოლობების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} - \{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} = \mathbf{g}_0(\mathbf{z}),$$
$$\{\mathbf{R}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} - \{\mathbf{R}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} = -\mathbf{g}_0(\mathbf{z}), \tag{2.85}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. თუ (2.85) თანაფარდობებში ჩავსვამთ (2.77)-ს, მივიღებთ

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z}) + \mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0}, \tag{2.86}$$

როცა $\boldsymbol{z} \in S$.

ცხადია, $\mathbf{V}$ ვექტორი (2.57) განტოლების ამონახსნია Ω^{+}-ში და აკმაყოფილებს (2.86) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას. თუ $\mathbf{V}$ ვექტორისთვის გამოვიყენებთ (2.43) იგივეობებს, მაშინ გვექნება

$$\int_{\Omega^+} W^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})d\mathbf{x} = -\int_S |\mathbf{u}|^2 d_{\mathbf{z}}S, \qquad \int_{\Omega^+} W^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)d\mathbf{x} = -\int_S |\varphi|^2\, d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+} W^{(3)}(\mathbf{U},p)d\mathbf{x} = -\int_S |p|^2\, d_{\mathbf{z}}S.$$

აქედან (2.60) იგივეობის გათვალისწინებით ვწერთ

$$\int_{\Omega^+} \left[\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + 2b\mathrm{Re}[\varphi\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}] + \alpha_1|\varphi|^2 + W^{(0)}(\mathbf{u}) + \alpha|\nabla\varphi|^2 + a|p|^2\right] d\mathbf{x}$$

$$= -\int_S (|\mathbf{u}|^2 + |\varphi|^2) d_{\mathbf{z}}S.$$

მიღებული ტოლობიდან (2.10) უტოლობების ძალით მარტივად მივიღებთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0}, \tag{2.87}$$

როცა $\boldsymbol{z} \in S$. ბოლოს, (2.85)-ის პირველი ტოლობიდან (2.77) და (2.87)-ის გათვალისწინებით გვაქვს $\mathbf{g}_0(\boldsymbol{z}) \equiv \mathbf{0}$, სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

მაშასადამე, (2.83) ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ფრედჰოლმის თეორემის საფუძველზე, ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის (2.82) ინტეგრალური განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია.

ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.20. თუ $S \in C^{2,v}, \mathbf{f} \in C^{1,v'}(S), 0 < v' < v \leq 1$, მაშინ $(I)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი არსებობს, იგი ერთადერთია და წარმოიდგინება (2.81) მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალის ჯამის სახით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (2.82) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის ყოველთვის ამოხსნადია.

ამოცანა $(II)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი მარტივი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}), \tag{2.88}$$

სადაც $\mathbf{g}$ ხუთკომპონენტიანი უცნობი ვექტორ-ფუნქცია და $\mathbf{x} \in \Omega^{+}$. თუ გავითვალისწინებთ (2.70) ფორმულას და (2.39) სასაზღვრო პირობას, მაშინ $\mathbf{g}$ ვექტორის მიმართ მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{N}^{(4)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{2.89}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

განვიხილოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mathcal{N}^{(4)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \tag{2.90}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. ცხადია, (2.90)-ის მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\mathcal{N}^{(3)}\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \tag{2.91}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

სამართლიანია შემდეგი ლემა.

ლემა 2.4. (2.90) და (2.91) ერთგვაროვან განტოლებებს აქვთ ექვსი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რომლებიც ქმნიან ამონახსნთა სრულ სისტემას.

დამტკიცება. (2.64) და (2.66) თანაფარდობების საფუძველზე შემოვიღოთ შემდეგი ხუთკომპონენტიანი ვექტორები:

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)} = (1,0,0,0,0), \qquad \boldsymbol{\phi}^{(2)} = (0,1,0,0,0), \qquad \boldsymbol{\phi}^{(3)} = (0,0,1,0,0),$$

$$\boldsymbol{\phi}^{(4)} = (0,-x_3,x_2,0,0), \qquad \boldsymbol{\phi}^{(5)} = (x_3,0,-x_1,0,0), \qquad \boldsymbol{\phi}^{(6)} = (-x_2,x_1,0,0,0). \tag{2.92}$$

ცხადია, $\left\{\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{6}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა. თეორემა 2.12-ის ძალით ყოველი $\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x})$ ვექტორი $(II)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნია და

ასევე, ამონახსნია (2.91) ერთგვაროვანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების. აქედან გამომდინარე, გვაქვს

$$\mathbf{M}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+},$$

$$\left\{\mathbf{R}(\mathbf{D}_{\mathbf{z}}, \mathbf{n})\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x})\right\}^{+} = \mathbf{0}, \qquad \mathcal{N}^{(4)}\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{z} \in S$$

და $j = 1,2,\dots,6$. აღნიშნულ (2.90) და (2.91) განტოლებებს აქვთ სულ მცირე ექვსი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\left\{\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{6}$ არის (2.91)-ის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა.

ვთქვათ, $\left\{\mathbf{g}^{(j)}(\mathbf{z})\right\}_{j=1}^{m}$ არის (2.90) ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა, სადაც $m \geq 6$. ავაგოთ მარტივი ფენის პოტენციალები $\mathbf{P}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \mathbf{g}^{(j)}\right)$ $(j = 1, 2, \dots, m)$. მათი წრფივი კომბინაცია გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \chi_j \mathbf{P}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \mathbf{g}^{(j)}\right) = \mathbf{P}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \sum_{j=1}^{m} \chi_j \mathbf{g}^{(j)}\right), \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+},$$

სადაც $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ ნებისმიერი მუდმივებია. აქედან გამომდინარე გვაქვს

$$\sum_{j=1}^{m} \chi_j \, \mathbf{g}^{(j)}(\boldsymbol{z}) = 0, \qquad \boldsymbol{z} \in S. \tag{2.93}$$

რადგან $\left\{\mathbf{g}^{(j)}(\mathbf{z})\right\}_{j=1}^{m}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა, ამიტომ (2.93)-დან ვწერთ $\chi_1 = \chi_2 = \cdots = \chi_m = 0$, ე.ი. $\left\{\mathbf{P}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \mathbf{g}^{(j)}\right)\right\}_{j=1}^{m}$ ვექტორთა სისტემაც წრფივად დამოუკიდებელია.

ამასთანავე, თითოეული $\mathbf{P}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \mathbf{g}^{(j)}\right)$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ ვექტორი $(II)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნია. თეორემა 2.12-ისა და (2.92)-ის საფუძველზე $\mathbf{P}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \mathbf{g}^{(j)}\right)$ ვექტორი შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით

$$\mathbf{P}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \mathbf{g}^{(j)}\right) = \sum_{l=1}^{6} \chi_{jl} \boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x}),$$

სადაც χ_{jl} ($j = 1,2, \dots., m; l = 1,2, \dots ,6$) ნებისმიერი მუდმივებია. აქედან გამომდინარე, $\left\{\mathbf{P}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \mathbf{g}^{(j)}\right)\right\}_{j=1}^{m}$ სისტემის ნებისმიერი ვექტორი წარმოიდგინება $\boldsymbol{\phi}^{(1)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\phi}^{(2)}(\mathbf{x})$, $\dots, \boldsymbol{\phi}^{(6)}(\mathbf{x})$ ექვსი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორის საშუალებით, ე.ი. $m = 6$.

ნეტერის თეორემის გამოყენებით (იხ. [44, 49]), (2.89) ინტეგრალური განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ჩაიწერება შემდეგი ფორმით

$$\int_S \mathbf{f}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{z}) d_{\boldsymbol{z}} S = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, 6, \tag{2.94}$$

სადაც $\boldsymbol{\phi}^{(j)}$ განსაზღვრულია (2.92)-ით.

ცხადია, თუ $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_5)$ და $\mathbf{f}^{(0)} = (f_1, f_2, f_3)$, მაშინ (2.92)-ის საფუძველზე (2.94) თანაფარდობა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\int_S \mathbf{f}^{(0)}(\boldsymbol{z}) d_{\boldsymbol{z}} S = \mathbf{0}, \qquad \int_S \boldsymbol{z} \times \mathbf{f}^{(0)}(\boldsymbol{z}) d_{\boldsymbol{z}} S = \mathbf{0}. \tag{2.95}$$

მაშასადამე, დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.21. თუ $S \in C^{2,\nu}, \mathbf{f} \in C^{0,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \leq 1$, მაშინ $(II)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანა ამოხსნადია, როცა შესრულებულია (2.95) პირობა. ასეთ შემთხვევაში ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება (2.88) მარტივი ფენის პოტენციალის სახით და განსაზღვრულია $\widetilde{\mathbf{U}} = (\widetilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varphi}, \tilde{p})$ შესაკრები ვექტორის სიზუსტით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (2.89) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი და

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \widetilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{x}, \qquad \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \tilde{p}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+},$$

ხოლო $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ და $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ ნებისმიერი სამკომპონენტიანი მუდმივი ვექტორებია.

თავი 3. მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალების თერმოდრეკადობის ბმული კვაზისტატიკის თეორიის ამოცანები

3.1. ძირითადი განტოლებები

მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის მოძრაობის განტოლებები ეფუძნება ერთმანეთთან დაკავშირებულ ექვსი ტიპის შემდეგ თანაფარდობებს (იხ. [47]).

1. **წონასწორობის განტოლებები**

$$\hat{t}_{lj,j} = -\rho \hat{F}_l', \qquad \hat{\sigma}_{j,j} + \hat{\xi}_2 = -\rho \hat{s}_1, \qquad l = 1,2,3, \tag{3.1}$$

სადაც $\hat{\xi}$ ფუნქცია სხეულის შიგა წონასწორობის ძალაა, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$\hat{\xi}_2 = -b\hat{e}_{rr} - \alpha_1 \hat{\varphi} + m\hat{p} + \gamma_1 \hat{\theta}, \tag{3.2}$$

$\hat{e}_{lj}$ ძაბვის ტენზორის კომპონენტია, რომელიც განსაზღვრულია (2.3) ფორმულით.

2. **ძირითადი განტოლებები**

$$\begin{aligned} &\hat{t}_{lj} = 2\mu \hat{e}_{lj} + \lambda \hat{e}_{rr}\delta_{lj} + \left(b\hat{\varphi} - \beta\hat{p} - \gamma_0\hat{\theta}\right)\delta_{lj}, \\ &\hat{\sigma}_l = \alpha \hat{\varphi}_{,l}, \qquad\qquad l,j = 1,2,3. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3. **სითხის მასის შენახვის განტოლება**

$$\hat{v}_{j,j} + a_0\dot{\hat{p}} + \beta\dot{\hat{e}}_{rr} + m\dot{\hat{\varphi}} + \gamma_2\dot{\hat{\theta}} = 0, \tag{3.4}$$

სადაც a_0 ფორების კუმშვადობის განმსაზღვრელი სიდიდეა.

4. **დარსის კანონი**

$$\hat{\mathbf{v}} = -\frac{\kappa'}{\mu'}\nabla\hat{p} - \rho_1 \hat{\mathbf{s}}_2. \tag{3.5}$$

5. **ფურიეს სითბოგამტარობის კანონი**

$$\hat{\mathbf{q}} = -\kappa\nabla\hat{\theta}, \tag{3.6}$$

სადაც $\hat{\mathbf{q}}$ სითბოს ნაკადის ვექტორია, ხოლო κ ფოროვანი მასალის თბოგამტარობაა.

6. **სითბოს გადაცემის განტოლება**

$$\mathrm{div}\hat{\mathbf{q}} = -T_0\dot{\hat{\eta}} + \rho\hat{s}_3, \tag{3.7}$$

სადაც $\hat{\eta}$ ენტროპიაა და განსაზღვრულია შემდეგი სახით

$$\hat{\eta} = a\hat{\theta} + \gamma_0 \hat{e}_{rr} + \gamma_1 \hat{\varphi} + \gamma_2 \hat{p}, \tag{3.8}$$

სადაც a სხეულის სითბოტევადობაა, ხოლო $\hat{s}_3$ სითბოს წყაროა.

ამ განტოლებებში $b, m, \alpha, \alpha_1, \gamma_0, \gamma_1$ და γ_2 მასალის ძირითადი მუდმივებია.

თუ გავითვალისწინებთ (2.3), (3.2), (3.4), (3.5) და (3.7) ტოლობებს (3.1), (3.3) და (3.6) თანაფარდობებში, მივიღებთ მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალების თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის განტოლებათა შემდეგ სისტემას ჩაწერილს $\hat{\mathbf{u}}$ გადაადგილების ვექტორის, $\hat{\varphi}$ ფორების ფარდობითი მოცულობის, $\hat{p}$ სითხის წნევისა და $\hat{\theta}$ ტემპერატურის ცვლილებების მიმართ

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta\hat{\mathbf{u}} + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div}\hat{\mathbf{u}} + b\nabla\hat{\varphi} - \beta\nabla\hat{p} - \gamma_0\nabla\hat{\theta} = -\rho\hat{\mathbf{F}}',\\
&\alpha\Delta\hat{\varphi} - \alpha_1\hat{\varphi} - b\operatorname{div}\hat{\mathbf{u}} + m\hat{p} + \gamma_1\hat{\theta} = -\rho\hat{s}_1,\\
&k\Delta\hat{p} - a_0\dot{\hat{p}} - \beta\operatorname{div}\dot{\hat{\mathbf{u}}} - m\dot{\hat{\varphi}} - \gamma_2\dot{\hat{\theta}} = -\rho_1\operatorname{div}\hat{\mathbf{s}}_2,\\
&\kappa\Delta\hat{\theta} - T_0\left(a\dot{\hat{\theta}} + \gamma_0\operatorname{div}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \gamma_1\dot{\hat{\varphi}} + \gamma_2\dot{\hat{p}}\right) = -\rho\hat{s}_3,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

სადაც $k = \frac{\kappa'}{\mu'}$.

თუ $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{p}$, $\hat{\theta}$, $\widehat{\mathbf{F}}'$, $\hat{s}_1$, $\hat{\mathbf{s}}_2$ და $\hat{s}_3$ ფუნქციები დროის პარამეტრზე ჰარმონიულადაა დამოკიდებული, ე.ი.

$$\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\varphi}, \hat{p}, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{F}}', \hat{s}_1, \hat{\mathbf{s}}_2, \hat{s}_3\}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}[\{\mathbf{u}, \varphi, p, \theta, \mathbf{F}', s_1, \mathbf{s_2}, s_3\}\,(\mathbf{x})\; e^{-i\omega t}],$$

მაშინ (3.9)-დან მივიღებთ ამავე თეორიის მდგრადი რხევის განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + b\nabla\varphi - \beta\nabla p - \gamma_0\nabla\theta = -\rho\mathbf{F}',\\
&(\alpha\Delta + \alpha_1)\varphi - b\operatorname{div}\mathbf{u} + mp + \gamma_1\theta = -\rho s_1,\\
&(k\Delta + a_0')p + \beta'\operatorname{div}\mathbf{u} + m'\varphi + \gamma_2'\theta = -\rho_1\operatorname{div}\mathbf{s}_2,\\
&(\kappa\Delta + a')\theta + \gamma_0'\operatorname{div}\mathbf{u} + \gamma_1'\varphi + \gamma_2' T_0 p = -\rho s_3,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

სადაც ω რხევის სიხშირეა, $\omega > 0$, $a_0' = i\omega a_0$, $\beta' = i\omega\beta$, $m' = i\omega m$, $\gamma_2' = i\omega\gamma_2$, $a' = i\omega T_0 a$, $\gamma_0' = i\omega T_0\gamma_0$, $\gamma_1' = i\omega T_0\gamma_1$.

შემოვიღოთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორი:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x}) = (\mathcal{M}_{lj}(\mathbf{D_x}))_{6\times 6}, \qquad \mathcal{M}_{lj}(\mathbf{D_x}) = \mu\Delta\delta_{lj} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j},$$

$$\mathcal{M}_{l4}(\mathbf{D_x}) = -\mathcal{M}_{4l}(\mathbf{D_x}) = b\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad \mathcal{M}_{l5}(\mathbf{D_x}) = -\beta\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad \mathcal{M}_{l6}(\mathbf{D_x}) = -\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$\mathcal{M}_{44}(\mathbf{D_x}) = \alpha\Delta - \alpha_1, \qquad \mathcal{M}_{45}(\mathbf{D_x}) = m, \qquad \mathcal{M}_{46}(\mathbf{D_x}) = \gamma_1,$$

$$\mathcal{M}_{5l}(\mathbf{D_x}) = \beta'\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad \mathcal{M}_{54}(\mathbf{D_x}) = m', \qquad \mathcal{M}_{55}(\mathbf{D_x}) = k\Delta - a_0', \quad \mathcal{M}_{56}(\mathbf{D_x}) = \gamma_2',$$

$$\mathcal{M}_{6l}(\mathbf{D_x}) = \gamma_0'\frac{\partial}{\partial x_l}, \qquad \mathcal{M}_{64}(\mathbf{D_x}) = \gamma_1', \qquad \mathcal{M}_{65}(\mathbf{D_x}) = \gamma_2' T_0,$$

$$\mathcal{M}_{66}(\mathbf{D_x}) = \kappa\Delta + a', \qquad\qquad l,j = 1,2,3.$$

ნათელია, (3.7) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{3.11}$$

სადაც $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi, p, \theta)$ და $\mathbf{F} = (-\rho\mathbf{F}', -\rho s_1, -\rho_2 \operatorname{div}\mathbf{s}_2, -\rho s_3)$ ექვსკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია და $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

ამ თავში ვიგულისხმოთ, რომ ფოროვანი მასალის ძირითადი მუდმივები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$\begin{aligned} &\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad (3\lambda+2\mu)\alpha_1 - 3b^2 > 0, \\ &k > 0, \quad a > 0, \quad \alpha > 0, \quad \kappa > 0, \quad aa_0 - \gamma_2^2 > 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2. ფუნდამენტური ამონახსნი

განმარტება 3.1. $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = (\mathcal{G}_{lj}(\mathbf{x}))_{6\times 6}$ მატრიცას ეწოდება (3.10) სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნი, თუ განზოგადებულ ფუნქციათა კლასში იგი აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_6,$$

სადაც $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

ავაგოთ $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ მატრიცა შემდეგი მეთოდით. თავდაპირველად განვიხილოთ არაერთგვაროვან განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} - b\nabla\varphi + \beta'\nabla p + \gamma_0'\nabla\theta = \boldsymbol{\mathcal{F}}',$$

$$
\begin{aligned}
&(\alpha\Delta-\alpha_1)\varphi+b\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+m'p+\gamma_1'\theta=\mathcal{F}_4,\\
&(k\Delta+a_0')p-\beta\mathrm{div}\,\mathbf{u}+m\varphi+\gamma_2'T_0\theta=\mathcal{F}_5,\\
&(\kappa\Delta+a')\theta-\gamma_0\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\gamma_1\varphi+\gamma_2'p=\mathcal{F}_6,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

სადაც $\boldsymbol{\mathcal{F}}'=(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)$, ხოლო $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\dots,\mathcal{F}_6$ გლუვი ფუნქციებია $\mathbb{R}^3$-ზე. გადავწეროთ (3.13) სისტემა შემდეგი სახით

$$
\boldsymbol{\mathcal{M}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{U}(\mathbf{x})=\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{x}),
\tag{3.14}
$$

სადაც $\boldsymbol{\mathcal{M}}^{\mathrm{T}}$ არის $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ მატრიცის ტრანსპონირებული, $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\varphi,p,\theta)$, $\boldsymbol{\mathcal{F}}=(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\dots,\mathcal{F}_6)$.

თუ (3.13) სისტემის პირველ განტოლებაზე ვამოქმედებთ div ოპერატორს, მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$
\begin{aligned}
&\mu_0\Delta\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}-b\Delta\varphi+\beta'\Delta p+\gamma_0'\Delta\theta=\mathrm{div}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}',\\
&b\mathrm{div}\,\mathbf{u}+(\alpha\Delta-\alpha_1)\varphi+m'p+\gamma_1'\theta=\mathcal{F}_4,\\
&-\beta\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+m\varphi+(k\Delta+a_0')p+\gamma_2'T_0\theta=\mathcal{F}_5,\\
&-\gamma_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\gamma_1\varphi+\gamma_2'p+(\kappa\Delta+a')\theta=\mathcal{F}_6,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

სადაც $\mu_0=\lambda+2\mu$. ცხადია, (3.15)-დან გვაქვს

$$
\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta)\mathbf{V}=\mathbf{\Phi},
\tag{3.16}
$$

სადაც $\mathbf{V}=(\mathrm{div}\,\mathbf{u},\varphi,p,\theta)=(V_1,V_2,V_3,V_4)$, $\mathbf{\Phi}=(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}',\mathcal{F}_4,\mathcal{F}_5,\mathcal{F}_6)=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4)$ და

$$
\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta)=(\mathcal{A}_{lj}(\Delta))_{4\times4}=\begin{pmatrix}
\mu_0\Delta & -b\Delta & \beta'\Delta & \gamma_0'\Delta\\
b & \alpha\Delta-\alpha_1 & m' & \gamma_1'\\
-\beta & m & k\Delta+a_0' & \gamma_2'T_0\\
-\gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2' & \kappa\Delta+a'
\end{pmatrix}_{4\times4}.
$$

შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$
\Lambda_1(\Delta)=\frac{1}{\alpha k\kappa\mu_0}\det\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta)=\Delta\prod_{j=1}^{3}\left(\Delta+\lambda_j^2\right),
$$

სადაც λ_1^2, λ_2^2 და λ_3^2 არის $\Lambda_1(-\xi)=0$ განტოლების ნულისგან განსხვავებული ფესვები ξ -ის მიმართ. ვიგულისხმოთ, რომ $\mathrm{Im}\lambda_l>0$, $\lambda_l\neq\lambda_j$ $(l,j=1,2,3,l\neq j)$. შემდეგი ტოლობები მარტივად მიიღება (3.16) ფორმულიდან

$$
\Lambda_1(\Delta)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}=\Psi_1,\quad \Lambda_1(\Delta)\varphi=\Psi_2,\quad \Lambda_1(\Delta)p=\Psi_3,\quad \Lambda_1(\Delta)\theta=\Psi_4,
\tag{3.17}
$$

სადაც

$$\Psi_l = \frac{1}{\alpha k\kappa\mu_0}\sum_{j=1}^{4}\mathcal{A}_{jl}^{*}\Phi_j, \qquad l = 1, 2, 3, 4 \tag{3.18}$$

და $\mathcal{A}_{jl}^{*}$ არის $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ მატრიცის $\mathcal{A}_{jl}$ ელემენტის ალგებრული დამატება.

თუ ვამოქმედებთ $\Lambda_1(\Delta)$ ოპერატორს (3.13) სისტემის პირველ განტოლებაზე, მივიღებთ

$$\Lambda_2(\Delta)\mathbf{u} = \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}, \tag{3.19}$$

სადაც

$$\Lambda_2(\Delta) = \Delta\Lambda_1(\Delta) = \Delta^2\prod_{j=1}^{3}\left(\Delta + \lambda_j^2\right)$$

და

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{1}{\mu}\Lambda_1\mathbf{F}' - \frac{1}{\mu}\nabla[(\lambda+\mu)\Psi_1 - b\Psi_2 + \beta'\Psi_3 + \gamma_0'\Psi_4\,]. \tag{3.20}$$

ამასთანავე, (3.17) და (3.19) ტოლობების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\boldsymbol{\Lambda}(\Delta)\mathbf{U} = \boldsymbol{\Psi}, \tag{3.21}$$

სადაც $\boldsymbol{\Psi} = (\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$ ექვსკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა და

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_{lj})_{6\times 6}, \quad \Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \Lambda_{33} = \Lambda_2, \quad \Lambda_{44} = \Lambda_{55} = \Lambda_{66} = \Lambda_1, \tag{3.22}$$

$$\Lambda_{lj} = 0, \quad l \neq j, \qquad l, j = 1, 2, \dots, 6.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$m_{l1} = -\frac{1}{\alpha k\kappa\mu\mu_0}[(\lambda+\mu)\mathcal{A}_{l1}^{*} - b\mathcal{A}_{l2}^{*} + \beta'\mathcal{A}_{l3}^{*} + \gamma_0'\mathcal{A}_{l4}^{*}], \tag{3.23}$$

$$m_{lj} = \frac{1}{\alpha k\kappa\mu_0}\mathcal{A}_{lj}^{*}, \qquad l = 1, 2, 3, 4, \qquad j = 2, 3, 4.$$

ცხადია, (3.18)-სა და (3.20)-ში (3.23)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{1}{\mu}\Lambda_1\boldsymbol{\mathcal{F}}' + m_{11}\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}' + \sum_{j=2}^{4} m_{j1}\nabla\mathcal{F}_{j+2}, \tag{3.24}$$

$$\Psi_l = m_{1l}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}' + \sum_{j=2}^{4} m_{jl}\mathcal{F}_{j+2,} \qquad l = 2, 3, 4.$$

მიღებული (3.24) ფორმულებიდან ვწერთ

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\mathcal{N}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\boldsymbol{\mathcal{F}}, \tag{3.25}$$

სადაც

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{D_x}) = (\mathcal{N}_{lj}(\mathbf{D_x}))_{6\times 6}, \quad \mathcal{N}_{lj}(\mathbf{D_x}) = \frac{1}{\mu}\Lambda_1(\Delta)\delta_{lj} + m_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j},$$

$$\mathcal{N}_{lr}(\mathbf{D_x}) = m_{1;r-2}\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad \mathcal{N}_{rl}(\mathbf{D_x}) = m_{r-2;1}\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad \mathcal{N}_{rs}(\mathbf{D_x}) = m_{r-2;s-2}, \tag{3.26}$$

$$l, j = 1, 2, 3, \qquad r, s = 4, 5, 6.$$

თუ გავაერთიანებთ (3.14) და (3.21) ფორმულებს (3.25)-თან, შეგვიძლია დავწეროთ $\mathbf{\Lambda U} = \boldsymbol{\mathcal{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{M}}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}$. ამ ტოლობიდან კი ადვილად მივიღებთ

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{D_x}) = \mathbf{\Lambda}(\Delta). \tag{3.27}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

ა) $\gamma_0(\mathbf{x}) = -\dfrac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \gamma_0'(\mathbf{x}) = -\dfrac{|\mathbf{x}|}{8\pi}, \quad \gamma_j(\mathbf{x}) = -\dfrac{e^{i\lambda_j|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad j = 1, 2, 3;$ (3.28)

ბ) $\eta_{10} = -\prod_{l=1}^{3}\lambda_l^{-2}, \quad \eta_{1j} = -\lambda_j^{-2}\prod_{l=1, l\neq j}^{3}\left(\lambda_j^2 - \lambda_l^2\right)^{-1}, \quad \eta_{20} = \eta_{10}\sum_{l=1}^{3}\lambda_l^{-2},$

$\eta_{2j} = \lambda_j^{-4}\prod_{l=1, l\neq j}^{3}\left(\lambda_j^2 - \lambda_l^2\right)^{-1}, \quad j = 1, 2, 3;$

გ) $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = (\Upsilon_{lj}(\mathbf{x}))_{6\times 6}, \quad \Upsilon_{11}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{22}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{33}(\mathbf{x}) = \Upsilon_2(\mathbf{x}),$

$\Upsilon_{44}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{55}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{66}(\mathbf{x}) = \Upsilon_1(\mathbf{x}), \quad \Upsilon_{lj}(\mathbf{x}) = 0,$ (3.29)

$$l \neq j, \qquad l, j = 1, 2, \dots, 6,$$

სადაც

$$\Upsilon_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{3}\eta_{1j}\gamma_j(\mathbf{x}), \quad \Upsilon_2(\mathbf{x}) = \eta_{10}\gamma_0'(\mathbf{x}) + \sum_{j=0}^{3}\eta_{2j}\gamma_j(\mathbf{x}).$$

მარტივი შესამჩნევია, რომ (3.22), (3.28) და (3.29) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\mathbf{\Lambda}(\Delta)\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_6, \tag{3.30}$$

ე.ი. $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x})$ არის $\mathbf{\Lambda}(\Delta)$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{D_x})\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}). \tag{3.31}$$

ცხადია, (3.27), (3.30) და (3.31) ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{D_x})\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Lambda}(\Delta)\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_6.$$

ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.1. მატრიცა $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = (\mathcal{G}_{lj}(\mathbf{x}))_{6\times6}$, რომელიც მოცემულია (3.31) ფორმულით, (3.10) სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნია, სადაც $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{D_x})$ და $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x})$ შესაბამისად განსაზღვრულია (3.26) და (3.29) ფორმულებით.

მარტივი შესამჩნევია, რომ $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ მატრიცის ყოველი $\mathcal{G}_{lj}(\mathbf{x})$ ელემენტი შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი სახით

$$\mathcal{G}_{lj}(\mathbf{x}) = \mathcal{N}_{lj}(\mathbf{D_x})\Upsilon_2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{G}_{lr}(\mathbf{x}) = \mathcal{N}_{lr}(\mathbf{D_x})\Upsilon_1(\mathbf{x}),$$
$$l = 1, 2, \dots, 5, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = 4, 5, 6.$$

თეორემა 3.1-დან მიიღება $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ მატრიცის შემდეგი ძირითადი თვისებები.

თეორემა 3.2. $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცის ყოველი სვეტი

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია, სადაც $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

თეორემა 3.3. შემდეგი შეფასებები

$$\mathcal{G}_{lj}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \mathcal{G}_{rr}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}) \text{ (არა ჯამი)},$$
$$\mathcal{G}_{lr}(\mathbf{x}) = O(1), \quad \mathcal{G}_{rl}(\mathbf{x}) = O(1), \quad \mathcal{G}_{4s}(\mathbf{x}) = O(1),$$
$$\mathcal{G}_{s4}(\mathbf{x}) = O(1), \quad \mathcal{G}_{56}(\mathbf{x}) = O(1), \quad \mathcal{G}_{65}(\mathbf{x}) = O(1),$$
$$l, j = 1, 2, 3, \quad r = 4, 5, 6, \quad s = 5, 6$$

სამართლიანია კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში.

თეორემა 3.4. მატრიცა $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(0)}(\mathbf{x}) = (\mathcal{G}_{lj}^{(0)}(\mathbf{x}))_{6\times6}$, რომელიც მოიცემა შემდეგი სახით

$$\mathcal{G}_{lj}^{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{\lambda + 3\mu}{8\pi\mu\mu_0}\cdot\frac{\delta_{lj}}{|\mathbf{x}|} - \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu\mu_0}\cdot\frac{x_l x_j}{|\mathbf{x}|^3},$$
$$\mathcal{G}_{44}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha}\gamma_0(\mathbf{x}), \quad \mathcal{G}_{55}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{k}\gamma_0(\mathbf{x}), \quad \mathcal{G}_{66}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa}\gamma_0(\mathbf{x}),$$
$$\mathcal{G}_{lr}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{rl}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{4s}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{s4}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{56}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{65}^{(0)}(\mathbf{x}) = 0,$$
$$l, j = 1, 2, 3, \quad r = 4, 5, 6, \quad s = 5, 6$$

არის

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\, \mathbf{u} = \mathbf{0},$$
$$\alpha\Delta\varphi = 0, \quad k\Delta p = 0, \quad \kappa\Delta\theta = 0$$

სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნი.

თეორემა 3.5. შემდეგი თანაფარდობა

$$\mathcal{G}_{lj}(\mathbf{x}) - \mathcal{G}_{lj}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathrm{const} + O(|\mathbf{x}|), \qquad l,j = 1,2,\dots,6$$

სამართლიანია კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში.

მაშასადამე, თეორემა 3.3 და თეორემა 3.5-ის ძალით $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(0)}(\mathbf{x})$ მატრიცა $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ ფუნდამენტური ამონახსნის სინგულარული ნაწილია.

ამასთანავე, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ მატრიცა აგებულია ხუთი ელემენტარული ფუნქციის $\gamma_0, \gamma_0', \gamma_1, \gamma_2$ და γ_3 საშუალებით (იხ. (3.28)).

3.3. სასაზღვრო ამოცანები

განმარტება 3.2. ვექტორ-ფუნქციას $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_6)$ ეწოდება რეგულარული Ω^-(ან Ω^+) არეში, თუ:

ა) $U_l \in C^2(\Omega^-) \cap C^1(\overline{\Omega^-}) \qquad \left(\text{ან } U_l \in C^2(\Omega^+) \cap C^1\left(\overline{\Omega^+}\right)\right);$

ბ) $U_l(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad U_{l,j}(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|^{-1}),$ (3.32)

სადაც $|\mathbf{x}| \gg 1, \; l = 1,2,\dots,6$ და $j = 1,2,3.$

ამ თავში გამოვიყენებთ შემდეგ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორს

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = (\mathcal{R}_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}))_{6\times 6},$$

სადაც

$$\begin{gathered}
\mathcal{R}_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mu\delta_{lj}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \lambda n_l \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \mathcal{R}_{l4}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = b n_l, \\
\mathcal{R}_{ls}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\beta n_l, \quad \mathcal{R}_{l6}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\gamma_0 n_l, \quad \mathcal{R}_{44}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \alpha\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}, \\
\mathcal{R}_{55}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = k\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}, \qquad \mathcal{R}_{66}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \kappa\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}, \\
\mathcal{R}_{rl}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathcal{R}_{4s}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathcal{R}_{s4}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathcal{R}_{56}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathcal{R}_{65}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = 0 \\
l,j = 1,2,3, \qquad r = 4,5,6, \qquad s = 5,6.
\end{gathered} \tag{3.33}$$

მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის შიგა და გარე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად.

ვიპოვოთ (3.11) განტოლების რეგულარული (კლასიკური) ამონახსნი Ω^+ არეში, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{\Omega^+ \ni \mathbf{x} \to \mathbf{z} \in S} \mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^+ = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{3.34}$$

შიგა $(I)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანაში და

$$\lim_{\Omega^+ \ni \mathbf{x} \to \mathbf{z} \in S} \boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \left\{\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D}_\mathbf{z}, \mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{U}(\mathbf{z})\right\}^+ = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{3.35}$$

შიგა $(II)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანაში, სადაც $\mathbf{F}$ და $\mathbf{f}$ ექვსკომპონენტიანი მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია.

ვიპოვოთ (3.11) განტოლების რეგულარული (კლასიკური) ამონახსნი Ω^- არეში, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{\Omega^- \ni \mathbf{x} \to \mathbf{z} \in S} \mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^- = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{3.36}$$

გარე $(I)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანაში და

$$\lim_{\Omega^- \ni \mathbf{x} \to \mathbf{z} \in S} \boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \left\{\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D}_\mathbf{z}, \mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{U}(\mathbf{z})\right\}^- = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{3.37}$$

გარე $(II)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანაში, სადაც $\mathbf{F}$ და $\mathbf{f}$ ექვსკომპონენტიანი მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია და $\mathrm{supp}\mathbf{F}$ ($\mathbf{F}$-ის საყრდენი) შემოსაზღვრულია Ω^- არეში.

3.4. გრინის იგივეობები

ამ პარაგრაფში მივიღებთ გრინის იგივეობებს მარტივი ფოროვნობის მქონე მასალების თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიისთვის.

შემდეგში გამოვიყენებთ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორებს:

1. $\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(0)}(\mathbf{D}_\mathbf{x}) = (\mathcal{M}^{(0)}_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x}))_{3\times3}, \qquad \mathcal{M}^{(0)}_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x}) = \mu\Delta\delta_{lj} + (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j},$

   $\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(1)}(\mathbf{D}_\mathbf{x}) = \left(\mathcal{M}^{(1)}_{lr}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\right)_{3\times6}, \qquad \mathcal{M}^{(1)}_{lr}(\mathbf{D}_\mathbf{x}) = M_{lr}(\mathbf{D}_\mathbf{x}),$

   $\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(s)}(\mathbf{D}_\mathbf{x}) = \left(\mathcal{M}^{(s)}_{1r}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\right)_{1\times6}, \qquad \mathcal{M}^{(s)}_{1r}(\mathbf{D}_\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{s+2;r}(\mathbf{D}_\mathbf{x});$

2. $\boldsymbol{\mathcal{R}}^{(0)}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \boldsymbol{n}) = (\mathcal{R}^{(0)}_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}))_{3\times3}, \qquad \mathcal{R}^{(0)}_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathcal{R}_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}),$

   $\boldsymbol{\mathcal{R}}^{(1)}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \boldsymbol{n}) = (\mathcal{R}^{(1)}_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}))_{3\times6}, \qquad \mathcal{R}^{(1)}_{lr}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathcal{R}_{lr}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \mathbf{n}),$

   სადაც $l, j = 1,2,3, \;\; s = 2,3,4$ და $r = 1,2,\dots,6$.

ვთქვათ, $u_1', u_2', u_3', \varphi', p'$ და θ' გლუვი ფუნქციებია, $\mathbf{u}' = (u_1', u_2', u_3')$, $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi', p', \theta')$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\operatorname{div}\mathbf{u}\operatorname{div}\overline{\mathbf{u}'} + \frac{\mu}{2}\sum_{l,j=1;l\neq j}^{3}(u_{l,j} + u_{j,l})(\overline{u_{l,j}'} + \overline{u_{j,l}'})$$

$$+ \frac{\mu}{3}\sum_{l,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \overline{u_l'}}{\partial x_l} - \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_j}\right),$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}') = \mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') + (b\varphi - \beta p - \gamma_0\theta)\operatorname{div}\overline{\mathbf{u}'},\\
&\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi') = \alpha\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi' + (b\operatorname{div}\mathbf{u} - mp - \gamma_1\theta)\overline{\varphi'} + \alpha_1\varphi\overline{\varphi'},\\
&\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U}, p') = k\nabla p \cdot \nabla p' - (a_0'p + \beta'\operatorname{div}\mathbf{u} + m'\varphi + \gamma_2'\theta)\overline{p'},\\
&\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U}, \theta') = \kappa\nabla\theta \cdot \nabla\theta' - (a'\theta + \gamma_0'\operatorname{div}\mathbf{u} + \gamma_1'\varphi + \gamma_2'T_0p)\overline{\theta'}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

სამართლიანია შემდეგი ლემა.

ლემა 3.1. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi, p, \theta)$ რეგულარული ვექტორია Ω^+ -ში და $u_j', \varphi', p', \theta' \in C^1(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$, $j = 1,2,3$, მაშინ

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(1)}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + \mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}')\right]d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{\mathcal{R}}^{(1)}(\mathbf{D}_\mathbf{z}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{z})d_\mathbf{z}S,\\
&\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(2)}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\,\overline{\varphi'(\mathbf{x})} + \mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi')\right]d\mathbf{x} = \alpha\int_S \frac{\partial\varphi(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})}\overline{\varphi'(\mathbf{z})}d_\mathbf{z}S,\\
&\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(3)}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\,\overline{p'(\mathbf{x})} + \mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U}, p')\right]d\mathbf{x} = k\int_S \frac{\partial p(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})}\overline{p'(\mathbf{z})}d_\mathbf{z}S,\\
&\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(4)}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\,\overline{\theta'(\mathbf{x})} + \mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U}, \theta')\right]d\mathbf{x} = \kappa\int_S \frac{\partial\theta(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})}\overline{\theta'(\mathbf{z})}d_\mathbf{z}S.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

დამტკიცება. როგორც ცნობილია (მაგ., იხ. [44]), დივერგენციის თეორემის გამოყენებით მტკიცდება შემდეგი იგივეობები:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(0)}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + W^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}')\right]d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{\mathcal{R}}^{(0)}(\mathbf{D}_\mathbf{z}, \mathbf{n})\mathbf{u}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{z})d_\mathbf{z}S,\\
&\int_{\Omega^+}\left[\Delta\varphi(\mathbf{x})\overline{\varphi'(\mathbf{x})} + \nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla\varphi'(\mathbf{x})\right]d\mathbf{x} = \int_S \frac{\partial\varphi(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})}\overline{\varphi'(\mathbf{z})}d_\mathbf{z}S,\\
&\int_{\Omega^+}\left[\nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})\operatorname{div}\overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x})}\right]d\mathbf{x} = \int_S \varphi(\mathbf{z})\mathbf{n}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{z})d_\mathbf{z}S.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

ცხადია, (3.38)-ის გათვალისწინებით (3.40)-დან მივიღებთ (3.39) ტოლობებს. ■

სრულიად ანალოგიურად, ლემა 3.1-ისა და (3.32) პირობების გამოყენებით შეგვიძლია ვაჩვენოთ შემდეგი ლემის სამართლიანობა.

ლემა 3.2. თუ $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\varphi,p,\theta)$ რეგულარული ვექტორია Ω^- არეში, $u_j',\varphi',p',\theta'\in C^1(\Omega^-)\cap C(\overline{\Omega^-})$, $j=1,2,3$ და $\mathbf{U}'=(\mathbf{u}',\varphi',p',\theta')$ აკმაყოფილებს (3.33) პირობებს, მაშინ

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega^-}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(1)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{x})+\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}')\right]d\mathbf{x}=-\int\limits_{S}\boldsymbol{\mathcal{R}}^{(1)}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{z})d_{\mathbf{z}}S,\\ \int\limits_{\Omega^-}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(2)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\,\overline{\varphi'(\mathbf{x})}+\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi')\right]d\mathbf{x}=-\,\alpha\int\limits_{S}\frac{\partial\varphi(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})}\overline{\varphi'(\mathbf{z})}d_{\mathbf{z}}S,\\ \int\limits_{\Omega^-}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(3)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\,\overline{p'(\mathbf{x})}+\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U},p')\right]d\mathbf{x}=-\,k\int\limits_{S}\frac{\partial p(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})}\overline{p'(\mathbf{z})}d_{\mathbf{z}}S,\\ \int\limits_{\Omega^-}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(4)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\,\overline{\theta'(\mathbf{x})}+\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U},\theta')\right]d\mathbf{x}=-\,\kappa\int\limits_{S}\frac{\partial\theta(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})}\overline{\theta'(\mathbf{z})}d_{\mathbf{z}}S.\end{gathered}\tag{3.41}$$

ლემა 3.1 და ლემა 3.2-დან მივიღებთ შემდეგი თეორემების სამართლიანობას.

თეორემა 3.6. თუ $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\varphi,p,\theta)$ რეგულარული ვექტორია Ω^+ არეში და $\mathbf{U}'=(\mathbf{u}',\varphi',p',\theta')\in C^1(\Omega^+)\cap C\left(\overline{\Omega^+}\right)$, მაშინ

$$\int\limits_{\Omega^+}[\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{U}'(\mathbf{x})+\mathcal{W}(\mathbf{U},\mathbf{U}')]d\mathbf{x}=\int\limits_{S}\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{U}'(\mathbf{z})d_{\mathbf{z}}S,\tag{3.42}$$

სადაც $\mathcal{W}(\mathbf{U},\mathbf{U}')=\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}')+\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi')+\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U},p')+\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U},\theta')$ და $\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})$ ოპერატორი განსაზღვრულია (3.33) ფორმულით.

თეორემა 3.7. თუ $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\varphi,p,\theta)$ და $\mathbf{U}'=(\mathbf{u}',\varphi',p',\theta')$ რეგულარული ვექტორებია Ω^- არეში, მაშინ

$$\int\limits_{\Omega^-}[\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{U}'(\mathbf{x})+\mathcal{W}(\mathbf{U},\mathbf{U}')]d\mathbf{x}=-\int\limits_{S}\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{U}'(\mathbf{z})d_{\mathbf{z}}S.\tag{3.43}$$

(3.42) და (3.43) ფორმულებს უწოდებენ გრინის პირველ იგივეობებს Ω^+ და Ω^- არეებისთვის მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების თერმოდრეკადობის ბმულ წრფივ კვაზისტატიკის თეორიაში.

ახლა განვიხილოთ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$
\begin{aligned}
&\mu\Delta\tilde{\mathbf{u}} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + b\nabla\tilde{\varphi} - \beta'\nabla\tilde{p} - \gamma_0'\nabla\tilde{\theta} = \mathbf{0},\\
&(\alpha\Delta - \alpha_1)\tilde{\varphi} - b\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + m'\tilde{p} + \gamma_1'\tilde{\theta} = 0,\\
&(k\Delta + a_0')\tilde{p} + \beta\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + m\tilde{\varphi} + \gamma_2'T_0\tilde{\theta} = 0,\\
&(\kappa\Delta + a')\tilde{\theta} + \gamma_0\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + \gamma_1\tilde{\varphi} + \gamma_2'\tilde{p} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

სადაც $\tilde{u}_l$ $(l = 1,2,3)$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{p}$, და $\tilde{\theta}$ გლუვი ფუნქციებია, $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$. ადვილად ჩანს, რომ (3.44) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{3.45}$$

სადაც $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varphi}, \tilde{p}, \tilde{\theta})$ ექვსკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა, $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x}) = (\widetilde{\mathcal{M}}_{lj}(\mathbf{D_x}))_{6\times 6}$ არის $\mathcal{M}(\mathbf{D_x})$-ის ასოცირებული ოპერატორი, ე.ი. $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x}) = \mathcal{M}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{D_x})$.

სამომავლოდ გამოვიყენებთ $\widetilde{\mathcal{R}}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = (\widetilde{\mathcal{R}}_{lj}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}))_{6\times 6}$ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორს, სადაც

$$
\begin{gathered}
\widetilde{\mathcal{R}}_{lj}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = \mathcal{R}_{lj}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}), \qquad \widetilde{\mathcal{R}}_{l5}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = -\beta' n_l, \qquad \widetilde{\mathcal{R}}_{l6}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = \gamma_0' n_l,\\
\widetilde{\mathcal{R}}_{rs}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = \mathcal{R}_{rs}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}), \quad l = 1,2,3, \quad j = 1,2,3,4, \quad r = 4,5,6, \quad s = 1,2,\dots,6,
\end{gathered}
\tag{3.46}
$$

ხოლო $\mathcal{R}_{lj}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n})$ განსაზღვრულია (3.33) ფორმულით.

უშუალო გამოთვლებით მივიღებთ შემდეგ დებულებებს.

თეორემა 3.8. ვთქვათ, $\mathbf{U}_j$ არის $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}_{lj})_{6\times 6}$ მატრიცის j-ური სვეტი. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi, p, \theta)$ და $\tilde{\mathbf{U}}_j$ $(j = 1,2,\dots,6)$ რეგულარული ვექტორებია $\Omega^{\pm}$ არეში, მაშინ

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega^{\pm}} \left\{ \left[\widetilde{\mathcal{M}}(\mathbf{D_y})\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{y})\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{U}(\mathbf{y}) - \left[\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{y})\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{M}(\mathbf{D_y})\mathbf{U}(\mathbf{y}) \right\} d\mathbf{y}\\
&= \pm \int\limits_{S} \left\{ \left[\widetilde{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{z})\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{U}(\mathbf{z}) - \left[\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{z})\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{R}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z}) \right\} d_{\mathbf{z}}S.
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

(3.47) ფორმულას ეწოდება გრინის მეორე იგივეობა $\Omega^{\pm}$ არისთვის მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების თერმოდრეკადობის ბმულ წრფივ კვაზისტატიკის თეორიაში.

შემოვიღოთ $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ მატრიცა შემდეგი ფორმულით

$$\widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{x}), \tag{3.48}$$

სადაც $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ არის (3.31) ფორმულით განსაზღვრული. ცხადია, $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ მატრიცა წარმოადგენს (3.45) განტოლების ფუნდამენტურ ამონახსნს.

თუ (3.47) ტოლობაში გავითვალისწინებთ $\widetilde{\mathbf{U}}(\mathbf{y})=\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ აღნიშვნას, მაშინ (3.45) და (3.48) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ შემდეგი თეორემების სამართლიანობას.

თეორემა 3.9. თუ $\mathbf{U}$ რეგულარული ვექტორია Ω^+ არეში, მაშინ

$$\mathbf{U}(\mathbf{x})=\int_S\left\{\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{z})\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{U}(\mathbf{z})-\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}-\mathbf{z})\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\right\}d_{\mathbf{z}}S$$

$$+\int_{\Omega^+}\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\mathcal{M}}\big(\mathbf{D_y}\big)\mathbf{U}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\qquad \mathbf{x}\in\Omega^+.\tag{3.49}$$

თეორემა 3.10. თუ $\mathbf{U}$ რეგულარული ვექტორია Ω^- არეში, მაშინ

$$\mathbf{U}(\mathbf{x})=-\int_S\left\{\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{z})\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{U}(\mathbf{z})-\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}-\mathbf{z})\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\right\}d_{\mathbf{z}}S$$

$$+\int_{\Omega^-}\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\mathcal{M}}\big(\mathbf{D_y}\big)\mathbf{U}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\qquad \mathbf{x}\in\Omega^-.\tag{3.50}$$

(3.49) და (3.50) ფორმულებს უწოდებენ გრინის მესამე იგივეობას Ω^+ და Ω^- არეებისთვის მარტივი ფოროვნობის მქონე სხეულების თერმოდრეკადობის ბმულ წრფივ კვაზისტატიკის თეორიაში.

3.5. ერთადერთობის თეორემები

ამ პარაგრაფში შევისწავლით $(I)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(II)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანების კლასიკური ამონახსნების ერთადერთობის საკითხს. ცხადია, (3.38)-დან შეგვიძლია გადავწეროთ

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})=\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\,|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2+\mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u})+(b\varphi-\beta p-\gamma_0\theta)\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}},\\
&\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)=\alpha|\nabla\varphi|^2+\alpha_1|\varphi|^2+(b\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}-mp-\gamma_1\theta)\bar{\varphi},\\
&\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U},p)=k|\nabla p|^2-a_0'|p|^2-(\beta'\mathrm{div}\,\mathbf{u}+m'\varphi+\gamma_2'\theta)\bar{p},\\
&\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U},\theta)=\kappa|\nabla\theta|^2-a'|\theta|^2-(\gamma_0'\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\gamma_1'\varphi+\gamma_2'T_0p)\bar{\theta}.
\end{aligned}\tag{3.51}$$

სადაც

$$\mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u})=\frac{\mu}{2}\sum_{l,j=1;l\neq j}^{3}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right|^2+\frac{\mu}{3}\sum_{l,j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right|^2.$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 3.11. თუ $(I)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ შიგა სასაზღვრო ამოცანას აქვს რეგულარული ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(I)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანას აქვს ორი რეგულარული ამონახსნი. მაშინ მათი სხვაობა $\mathbf{U}$ არის $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{U}$ ვექტორი შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})=\mathbf{0},\qquad \mathbf{x}\in\Omega^{+},\tag{3.52}$$

რომელიც აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას

$$\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^{+}=\mathbf{0},\qquad \mathbf{z}\in S.\tag{3.53}$$

ცხადია, (3.52) და (3.53) ფორმულების საფუძველზე (3.39)-დან მივიღებთ:

$$\int_{\Omega^+}\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})d\mathbf{x}=0,\qquad \int_{\Omega^+}\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)d\mathbf{x}=0,\tag{3.54}$$

$$\int_{\Omega^+}\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U},p)d\mathbf{x}=0,\qquad \int_{\Omega^+}\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U},\theta)d\mathbf{x}=0,$$

ხოლო (3.51)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathrm{Im}\big[\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\big]=b\,\mathrm{Im}(\varphi\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}})-\beta\,\mathrm{Im}(p\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}})-\gamma_0\mathrm{Im}\,(\theta\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}}),$$

$$\mathrm{Im}\big[\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)\big]=b\,\mathrm{Im}(\,\mathrm{div}\mathbf{u}\,\bar{\varphi})-m\,\mathrm{Im}(p\,\bar{\varphi})-\gamma_1\mathrm{Im}\,(\theta\,\bar{\varphi}),$$

$$\mathrm{Re}\big[\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U},p)\big]=k|\nabla p|^2+\omega\mathrm{Im}[(\beta\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+m\varphi+\gamma_2\theta)\bar{p}],$$

$$\mathrm{Re}\big[\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U},\theta)\big]=\kappa|\nabla\theta|^2+\omega T_0\mathrm{Im}[(\gamma_0\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\gamma_1\varphi+\gamma_2 p)\bar{\theta}].$$

ამ ტოლობებიდან გვაქვს

$$\mathrm{Im}\big[\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\big]+\mathrm{Im}\big[\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)\big]-\frac{1}{\omega}\mathrm{Re}\big[\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U},p)\big]-\frac{1}{\omega T_0}\mathrm{Re}\big[\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U},\theta)\big]$$

$$=b\,\mathrm{Im}(\varphi\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}})-\beta\,\mathrm{Im}(p\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}})-\gamma_0\mathrm{Im}\,(\theta\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}})+b\,\mathrm{Im}(\varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\bar{\varphi})$$

$$-m\,\mathrm{Im}(p\,\bar{\varphi})-\gamma_1\mathrm{Im}\,(\theta\,\bar{\varphi})-\frac{k}{\omega}|\nabla p|^2-\beta\mathrm{Im}(\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\bar{p})-m\,\mathrm{Im}(\varphi\,\bar{p})-\gamma_2\mathrm{Im}(\theta\,\bar{p})$$

$$-\frac{\kappa}{\omega T_0}|\nabla\theta|^2-\gamma_0\mathrm{Im}(\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\bar{\theta})-\gamma_1\mathrm{Im}\,(\varphi\,\bar{\theta})-\gamma_2\mathrm{Im}(p\,\bar{\theta})$$

$$= -\frac{k}{\omega}|\nabla p|^2 - \frac{\kappa}{\omega T_0}|\nabla\theta|^2. \tag{3.55}$$

ამასთანავე, (3.54)-დან (3.55)-ის ძალით მივიღებთ

$$\int_{\Omega^+}\left\{\mathrm{Im}\left[\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\right] + \mathrm{Im}\left[\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)\right] - \frac{1}{\omega}\mathrm{Re}\left[\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U},p)\right] - \frac{1}{\omega T_0}\mathrm{Re}\left[\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U},\theta)\right]\right\}d\mathbf{x}$$

$$= -\frac{1}{\omega T_0}\int_{\Omega^+}(kT_0|\nabla p|^2 + \kappa|\nabla\theta|^2)d\mathbf{x} = 0. \tag{3.56}$$

გავითვალისწინოთ (3.12) პირობა (3.56)-ში. შეგვიძლია დავწეროთ $\nabla p(\mathbf{x}) = \nabla\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+$, ე.ი.

$$p(\mathbf{x}) = c_1 = \mathrm{const}, \quad \theta(\mathbf{x}) = c_2 = \mathrm{const}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+. \tag{3.57}$$

მოვიგონოთ (3.53) ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობა, რომლის ძალით (3.57)-დან გვაქვს

$$p(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^+. \tag{3.58}$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.58)-ს (3.51)-ში, მივიღებთ

$$\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}) = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\,|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2 + \mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u}) + b\,\varphi\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}},$$

$$\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi) = \alpha|\nabla\varphi|^2 + \alpha_1|\varphi|^2 + b\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\overline{\varphi}. \tag{3.59}$$

ცხადია, (3.59)-დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathrm{Re}\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}) + \mathrm{Re}\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)$$

$$= \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\,|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2 + 2b\mathrm{Re}(\varphi\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}}) + \alpha_1|\varphi|^2 + \alpha|\nabla\varphi|^2 + \mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u}).$$

ამ ტოლობის ძალით (3.54)-დან გვექნება

$$\int_{\Omega^+}\left[\mathrm{Re}\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}) + \mathrm{Re}\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)\right]d\mathbf{x}$$

$$= \int_{\Omega^+}\left[\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\,|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2 + 2b\mathrm{Re}(\varphi\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}}) + \alpha_1|\varphi|^2\right]d\mathbf{x}$$

$$+ \int_{\Omega^+}\left[\alpha|\nabla\varphi|^2 + \mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u})\right]d\mathbf{x} = 0.$$

რადგან მიღებული თანაფარდობის პირველი ტოლობის მარჯვენა მხარეში ორივე ინტეგრალქვეშა გამოსახულება არაუარყოფითია (3.12)-ის გამო, ამიტომ ვწერთ

$$\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\,|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2 + 2b\mathrm{Re}(\varphi\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{u}}) + \alpha_1|\varphi|^2 = 0, \quad \nabla\varphi = 0, \quad \mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u}) = 0.$$

აქედან, ისევ (3.12) პირობის ძალით, ვწერთ

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^+. \tag{3.60}$$

ამასთან ერთად, (3.52) და (3.53)-დან (3.58) და (3.60) ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ დირიხლეს ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანას

$$\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \{\mathbf{u}(\mathbf{z})\}^+ = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+, \quad \mathbf{z} \in S.$$

ამ ამოცანას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ და მაშასადამე, $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \Omega^+$. ■

თეორემა 3.12. თუ სრულდება (3.12) პირობა, მაშინ $(II)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ შიგა სასაზღვრო ამოცანის ყოველი ორი რეგულარული ამონახსნი ერთმანეთისგან განსხვავდება $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi, p, \theta)$ ვექტორით, სადაც φ, p და θ აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას

$$\varphi(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+,$$

ხოლო $\mathbf{u}$ ხისტი გადაადგილების ვექტორია და აქვს შემდეგი სახე

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \tilde{\boldsymbol{a}} + \tilde{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^+, \tag{3.61}$$

$\tilde{\boldsymbol{a}}$ და $\tilde{\boldsymbol{b}}$ სამკომპონენტიანი მუდმივი ვექტორებია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(II)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანას აქვს ორი რეგულარული ამონახსნი. მაშინ მათი სხვაობა $\mathbf{U}$ არის $(II)^+_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{U}$ არის (3.52) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\{\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D}_\mathbf{z}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^+ = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{z} \in S. \tag{3.62}$$

როგორც თეორემა 3.11-ში, სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ (3.57) თანაფარდობის სამართლიანობა, რომლის გათვალისწინებით (3.51)-დან მივიღებთ

$$\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U}, p) = -i\omega a_0|p|^2 - i\omega(\beta \operatorname{div}\mathbf{u} + m\varphi + \gamma_2\theta)\bar{p},$$
$$\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U}, \theta) = -i\omega a T_0|\theta|^2 - i\omega T_0(\gamma_0 \operatorname{div}\mathbf{u} + \gamma_1\varphi + \gamma_2 p)\bar{\theta}. \tag{3.63}$$

ცხადია, (3.51) და (3.63)-დან გვაქვს

$$\operatorname{Re}\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}) = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\,|\operatorname{div}\mathbf{u}|^2 + \mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u}) + \operatorname{Re}[(b\varphi - \beta p - \gamma_0\theta)\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}],$$

$$\operatorname{Re}\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi) = \alpha|\nabla\varphi|^2 + \alpha_1|\varphi|^2 + \operatorname{Re}[(b\operatorname{div}\mathbf{u} - mp - \gamma_1\theta)\bar{\varphi}],$$

$$-\frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U}, p) = a_0|p|^2 - \operatorname{Re}[(\beta \operatorname{div}\mathbf{u} + m\varphi + \gamma_2\theta)\bar{p}],$$

$$-\frac{1}{\omega T_0}\mathrm{Im}\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U},\theta)=a|\theta|^2-\mathrm{Re}[(\gamma_0\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\gamma_1\varphi+\gamma_2 p)\bar{\theta}].$$

აქედან (3.12)-ის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathrm{Re}\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})+\mathrm{Re}\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)-\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U},p)-\frac{1}{\omega T_0}\mathrm{Im}\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U},\theta)$$
$$=\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\,|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2+2b\mathrm{Re}(\varphi\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}})+\alpha_1|\varphi|^2$$
$$+\mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u})+\alpha|\nabla\varphi|^2+a_0|p|^2+2\gamma_2\mathrm{Re}(p\bar{\theta})+a|\theta|^2\geq 0.$$

ამ თანაფარდობის ძალით (3.54)-დან მივიღებთ

$$\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\,|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2+2b\mathrm{Re}(\varphi\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}})+\alpha_1|\varphi|^2=0,$$
$$\mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u})=0,\qquad a_0|p|^2+2\gamma_2\mathrm{Re}(p\bar{\theta})+a|\theta|^2=0.$$

ცხადია, მიღებული ტოლობებიდან (3.12)-ის გათვალისწინებით გვექნება (3.58) და (3.60) თანაფარდობები. ბოლოს, ისევე, როგორც დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში (იხ. [44]), $\mathrm{div}\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{u})=0$ ტოლობებიდან მივიღებთ (3.61) ფორმულას. ■

თეორემა 3.13. $(K)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ გარე სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი რეგულარული ამონახსნი, სადაც $K=I,II$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(K)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანას აქვს ორი რეგულარული ამონახსნი, სადაც $K=I,II$. მაშინ მათი სხვაობა $\mathbf{U}$ არის $(K)^-_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნი. ამგვარად, $\mathbf{U}$ არის (3.52) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, როცა $\mathbf{x}\in\Omega^-$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^-=\mathbf{0}\tag{3.64}$$

და

$$\{\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^-=\mathbf{0}\tag{3.65}$$

შესაბამისად $K=I$ და $K=II$ შემთხვევებში.

თუ (3.41)-ში გავითვალისწინებთ (3.52), (3.64), (3.65) ტოლობებს, მაშინ მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega^-}\mathcal{W}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})d\mathbf{x}=0,\qquad\int\limits_{\Omega^-}\mathcal{W}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi)d\mathbf{x}=0,\tag{3.66}$$
$$\int\limits_{\Omega^-}\mathcal{W}^{(3)}(\mathbf{U},p)d\mathbf{x}=0,\qquad\int\limits_{\Omega^-}\mathcal{W}^{(4)}(\mathbf{U},\theta)d\mathbf{x}=0.$$

როგორც თეორემა 3.12-ში ვაჩვენეთ, (3.66)-ის ძალით ვწერთ

$$p(\mathbf{x}) = c_1 = \text{const}, \quad \theta(\mathbf{x}) = c_2 = \text{const}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^-. \tag{3.67}$$

საბოლოოდ, (3.67)-დან (3.32) პირობის გათვალისწინებით, მივიღებთ $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^-$. ■

3.6. ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალები

ამ პარაგრაფში განვმარტავთ ზედაპირულ (მარტივი და ორმაგი ფენის) და მოცულობით პოტენციალებს და დავადგენთ მათ ძირითად თვისებებს.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

1) მარტივი ფენის პოტენციალი

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{g}(\mathbf{y}) \, d_{\mathbf{y}} S;$$

2) ორმაგი ფენის პოტენციალი

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \int_S \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}} \left(\mathbf{D}_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}) \right) \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right]^{\mathrm{T}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) d_{\mathbf{y}} S;$$

3) მოცულობითი პოტენციალი

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}, \Omega^{\pm}) = \int_{\Omega^{\pm}} \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

სადაც $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ არის $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა და განსაზღვრულია (3.31) ფორმულით, $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ ოპერატორი მოიცემა (3.46)-ით, ხოლო $\mathbf{g}$ და $\boldsymbol{\phi}$ ექვსკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 3.14. თუ $S \in C^{r+1,\nu}, \mathbf{g} \in C^{r,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \leq 1$ და r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მაშინ

ა) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\cdot, \mathbf{g}) \in C^{0,\nu'}(\mathbb{R}^3) \cap C^{r+1,\nu'}\left(\overline{\Omega^{\pm}}\right) \cap C^{\infty}(\Omega^{\pm})$;

ბ) $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\pm}$;

გ) $\boldsymbol{\mathcal{R}}\left(\mathbf{D}_{\mathbf{z}}, \mathbf{n}(\mathbf{z})\right) \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{g})$ სინგულარული ინტეგრალია, როცა $\mathbf{z} \in S$;

დ) $\left\{\boldsymbol{\mathcal{R}}\big(\mathbf{D}_{\mathbf{z}},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\right\}^{\pm}=\pm\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\ \boldsymbol{\mathcal{R}}\big(\mathbf{D}_{\mathbf{z}},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),\quad \mathbf{z}\in S;$ (3.68)

ე) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=O(|\mathbf{x}|^{-1}),\quad \frac{\partial}{\partial x_l}\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=O(|\mathbf{x}|^{-2})$, როცა $|\mathbf{x}|\gg 1$ და $l=1,2,3$.

თეორემა 3.15. თუ $S\in C^{r+1,v}, \mathbf{g}\in C^{r,v'}(S), 0<v'<v\leq 1$, r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მაშინ

ა) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\cdot,\mathbf{g})\in C^{r,v'}\big(\overline{\Omega^{\pm}}\big)\cap C^{\infty}(\Omega^{\pm})$;

ბ) $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=0,\quad \mathbf{x}\in\Omega^{\pm}$;

გ) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})$ სინგულარული ინტეგრალია, როცა $\mathbf{z}\in S$;

დ) $\left\{\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\right\}^{\pm}=\pm\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),\ \mathbf{z}\in S;$ (3.69)

ე) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=O(|\mathbf{x}|^{-2}),\quad \frac{\partial}{\partial x_l}\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=O(|\mathbf{x}|^{-3})$, როცა $|\mathbf{x}|\gg 1$ და $l=1,2,3$;

ვ) $\left\{\boldsymbol{\mathcal{R}}\big(\mathbf{D}_{\mathbf{z}},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\right\}^{+}=\left\{\boldsymbol{\mathcal{R}}\big(\mathbf{D}_{\mathbf{z}},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\right\}^{-},\ m\in\mathbb{N},\ \mathbf{z}\in S.$

თეორემა 3.16. თუ $S\in C^{1,v},\ \boldsymbol{\phi}\in C^{0,v'}(\Omega^{+}), 0<v'<v\leq 1$, მაშინ

ა) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\cdot,\boldsymbol{\phi},\Omega^{+})\in \mathrm{C}^{1,v'}(\mathbb{R}^3)\cap \mathrm{C}^{2}(\Omega^{+})\cap \mathrm{C}^{2,v'}\big(\overline{\Omega_0^{+}}\big)$;

ბ) $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^{+})=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Omega^{+}$,

სადაც Ω_0^{+} არეა $\mathbb{R}^3$-დან და $\Omega_0^{+}\subset\Omega^{+}$.

თეორემა 3.17. თუ $S\in C^{1,v},\ \mathrm{supp}\,\boldsymbol{\phi}=\Omega\subset\Omega^{-},\ \ \boldsymbol{\phi}\in C^{0,v'}(\Omega^{-}), 0<v'<v\leq 1$, მაშინ

ა) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\cdot,\boldsymbol{\phi},\Omega^{-})\in C^{1,v'}(\mathbb{R}^3)\cap C^{2}(\Omega^{-})\cap C^{2,v'}(\overline{\Omega_0^{-}})$;

ბ) $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^{-})=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Omega^{-}$,

სადაც Ω სასრული არეა $\mathbb{R}^3$ -დან და $\overline{\Omega_0^{-}}\subset\Omega^{-}$.

თეორემები 3.14-3.17 მტკიცდება ანალოგიურად, როგორც შესაბამისი დებულებები დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში (იხ. [44]).

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathcal{N}^{(1)}\mathbf{g}(\mathbf{z})\equiv\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{N}^{(2)}\mathbf{g}(\mathbf{z})\equiv\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\boldsymbol{\mathcal{R}}\big(\mathbf{D}_{\mathbf{z}},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{N}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) \equiv -\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}), \tag{3.70}$$

$$\mathcal{N}^{(4)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) \equiv -\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\mathcal{R}}\big(\mathbf{D}_{\mathbf{z}},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{N}_{\varsigma}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \varsigma\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}), \qquad \mathbf{z}\in S,$$

სადაც ς კომპლექსური რიცხვია. თეორემა 3.14 და 3.15-ის საფუძველზე $\mathcal{N}^{(r)}$ ($r = 1,2,3,4$) და $\mathcal{N}_{\varsigma}$ სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორებია.

ამასთან ერთად, თუ $\mathbf{\Gamma}^{(r)} = \left(\Gamma_{lj}^{(r)}\right)_{6\times 6}$ არის $\mathcal{N}^{(r)}$ ოპერატორის სიმბოლო, მაშინ (3.70)-დან (3.12)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\det\mathbf{\Gamma}^{(1)} = \det\mathbf{\Gamma}^{(2)} = -\det\mathbf{\Gamma}^{(3)} = -\det\mathbf{\Gamma}^{(4)}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{6}\left(1-\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) = \frac{(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)}{64\mu_0^2} > 0.$$

ამგვარად, $\mathcal{N}^{(r)}$ ოპერატორი ნორმალური ტიპისაა, სადაც $r = 1,2,3,4$.

დაუშვათ $\mathbf{\Gamma}_{\varsigma}$ და $\mathrm{ind}\mathcal{N}_{\varsigma}$ შესაბამისად $\mathcal{N}_{\varsigma}$ ოპერატორის სიმბოლო და ინდექსია. ადვილად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\det\mathbf{\Gamma}_{\varsigma} = \frac{\mu_0^2-\mu^2\varsigma^2}{64\mu_0^2}$$

და $\det\mathbf{\Gamma}_{\varsigma} = 0$ კომპლექსური სიბრტყის მხოლოდ ორ ς_1 და ς_2 წერტილში. თუ გავითვალისწინებთ (3.70)-ს და $\det\mathbf{\Gamma}_1 = \det\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ ტოლობას, მივიღებთ $\varsigma_j \neq 1$ ($j = 1,2$) და

$$\mathrm{ind}\,\mathcal{N}_1 = \mathrm{ind}\,\mathcal{N}^{(1)} = \mathrm{ind}\,\mathcal{N}_0 = 0.$$

შეგვიძლია დავამტკიცოთ

$$\mathrm{ind}\,\mathcal{N}^{(2)} = -\mathrm{ind}\,\mathcal{N}^{(1)} = 0, \qquad \mathrm{ind}\,\mathcal{N}^{(3)} = -\mathrm{ind}\,\mathcal{N}^{(4)} = 0.$$

ცხადია, სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი $\mathcal{N}^{(r)}$ ($r = 1,2,3,4$) ნორმალური ტიპისაა და მისი ინდექსი ნულია, ე.ი. $\mathcal{N}^{(r)}$ ოპერატორისთვის სამართლიანია ნეტერის თეორემები.

3.7. არსებობის თეორემები

ამ პარაგრაფში პოტენციალთა მეთოდისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დავამტკიცებთ $(K)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(K)^{-}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანების კლასიკურ ამონახსნთა არსებობის თეორემებს, სადაც $K = I, II$.

თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3.16 და თეორემა 3.17-ის საფუძველზე მოცულობითი პოტენციალი $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{F},\Omega^{\pm})$ არაერთგვაროვანი (3.11) განტოლების კერძო ამონახსნია, სადაც $\mathbf{F} \in C^{0,\nu'}(\Omega^{\pm}), 0 < \nu' \leq 1$ და $\mathrm{supp}\mathbf{F}$ შემოსაზღვრულია Ω^{-} არეში. ამიტომ, $(K)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(K)^{-}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანების კლასიკურ ამონახსნთა არსებობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ $(K)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ და $(K)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანების კლასიკური ამონახსნების არსებობა, სადაც $K = I, II$.

ამოცანა $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{+}, \tag{3.71}$$

სადაც $\mathbf{g}$ ექვსკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა. თეორემა 3.15-ის ბ) თვისების ძალით $\mathbf{U}$ არის (3.52)-ის ამონახსნი, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{+}$. ამავე დროს, (3.71)-დან (3.34)-ის ძალით და (3.69) იგივეობის გამოყენებით მივიღებთ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{N}^{(1)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{3.72}$$

სადაც $\mathbf{g}$ უცნობი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{z} \in S$.

რადგან $\mathcal{N}^{(2)}$ არის $\mathcal{N}^{(1)}$-ის მიკავშირებული სინგულარულ ინტეგრალური ოპერატორი, ამიტომ (3.72)-ის მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\mathcal{N}^{(2)}\,\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in S, \tag{3.73}$$

სადაც $\mathbf{h}$ ექვსკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა. დავამტკიცოთ, რომ (3.73)-ს აქვს ტრივიალური ამონახსნი.

ვთქვათ, $\mathbf{h}_0$ არის (3.73) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. მაშინ თეორემა 3.14-ის ბ) და დ) თვისებებისა და (3.73)-ის გათვალისწინებით $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{h_0})$ ვექტორ-ფუნქცია იქნება $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი. თეორემა 3.13-ის ძალით $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ე.ი.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{-}. \tag{3.74}$$

თეორემა 3.14-ის ა) თვისებისა და (3.74) პირობის გამო გვაქვს

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in S,$$

ანუ $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ წარმოადგენს $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს. თეორემა 3.11-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{+}. \tag{3.75}$$

ბოლოს, (3.68) იგივეობისა და (3.74), (3.75) პირობების ძალით დავწეროთ

$$\mathbf{h_0}(\mathbf{z}) = \{\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} - \{\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in S.$$

ამგვარად, (3.73) ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ნეტერის თეორემის საფუძველზე (3.72) არაერთგვაროვანი განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისათვის. ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.18. თუ $S \in C^{2,\nu}$, $\mathbf{f} \in C^{1,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \leq 1$, მაშინ $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი არსებობს, იგი ერთადერთია და წარმოიდგინება (3.71) ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (3.73) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორ-ფუნქციისთვის.

ამოცანა $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი მარტივი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{-}, \tag{3.76}$$

სადაც $\mathbf{h}$ ექვსკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა. თეორემა 3.14-ის ძალით $\mathbf{U}$ არის (3.52)-ის ამონახსნი, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. თუ გავითვალისწინებთ (3.68) იგივეობას და (3.37) სასაზღვრო პირობას, (3.76)-დან უცნობი $\mathbf{h}$ ვექტორის მიმართ მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{N}^{(2)}\, \mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in S. \tag{3.77}$$

თეორემა 3.18-ში დავამტკიცეთ, რომ (3.77)-ის შესაბამის (3.73) ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ამიტომ (3.77) არაერთგვაროვანი განტოლება ამოხსნადია და მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.19. თუ $S \in C^{2,v}$, $\mathbf{f} \in C^{0,v'}(S), 0 < v' < v \leq 1$, მაშინ $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი არსებობს, იგი ერთადერთია და წარმოიდგინება (3.76) მარტივი ფენის პოტენციალის სახით, სადაც $\mathbf{h}$ არის (3.77) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორ-ფუნქციისათვის.

ამოცანა $(I)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის ამონახსნი მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ჯამის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) + \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{-}, \tag{3.78}$$

სადაც $\mathbf{g}$ ექვსკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა.

თეორემა 3.14 და თეორემა 3.15-ის ძალით, $\mathbf{U}$ არის (3.52) განტოლების რეგულარური ამონახსნი, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. თუ გავითვალისწინებთ (3.36) სასაზღვრო პირობას და გამოვიყენებთ (3.68) იგივეობას, მაშინ (3.78)-დან, უცნობი $\mathbf{g}$ ვექტორის მიმართ, მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{N}^{(5)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) \equiv \mathcal{N}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \qquad \mathbf{z} \in S. \tag{3.79}$$

ვაჩვენოთ, რომ (3.79) განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორ-ფუნქციისათვის.

ცხადია, სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი $\mathcal{N}^{(5)}$ ნორმალური ტიპისაა და $\operatorname{ind}\mathcal{N}^{(5)} = \operatorname{ind}\mathcal{N}^{(3)} = 0$. დავამტკიცოთ, რომ შემდეგ ერთგვაროვან განტოლებას

$$\mathcal{N}^{(5)}\mathbf{g_0}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in S \tag{3.80}$$

აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ვთქვათ, $\mathbf{g}_0$ არის (3.80) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. მაშინ ვექტორი

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g_0}) + \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g_0}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{-} \tag{3.81}$$

იქნება $(I)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი და თეორემა 3.13-ის გამოყენებით გვაქვს (3.74) ტოლობა.

ამასთან ერთად, (3.68) და (3.69) იგივეობების გამოყენებით, (3.81)-დან მივიღებთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^+ - \{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^- = \mathbf{g_0}(\mathbf{z}),$$
$$\{\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^+ - \{\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^- = -\mathbf{g_0}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in S, \tag{3.82}$$

ხოლო (3.82)-დან (3.74)-ის ძალით გვაქვს

$$\{\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z}) + \mathbf{V}(\mathbf{z})\}^+ = 0, \quad \mathbf{z} \in S, \tag{3.83}$$

ე.ი. $\mathbf{V}$ ვექტორი (3.52) განტოლების ამონახსნია Ω^+ არეში, რომელიც აკმაყოფილებს (3.83) სასაზღვრო პირობას. ახლა გამოვიყენოთ (3.42) იგივეობა $\mathbf{V}$ ვექტორისთვის და მივიღებთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^+ = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in S. \tag{3.84}$$

ბოლოს, (3.82)-ის პირველი განტოლებიდან (3.74) და (3.84)-ის ძალით, მივიღებთ $\mathbf{g_0}(\mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{z} \in S$.

ამგვარად, (3.80) ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ნეტერის თეორემის საფუძველზე (3.79) სინგულარული ინტეგრალური განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორ-ფუნქციისთვის. ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.20. თუ $S \in C^{2,\nu}$, $\mathbf{f} \in C^{1,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \leq 1$, მაშინ $(I)^-_{\mathbf{0,f}}$ სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი არსებობს, იგი ერთადერთია და წარმოიდგინება (3.78) მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ჯამის სახით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (3.79) სინგულარულ ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორ-ფუნქციისათვის.

ამოცანა $(II)^+_{\mathbf{0,f}}$. ამ ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს ვეძებთ მარტივი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^+, \tag{3.85}$$

სადაც $\mathbf{g}$ ექვსკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა.

თუ გავითვალისწინებთ (3.35) სასაზღვრო პირობას და (3.68) იგივეობას, (3.85)-დან $\mathbf{g}$ ვექტორის მიმართ მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{N}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in S. \tag{3.86}$$

განვიხილოთ ამ განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mathcal{N}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in S, \tag{3.87}$$

ხოლო (3.87)-ის მიკავშირებულ ერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას აქვს შემდეგი ფორმა

$$\mathcal{N}^{(4)}\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in S. \tag{3.88}$$

პირველ რიგში დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა.

ლემა 3.3. (3.87) და (3.88) ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლებებიდან თითოეულს აქვს ექვსი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი და ისინი ქმნიან ამონახსნთა სრულ სისტემას.

დამტკიცება. თეორემა 3.12-ის საფუძველზე ავაგოთ ექვსკომპონენტიანი შემდეგი ვექტორები:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\phi}^{(1)}(\mathbf{x}) = (1,0,0,0,0,0), \qquad \boldsymbol{\phi}^{(2)}(\mathbf{x}) = (0,1,0,0,0,0),\\ &\boldsymbol{\phi}^{(3)}(\mathbf{x}) = (0,0,1,0,0,0), \qquad \boldsymbol{\phi}^{(4)}(\mathbf{x}) = (0,-x_3,x_2,0,0,0),\\ &\boldsymbol{\phi}^{(5)}(\mathbf{x}) = (x_3,0,-x_1,0,0,0), \qquad \boldsymbol{\phi}^{(6)}(\mathbf{x}) = (-x_2,x_1,0,0,0,0). \end{aligned} \tag{3.89}$$

ნათელია, $\{\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{6}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა და თეორემა 3.12-ის ძალით ყოველი $\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x})$ ვექტორი $(II)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნია და ასევე, ამონახსნია (3.88) ერთგვაროვანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების, ე.ი. გვაქვს

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+},$$

$$\{\boldsymbol{\mathcal{R}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0}, \qquad \mathcal{N}^{(4)}\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in S,$$

სადაც $j = 1,2,\dots,6$. აქედან გამომდინარე, (3.87) და (3.88) განტოლებებიდან თითოეულს აქვს ექვსი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი. ვაჩვენოთ, რომ $\{\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{6}$ წარმოადგენს (3.88) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრულ სისტემას.

ვთქვათ, $\{\mathbf{g}^{(j)}(\mathbf{z})\}_{j=1}^{m}$ არის (3.87) ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემა, სადაც $m \geq 6$. ავაგოთ მარტივი ფენის პოტენციალები $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}^{(j)})$ $(j = 1,2,\dots,m)$. შემდეგი თანაფარდობიდან

$$\mathbf{0}=\sum_{j=1}^{m}\chi_j\,\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}\big(\mathbf{x},\mathbf{g}^{(j)}\big)=\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}\left(\mathbf{x},\sum_{j=1}^{m}\chi_j\,\mathbf{g}^{(j)}\right),\qquad\qquad \mathbf{x}\in\Omega^{+}$$

მარტივად მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^{m}\chi_j\,\mathbf{g}^{(j)}(\mathbf{z})=\mathbf{0},\qquad\quad \mathbf{z}\in S,\tag{3.90}$$

სადაც $\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_m$ ნებისმიერი მუდმივებია. ცხადია, (3.90)-დან გვაქვს $\chi_1=\chi_2=\cdots=\chi_m=0$. აქედან გამომდინარე, $\big\{\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}\big(\mathbf{x},\mathbf{g}^{(j)}\big)\big\}_{j=1}^{m}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა.

ვაჩვენოთ, რომ თითოეული $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}\big(\mathbf{x},\mathbf{g}^{(j)}\big)$ $(j=1,2,\dots,m)$ ვექტორი $(II)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნია. ამასთანავე, თეორემა 3.12-ის და (3.89)-ის ძალით $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}\big(\mathbf{x},\mathbf{g}^{(j)}\big)$ შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}\big(\mathbf{x},\mathbf{g}^{(j)}\big)(\mathbf{x})=\sum_{l=1}^{6}\chi_{jl}\,\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{x}),$$

სადაც χ_{jl} ($j=1,2,\dots,m$, $l=1,2,\dots,6$) მუდმივებია. მაშასადამე, $\big\{\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}\big(\mathbf{x},\mathbf{g}^{(j)}\big)\big\}_{j=1}^{m}$ სისტემის ყოველი ვექტორი წარმოიდგინება $\boldsymbol{\phi}^{(1)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\phi}^{(2)}(\mathbf{x}),\dots,\boldsymbol{\phi}^{(6)}(\mathbf{x})$ ექვსი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორის წრფივი კომბინაციის სახით. ამრიგად, $m=6$.

ნეტერის თეორემის ძალით, (3.86) ინტეგრალური განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\int_S \mathbf{f}(\mathbf{z})\cdot\boldsymbol{\phi}^{(j)}(\mathbf{z})d_{\mathbf{z}}S=0,\qquad j=1,2,\dots,6,\tag{3.91}$$

სადაც $\boldsymbol{\phi}^{(j)}$ განსაზღვრულია (3.89) ფორმულით.

ცხადია, თუ $\mathbf{f}=(f_1,f_2,\dots,f_6)$ და $\mathbf{f}^{(0)}=(f_1,f_2,f_3)$,მაშინ (3.89)-ის ძალით (3.91) შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\int_S \mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{z})\,d_{\mathbf{z}}S=\mathbf{0},\qquad \int_S \mathbf{z}\times\mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{z})\,d_{\mathbf{z}}S=\mathbf{0},\tag{3.92}$$

ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.21. თუ $S\in C^{1,\nu}$, $\mathbf{f}\in C^{0,\nu'}(S), 0<\nu'<\nu\le 1$, მაშინ $(II)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანა ამოხსნადია მაშინ, როცა სრულდება (3.92) პირობები. ამ შემთხვევაში

რეგულარული ამონახსნი წარმოიდგინება (3.85) მარტივი ფენის პოტენციალით და განისაზღვრება $\widetilde{\mathbf{U}} = (\widetilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varphi}, \tilde{p}, \tilde{\theta})$ ვექტორის შესაკრების სიზუსტით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (3.86) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი და

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \widetilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{x}, \qquad \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \tilde{p}(\mathbf{x}) = \tilde{\theta}(\mathbf{x}) \equiv 0,$$

როცა $\mathbf{x} \in \Omega^+$, ხოლო $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ და $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ სამკომპონენტიანი ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია.

თავი 4. ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების დრეკადობის ბმული კვაზისტატიკის თეორიის ამოცანები

4.1. ძირითადი განტოლებები

ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის განტოლებები ეფუძნება ერთმანეთთან დაკავშირებულ ოთხი ტიპის შემდეგ თანაფარდობებს [48]:

1. ძირითადი განტოლებები

$$\hat{t}_{lj} = 2\mu\hat{e}_{lj} + \lambda\hat{e}_{rr}\delta_{lj} + (b_\alpha\hat{\varphi}_\alpha - \beta_\alpha\hat{p}_\alpha)\delta_{lj},$$

$$\hat{\sigma}_l^{(1)} = a_1\hat{\varphi}_{1,l} + a_3\hat{\varphi}_{2,l}, \qquad \hat{\sigma}_l^{(2)} = a_3\hat{\varphi}_{1,l} + a_2\hat{\varphi}_{2,l},$$

$$l, j = 1,2,3. \tag{4.1}$$

2. წონასწორობის განტოლებები

$$\hat{t}_{lj,j} = -\rho\hat{F}_l', \qquad \hat{\sigma}_{j,j}^{(1)} + \hat{\xi}^{(1)} = -\rho\hat{s}_1, \qquad \hat{\sigma}_{j,j}^{(2)} + \hat{\xi}^{(2)} = -\rho\hat{s}_2,$$

$$l = 1,2,3. \tag{4.2}$$

3. დარსის კანონი ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულისთვის

$$\hat{\mathbf{v}}^{(1)} = -\frac{\kappa_1'}{\mu'}\nabla\hat{p}_1 - \frac{\kappa_3'}{\mu'}\nabla\hat{p}_2 - \rho_1\hat{\mathbf{s}}_3,$$

$$\hat{\mathbf{v}}^{(2)} = -\frac{\kappa_3'}{\mu'}\nabla\hat{p}_1 - \frac{\kappa_2'}{\mu'}\nabla\hat{p}_2 - \rho_2\hat{\mathbf{s}}_4. \tag{4.3}$$

4. სითხის მასის შენახვის განტოლება

$$\hat{v}_{j,j}^{(1)} + \dot{\hat{\zeta}}_1 + \beta_1\dot{\hat{e}}_{rr} + \gamma_0(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 0,$$

$$\hat{v}_{j,j}^{(2)} + \dot{\hat{\zeta}}_2 + \beta_2\dot{\hat{e}}_{rr} - \gamma_0(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 0, \tag{4.4}$$

სადაც $\hat{\sigma}_j^{(1)},\ \hat{\xi}^{(1)}, \hat{s}_1,\ \rho_1,\ \hat{\mathbf{s}}_3$ და $\hat{\sigma}_j^{(2)},\ \hat{\xi}^{(2)}, \hat{s}_2,\ \rho_2,\ \hat{\mathbf{s}}_4$ $(j = 1,2,3)$ არის სხეულის მაწონასწორებელი ძალის კომპონენტი, შიგა მაწონასწორებელი მოცულობითი ძალა, გარე მაწონასწორებელი მოცულობითი ძალა, სითხის სიმკვრივე, გარე ძალა (მაგ., გრავიტაცია) შესაბამისად ფორებისა და ბზარების ქსელებისათვის,

$$\hat{\xi}^{(1)} = -b_1\hat{e}_{rr} - \alpha_1\hat{\varphi}_1 - \alpha_3\hat{\varphi}_2 + m_1\hat{p}_1 + m_3\hat{p}_2,$$

$$\hat{\xi}^{(2)} = -b_2\hat{e}_{rr} - \alpha_3\hat{\varphi}_1 - \alpha_2\hat{\varphi}_2 + m_3\hat{p}_1 + m_2\hat{p}_2, \tag{4.5}$$

$\hat{e}_{lj}$ ძაბვის ტენზორის კომპონენტია და მოიცემა (2.3) ფორმულით, $\hat{\mathbf{v}}^{(1)} = \left(\hat{v}_1^{(1)}, \hat{v}_2^{(1)}, \hat{v}_3^{(1)}\right)$ და $\hat{\mathbf{v}}^{(2)} = \left(\hat{v}_1^{(2)}, \hat{v}_2^{(2)}, \hat{v}_3^{(2)}\right)$ სითხის ნაკადის ვექტორებია შესაბამისად ფორებისა და ბზარებისათვის, γ_0 სითხის შიგა გადაადგილების კოეფიციენტია, რომელიც განსაზღვრავს სითხის მოძრაობას ფორებსა და ბზარებს შორის, $\gamma_0 \geq 0$,

$$\hat{\zeta}_1 = \gamma_1\hat{p}_1 + \gamma_3\hat{p}_2 + m_1\hat{\varphi}_1 + m_3\hat{\varphi}_2,$$
$$\hat{\zeta}_2 = \gamma_3\hat{p}_1 + \gamma_2\hat{p}_2 + m_3\hat{\varphi}_1 + m_2\hat{\varphi}_2, \tag{4.6}$$

ხოლო $b_l, m_j, a_j, \alpha_j, \gamma_j, \kappa_j'$ $(l = 1,2, j = 1,2,3)$ მასალის ძირითადი მუდმივებია.

თუ გავითვალისწინებთ (2.3), (4.1), (4.3) და (4.5)-(4.6) ტოლობებს (4.2) და (4.4) თანაფარდობებში, მივიღებთ ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულის დრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის განტოლებათა შემდეგ სისტემას ჩაწერილს $\hat{\mathbf{u}}$ გადაადგილების ვექტორის, $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ ფორების ფარდობითი მოცულობებისა და $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ სითხის წნევების ცვლილებების მიმართ

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta\hat{\mathbf{u}} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\hat{\mathbf{u}} + b_\alpha\nabla\hat{\varphi}_\alpha - \beta_\alpha\nabla\hat{p}_\alpha = -\rho\hat{\mathbf{F}}',\\
&(a_1\Delta - \alpha_1)\hat{\varphi}_1 + (a_3\Delta - \alpha_3)\hat{\varphi}_2 - b_1\operatorname{div}\hat{\mathbf{u}} + m_1\hat{p}_1 + m_3\hat{p}_2 = -\rho\hat{s}_1,\\
&(a_3\Delta - \alpha_3)\hat{\varphi}_1 + (a_2\Delta - \alpha_2)\hat{\varphi}_2 - b_2\operatorname{div}\hat{\mathbf{u}} + m_3\hat{p}_1 + m_2\hat{p}_2 = -\rho\hat{s}_2,\\
&(k_1\Delta - \gamma_0)\hat{p}_1 + (k_3\Delta + \gamma_0)\hat{p}_2 + \gamma_1'\dot{\hat{p}}_1 + \gamma_3'\dot{\hat{p}}_2 - \beta_1\operatorname{div}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + m_1\dot{\hat{\varphi}}_1 + m_3\dot{\hat{\varphi}}_2 = -\rho_1\operatorname{div}\hat{\mathbf{s}}_3,\\
&(k_3\Delta + \gamma_0)\hat{p}_1 + (k_2\Delta - \gamma_0)\hat{p}_2 + \gamma_3'\dot{\hat{p}}_1 + \gamma_2'\dot{\hat{p}}_2 - \beta_2\operatorname{div}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + m_3\dot{\hat{\varphi}}_1 + m_2\dot{\hat{\varphi}}_2 = -\rho_2\operatorname{div}\hat{\mathbf{s}}_4,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

სადაც $k_l = \frac{\kappa_l'}{\mu'}$ $(l = 1,2,3)$.

თუ $\hat{u}_j, \hat{F}_j', \hat{\varphi}_l, \hat{p}_l, \hat{s}_l$ და $\hat{\mathbf{s}}_{l+2}$ $(l = 1,2, j = 1,2,3)$ ფუნქციები დროის პარამეტრზე ჰარმონიულადაა დამოკიდებული, ე.ი.

$$\{\hat{u}_j, \hat{F}_j', \hat{\varphi}_l, \hat{p}_l, \hat{s}_l, \hat{\mathbf{s}}_{l+2}\}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}[\{u_j, F_j', \hat{\varphi}_l, \hat{p}_l, \hat{s}_l, \hat{\mathbf{s}}_{l+2}\}(\mathbf{x})\, e^{-i\omega t}],$$

მაშინ (4.7)-დან მივიღებთ ორგვარი ფოროვანი სხეულების დრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის მდგრადი რხევის განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + b_\alpha\nabla\varphi_\alpha - \beta_\alpha\nabla p_\alpha = -\rho\mathbf{F}',\\
&(a_1\Delta - \alpha_1)\varphi_1 + (a_3\Delta - \alpha_3)\varphi_2 - b_1\operatorname{div}\mathbf{u} + m_1p_1 + m_3p_2 = -\rho s_1,\\
&(a_3\Delta - \alpha_3)\varphi_1 + (a_2\Delta - \alpha_2)\varphi_2 - b_2\operatorname{div}\mathbf{u} + m_3p_1 + m_2p_2 = -\rho s_2,\\
&(k_1\Delta + \gamma_1')p_1 + (k_3\Delta + \gamma_3')p_2 + \beta_1'\operatorname{div}\mathbf{u} + m_1'\varphi_1 + m_3'\varphi_2 = -\rho_1\operatorname{div}\boldsymbol{s}_3,\\
&(k_3\Delta + \gamma_3')p_1 + (k_2\Delta + \gamma_2')p_2 + \beta_2'\operatorname{div}\mathbf{u} + m_3'\varphi_1 + m_2'\varphi_2 = -\rho_2\operatorname{div}\boldsymbol{s}_4,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

სადაც $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{F}'=(F_1',F_2',F_3')$, ω რხევის სიხშირეა, $\omega>0$, $\beta_l'=i\omega\beta_l$, $m_j'=i\omega m_j$, $\gamma_l'=i\omega\gamma_l-\gamma_0$, $\gamma_3'=i\omega\gamma_3+\gamma_0$, $(l=1,2,\ j=1,2,3)$.

შემოვიღოთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი მატრიცულ დიფერენციალური ოპერატორი:

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})=\big(M_{lj}(\mathbf{D_x})\big)_{7\times7},\qquad M_{lj}=\mu\Delta\delta_{lj}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j},\quad M_{l;r+3}=-M_{r+3;l}=b_r\frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$M_{l;r+5}=-\beta_r\frac{\partial}{\partial x_l},\quad M_{44}=a_1\Delta-\alpha_1,\quad M_{45}=M_{54}=a_3\Delta-\alpha_3,\quad M_{55}=a_2\Delta-\alpha_2,$$

$$M_{46}=m_1,\quad M_{47}=M_{56}=m_3,\quad M_{57}=m_2,\quad M_{r+5;l}=\beta_r'\frac{\partial}{\partial x_l},\quad M_{64}=m_1',$$

$$M_{65}=M_{74}=m_3',\quad M_{75}=m_2',\quad M_{66}=k_1\Delta+\gamma_1',\quad M_{67}=M_{76}=k_3\Delta+\gamma_3',$$

$$M_{77}=k_2\Delta+\gamma_2',\qquad l,j=1,2,3,\quad r=1,2.$$

ცხადია, (4.8) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})=\mathbf{F}(\mathbf{x}),\tag{4.9}$$

სადაც $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\varphi_1,\varphi_2,p_1,p_2)$ და $\mathbf{F}=(-\rho\mathbf{F}',-\rho s_1,-\rho s_2,-\rho_1\operatorname{div}\mathbf{s}_3,-\rho_2\operatorname{div}\mathbf{s}_4)$ შვიდკომ-პონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია და $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$.

ამ თავში ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$\mu>0,\quad 3\lambda+2\mu>0,\quad a_1>0,\quad a_1a_2-a_3^2>0,\quad (3\lambda+2\mu)\alpha_1>3b_1^2,$$
$$\alpha_1>0,\quad \alpha_1\alpha_2-\alpha_3^2>0,\quad \gamma_1>0,\quad \gamma_1\gamma_2-\gamma_3^2>0,\quad k_1>0,\quad k_1k_2-k_3^2>0,$$
$$\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3^2)>\alpha_1b_2^2-2\alpha_3b_1b_2+\alpha_2b_1^2.\tag{4.10}$$

4.2. სასაზღვრო ამოცანები

განსაზღვრება 4.1. $\mathbf{U}=(U_1,U_2,\dots,U_7)$ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება რეგულარული Ω^--ში (ან Ω^+-ში), თუ

ა) $U_l\in C^2(\Omega^-)\cap C^1(\overline{\Omega^-})$ $\big($ან $U_l\in C^2(\Omega^+)\cap C^1(\overline{\Omega^+})\big)$,

ბ) $U_l(\mathbf{x})=O(|\mathbf{x}|^{-1})$, $\qquad U_{l,j}(\mathbf{x})=o(|\mathbf{x}|^{-1})$, (4.11)

როცა $|\mathbf{x}|\gg1$, $l=1,2,\dots,7$ და $j=1,2,3$.

შემდეგში გამოვიყენებთ $\mathbf{Q}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\left(Q_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})\right)_{7\times7}$ მატრიცულ დიფერენცია-ლურ ოპერატორს, სადაც

$$Q_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\mu\delta_{lj}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}+\mu n_j\frac{\partial}{\partial x_l}+\lambda n_l\frac{\partial}{\partial x_j},\qquad Q_{lr}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=b_{r-3}n_l,$$

$$Q_{l;r+2}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=-\beta_{r-3}n_l,\qquad Q_{44}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=a_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}},\quad Q_{45}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=Q_{54}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=a_3\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}},$$

$$Q_{55}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=a_2\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}},\qquad Q_{66}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=k_1\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}},\qquad Q_{67}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=Q_{76}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=k_3\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}},$$

$$Q_{77}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=k_2\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}},\qquad Q_{sj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=Q_{r;m+2}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=Q_{r+2;m}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=0,$$

$$l,j=1,2,3,\quad r,m=4,5\quad s=4,5,6,7. \tag{4.12}$$

ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის მდგრადი რხევის შიგა და გარე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად.

ვიპოვოთ (4.9) სისტემის რეგულარული $\mathbf{U}$ ამონახსნი, როცა $\mathbf{x}\in\Omega^+$, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{\Omega^+\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^+=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{4.13}$$

ამოცანა $(I)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$-ში და

$$\lim_{\Omega^+\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\mathbf{Q}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\left\{\mathbf{Q}\big(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\mathbf{U}(\mathbf{z})\right\}^+=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{4.14}$$

ამოცანა $(II)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$-ში, სადაც $\mathbf{F}$ და $\mathbf{f}$ შვიდკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია.

ვიპოვოთ (4.9) სისტემის რეგულარული $\mathbf{U}$ ამონახსნი, როცა $\mathbf{x}\in\Omega^-$, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{\Omega^-\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^-=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{4.15}$$

ამოცანა $(I)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$-ში და

$$\lim_{\Omega^-\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\mathbf{Q}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\left\{\mathbf{Q}\big(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\mathbf{U}(\mathbf{z})\right\}^-=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{4.16}$$

ამოცანა $(II)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$-ში, სადაც $\mathbf{F}$ და $\mathbf{f}$ შვიდკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია და $\mathrm{supp}\mathbf{F}$ შემოსაზღვრულია Ω^--ში.

ამ თავში პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით დავამტკიცებთ მდგრადი რხევის $(I)^\pm_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(II)^\pm_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული (კლასიკური)

ამონახსნების არსებობისა და ერთადერთობის თეორემებს. ერთადერთობის თეორემების დასამტკიცებლად გამოვიყენებთ გრინის იგივეობებს, ხოლო არსებობის თეორემების დასამტკიცებლად - ზედაპირულ და მოცულობით პოტენციალებს. აღნიშნულ შედეგებზე დაყრდნობით $(I)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(II)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანები დაიყვანება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომლებისთვისაც სამართლიანია ნეტერის თეორემები.

4.3. ერთადერთობის თეორემები

ამ პარაგრაფში ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმულ წრფივ კვაზისტატიკის თეორიაში ჯერ აიგება გრინის ფორმულები (იგივეობები), ხოლო შემდეგ მათ საფუძველზე შესწავლილი იქნება $(I)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(II)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი.

შემდეგში გამოვიყენებთ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორებს:

1) $$\mathbf{M}^{(0)}(\mathbf{D_x}) = \left(M^{(0)}_{lj}(\mathbf{D_x})\right)_{3\times 3}, \qquad M^{(0)}_{lj}(\mathbf{D_x}) = \mu\Delta\delta_{lj} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j},$$

$$\mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{D_x}) = \left(M^{(1)}_{lr}(\mathbf{D_x})\right)_{3\times 7}, \qquad M^{(1)}_{lr}(\mathbf{D_x}) = M_{lr}(\mathbf{D_x}),$$

$$\mathbf{M}^{(m)}(\mathbf{D_x}) = \left(M^{(m)}_{1r}(\mathbf{D_x})\right)_{1\times 7}, \qquad M^{(m)}_{1r}(\mathbf{D_x}) = M_{m+2;r}(\mathbf{D_x}),$$

$$\mathbf{M}^{(m+2)}(\mathbf{D_x}) = \left(M^{(m+2)}_{1r}(\mathbf{D_x})\right)_{1\times 7}, \qquad M^{(m+2)}_{1r}(\mathbf{D_x}) = M_{m+4;r}(\mathbf{D_x});$$

2) $$\mathbf{Q}^{(0)}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}) = \left(Q^{(0)}_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})\right)_{3\times 3}, \quad Q^{(0)}_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}) = Q_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}),$$

$$\mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}) = \left(Q^{(1)}_{lr}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})\right)_{3\times 7}, \quad Q^{(1)}_{lr}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}) = Q_{lr}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}),$$

სადაც $l,j = 1,2,3,\ m = 2,3$ და $r = 1,2,\dots,7$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E^{(0)}(\mathbf{u},\mathbf{u}') = \frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\mathrm{div}\mathbf{u}\ \mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}' + \frac{\mu}{2}\sum_{l,j=1;l\neq j}^{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \overline{u}'_j}{\partial x_l}+\frac{\partial \overline{u}'_l}{\partial x_j}\right)$$

$$+\frac{\mu}{3}\sum_{l,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}-\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \overline{u_l'}}{\partial x_l}-\frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_j}\right),$$

$$E^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}')=E^{(0)}(\mathbf{U},\mathbf{u}')+(b_\alpha\varphi_\alpha-\beta_\alpha p_\alpha)\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}'}, \tag{4.17}$$

$$E^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1')=(a_1\nabla\varphi_1+a_3\nabla\varphi_2)\cdot\nabla\varphi_1'+(b_1\mathrm{div}\mathbf{u}+\alpha_1\varphi_1+\alpha_3\varphi_2-m_1p_1-m_3p_2)\overline{\varphi_1'},$$

$$E^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2')=(a_3\nabla\varphi_1+a_2\nabla\varphi_2)\cdot\nabla\varphi_2'+(b_2\mathrm{div}\mathbf{u}+\alpha_3\varphi_1+\alpha_2\varphi_2-m_3p_1-m_2p_2)\overline{\varphi_2'},$$

$$E^{(4)}(\mathbf{U},p_1')=(k_1\nabla p_1+k_3\nabla p_2)\cdot\nabla p_1'-(\beta_1'\mathrm{div}\mathbf{u}+m_1'\varphi_1+m_3'\varphi_2+\gamma_1'p_1+\gamma_3'p_2)\overline{p_1'},$$

$$E^{(5)}(\mathbf{U},p_2')=(k_3\nabla p_1+k_2\nabla p_2)\cdot\nabla p_2'-(\beta_2'\mathrm{div}\mathbf{u}+m_3'\varphi_1+m_2'\varphi_2+\gamma_3'p_1+\gamma_2'p_2)\overline{p_2'},$$

სამართლიანია შემდეგი ლემები.

ლემა 4.1. თუ $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\varphi_1,\varphi_2,p_1,p_2)$ რეგულარული ვექტორია Ω^+ -ში, $u_j',\varphi_1',\varphi_2',p_1',p_2'\in C^1(\Omega^+)\cap C(\overline{\Omega^+})$, $j=1,2,3,$ მაშინ

$$\int_{\Omega^+}\left[\mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{x})+E^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}')\right]d\mathbf{x}=\int_S \mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{U}\cdot\mathbf{u}'d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+}\left[\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\varphi_1'(\mathbf{x})}+E^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1')\right]d\mathbf{x}=\int_S\left(a_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{n}}+a_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{\varphi_1'}d_{\mathbf{z}}S, \tag{4.18}$$

$$\int_{\Omega^+}\left[\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\varphi_2'(\mathbf{x})}+E^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2')\right]d\mathbf{x}=\int_S\left(a_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{n}}+a_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{\varphi_2'}d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+}\left[\mathbf{M}^{(4)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{p_1'(\mathbf{x})}+E^{(4)}(\mathbf{U},p_1')\right]d\mathbf{x}=\int_S\left(k_1\frac{\partial p_1}{\partial\mathbf{n}}+k_3\frac{\partial p_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{p_1'}d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+}\left[\mathbf{M}^{(5)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{p_2'(\mathbf{x})}+E^{(5)}(\mathbf{U},p_2')\right]d\mathbf{x}=\int_S\left(k_3\frac{\partial p_1}{\partial\mathbf{n}}+k_2\frac{\partial p_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{p_2'}d_{\mathbf{z}}S,$$

სადაც $\mathbf{U}'=(\mathbf{u}',\varphi_1',\varphi_2',p_1',p_2')$, $\mathbf{u}'=(u_1',u_2',u_3')$.

დამტკიცება. თუ გამოვიყენებთ დრეკადობის კლასიკურ თეორიასა და მათემატიკურ ფიზიკაში კარგად ცნობილ გრინის პირველ იგივეობებს Ω^+ არისთვის (მაგ., იხ. [44])

$$\int_{\Omega^+}\left[\mathbf{M}^{(0)}(\mathbf{D_x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{x})+E^{(0)}(\mathbf{u},\mathbf{u}')\right]d\mathbf{x}=\int_S \mathbf{Q}^{(0)}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{u}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{z})d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int\limits_{\Omega^+} \left[\Delta\varphi_l(\mathbf{x})\overline{\varphi_j'(\mathbf{x})} + \nabla\varphi_l(\mathbf{x})\cdot\nabla\varphi_j'(\mathbf{x})\right]d\mathbf{x} = \int\limits_S \frac{\partial\varphi_l(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})}\overline{\varphi_j'(\mathbf{z})}d_{\mathbf{z}}S, \tag{4.19}$$

მაშინ (4.17)-ის ძალით (4.19)-დან მარტივად მივიღებთ (4.18) იგივეობებს. ■

ლემა 4.2. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2)$ და $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi_1{}'\varphi_2{}', p_1{}', p_2{}')$ რეგულარული ვექტორია Ω^- -ში, მაშინ

$$\int\limits_{\Omega^-} \left[\mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{U}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{x}) + E^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}')\right]d\mathbf{x} = -\int\limits_S \mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{D}_{\mathbf{z}},\mathbf{n})\mathbf{U}\cdot\mathbf{u}'d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int\limits_{\Omega^-} \left[\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\varphi_1'(\mathbf{x})} + E^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1')\right]d\mathbf{x} = -\int\limits_S \left(a_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{n}} + a_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{\varphi_1'}d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int\limits_{\Omega^-} \left[\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\varphi_2'(\mathbf{x})} + E^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2')\right]d\mathbf{x} = -\int\limits_S \left(a_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{n}} + a_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{\varphi_2'}d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int\limits_{\Omega^-} \left[\mathbf{M}^{(4)}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{p_1'(\mathbf{x})} + E^{(4)}(\mathbf{U},p_1')\right]d\mathbf{x} = -\int\limits_S \left(k_1\frac{\partial p_1}{\partial\mathbf{n}} + k_3\frac{\partial p_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{p_1'}d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int\limits_{\Omega^-} \left[\mathbf{M}^{(5)}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{p_2'(\mathbf{x})} + E^{(5)}(\mathbf{U},p_2')\right]d\mathbf{x} = -\int\limits_S \left(k_3\frac{\partial p_1}{\partial\mathbf{n}} + k_2\frac{\partial p_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{p_2'}d_{\mathbf{z}}S, \tag{4.20}$$

სადაც $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi_1', \varphi_2', p_1', p_2')$, $\mathbf{u}' = (u_1', u_2', u_3')$.

დამტკიცება. ამჯერად გამოვიყენოთ გრინის პირველი იგივეობები Ω^- არისთვის, რომლებიც ასევე ცნობილია დრეკადობის კლასიკურ თეორიიდან და მათემატიკური ფიზიკიდან (მაგ., იხ. [44])

$$\int\limits_{\Omega^-} \left[\mathbf{M}^{(0)}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{x}) + E^{(0)}(\mathbf{u},\mathbf{u}')\right]d\mathbf{x} = -\int\limits_S \mathbf{Q}^{(0)}(\mathbf{D}_{\mathbf{z}},\mathbf{n})\mathbf{u}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{z})d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int\limits_{\Omega^-} \left[\Delta\varphi_l(\mathbf{x})\overline{\varphi_j'(\mathbf{x})} + \nabla\varphi_l(\mathbf{x})\cdot\nabla\varphi_j'(\mathbf{x})\right]d\mathbf{x} = -\int\limits_S \frac{\partial\varphi_l(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})}\overline{\varphi_j'(\mathbf{z})}d_{\mathbf{z}}S. \tag{4.21}$$

ცხადია, (4.11) და (4.17)-ის ძალით (4.21)-დან მივიღებთ (4.20) იგივეობებს. ■

ლემა 4.1 და ლემა 4.2-ის დახმარებით მტკიცდება შემდეგი თეორემები.

თეორემა 4.1. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2)$ რეგულარული ვექტორია $\Omega^+ -$ ში, $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi_1', \varphi_2', p_1', p_2') \in C^1(\Omega^+) \cap C\left(\overline{\Omega^+}\right)$, მაშინ

$$\int_{\Omega^+} [\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}'(\mathbf{x}) + E(\mathbf{U}, \mathbf{U}')] d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{U}'(\mathbf{z}) d_{\mathbf{z}}S, \tag{4.22}$$

სადაც

$$E(\mathbf{U}, \mathbf{U}') = E^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}') + E^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi_1') + E^{(3)}(\mathbf{U}, \varphi_2') + E^{(4)}(\mathbf{U}, p_1') + E^{(5)}(\mathbf{U}, p_2').$$

თეორემა 4.2. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2)$ და $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi_1', \varphi_2', p_1', p_2')$ რეგულარული ვექტორებია Ω^- – ში, მაშინ

$$\int_{\Omega^-} [\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}'(\mathbf{x}) + E(\mathbf{U}, \mathbf{U}')] d\mathbf{x} = -\int_S \mathbf{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{U}'(\mathbf{z}) d_{\mathbf{z}}S. \tag{4.23}$$

(4.22) და (4.23) ფორმულები შესაბამისად გრინის პირველი იგივეობებია ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების დრეკადობის ბმულ წრფივ კვაზისტატიკის თეორიაში Ω^+ და Ω^- არეებისთვის.

ადვილად ჩანს, რომ (4.17) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$E^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}) = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\, |\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + E_0(\mathbf{u}) + (b_\alpha \varphi_\alpha - \beta_\alpha p_\alpha)\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}, \tag{4.24}$$

$$E^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi_1) = (a_1 \nabla\varphi_1 + a_3 \nabla\varphi_2) \cdot \nabla\varphi_1 + (b_1 \mathrm{div}\mathbf{u} + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_3\varphi_2 - m_1 p_1 - m_3 p_2)\overline{\varphi_1},$$

$$E^{(3)}(\mathbf{U}, \varphi_2) = (a_3 \nabla\varphi_1 + a_2 \nabla\varphi_2) \cdot \nabla\varphi_2 + (b_2 \mathrm{div}\mathbf{u} + \alpha_3\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 - m_3 p_1 - m_2 p_2)\overline{\varphi_2},$$

$$E^{(4)}(\mathbf{U}, p_1) = (k_1 \nabla p_1 + k_3 \nabla p_2) \cdot \nabla p_1 - (\beta_1' \mathrm{div}\mathbf{u} + m_1'\varphi_1 + m_3'\varphi_2 + \gamma_1' p_1 + \gamma_3' p_2)\overline{p_1},$$

$$E^{(5)}(\mathbf{U}, p_2) = (k_3 \nabla p_1 + k_2 \nabla p_2) \cdot \nabla p_2 - (\beta_2' \mathrm{div}\mathbf{u} + m_3'\varphi_1 + m_2'\varphi_2 + \gamma_3' p_1 + \gamma_2' p_2)\overline{p_2},$$

სადაც

$$E_0(\mathbf{u}) = \frac{\mu}{2} \sum_{l,j=1;\, l\neq j}^{3} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right|^2 + \frac{\mu}{3} \sum_{l,j=1}^{3} \left| \frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right|^2. \tag{4.25}$$

ახლა შეგვიძლია დავიწყოთ $(I)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(II)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამონახსნების ერთადერთობის საკითხის შესწავლა. სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 4.3. თუ $(I)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანას გააჩნია რეგულარული ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(I)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანას აქვს ორი რეგულარული ამონახსნი. მაშინ მათი სხვაობა $\mathbf{U}$ იქნება $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ შიგა ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{U}$ არის

$$\mathbf{M}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{4.26}$$

ერთგვაროვანი განტოლების რეგულარული ამონახსნი, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{+}$ და აკმაყოფილებს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობას

$$\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0}, \ \text{როცა} \ \mathbf{z} \in S. \tag{4.27}$$

ადვილად ჩანს, რომ (4.26) და (4.27)-ის გათვალისწინებით (4.20)-დან მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega^{+}} E^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\,d\mathbf{x} = 0, \ \int\limits_{\Omega^{+}} E^{(l+1)}(\mathbf{U},\varphi_l)\,d\mathbf{x} = 0, \ \int\limits_{\Omega^{+}} E^{(l+3)}(\mathbf{U},p_l)\,d\mathbf{x} = 0, \ \ l = 1,2. \tag{4.28}$$

ამასთანავე, (4.24) ფორმულების ძალით მარტივად მტკიცდება შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\big[E^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\big] = \frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + E_0(\mathbf{u}) + (b_\alpha\varphi_\alpha - \beta_\alpha p_\alpha)\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}},\\
&\mathrm{Im}\big[E^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1) + E^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2)\big] = a_1|\nabla\varphi_1|^2 + 2a_3\mathrm{Re}(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2)\\
&\qquad +a_2|\nabla\varphi_2|^2 + \alpha_1|\varphi_1|^2 + 2\alpha_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2}) + \alpha_2|\varphi_2|^2 + b_\alpha\mathrm{Re}(\varphi_\alpha\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}})\\
&\qquad -[m_1\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{p_1}) + m_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{p_2}+\varphi_2\overline{p_1}) + m_2\mathrm{Re}(\varphi_2\overline{p_2})],\\
&\mathrm{Im}\big[E^{(4)}(\mathbf{U},p_1) + E^{(5)}(\mathbf{U},p_2)\big] = -\omega\beta_\alpha\mathrm{Re}(p_\alpha\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}})\\
&\qquad -\omega[m_1\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{p_1}) + m_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{p_2}+\varphi_2\overline{p_1}) + m_2\mathrm{Re}(\varphi_2\overline{p_2}\,)]\\
&\qquad -\omega[\gamma_1|p_1|^2 + 2\gamma_3\mathrm{Re}(p_1\overline{p_2}) + \gamma_2|p_2|^2].
\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\big[E^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\big] + \mathrm{Im}\big[E^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1) + E^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2)\big] - \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\big[E^{(4)}(\mathbf{U},p_1) + E^{(5)}(\mathbf{U},p_2)\big]\\
&= E_0(\mathbf{u}) + \Big[\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + 2b_\alpha\mathrm{Re}(\varphi_\alpha\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}) + \alpha_1|\varphi_1|^2 + 2\alpha_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2}) + \alpha_2|\varphi_2|^2\Big]\\
&+[a_1|\nabla\varphi_1|^2 + 2a_3Re(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2) + a_2|\nabla\varphi_2|^2] + [\gamma_1|p_1|^2 + 2\gamma_3Re(p_1\overline{p_2}) + \gamma_2|p_2|^2].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

თუ გათვალისწინებთ (4.10) პირობას, მარტივად მივიღებთ

$$E_0(\mathbf{u}) \geq 0, \quad a_1|\nabla\varphi_1|^2 + 2a_3Re(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2) + a_2|\nabla\varphi_2|^2 \geq 0,$$

$$\alpha_1|\varphi_1|^2 + 2\alpha_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2}) + \alpha_2|\varphi_2|^2 \geq 0,$$

$$\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + 2b_\alpha\mathrm{Re}(\varphi_\alpha\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}) + \alpha_1|\varphi_1|^2 + 2\alpha_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2}) + \alpha_2|\varphi_2|^2 \geq 0,$$

$$\gamma_1|p_1|^2 + 2\gamma_3 Re(p_1\overline{p_2}) + \gamma_2|p_2|^2 \geq 0. \tag{4.30}$$

ცხადია, (4.30)-ის ძალით (4.29)-დან გვაქვს

$$\mathrm{Re}\big[E^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\big] + \mathrm{Im}\big[E^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1) + E^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2)\big]$$
$$-\frac{1}{\omega}\big\{\mathrm{Im}\big[E^{(4)}(\mathbf{U},p_1) + E^{(5)}(\mathbf{U},p_2)\big]\big\} \geq 0. \tag{4.31}$$

ახლა დავუბრუნდეთ (4.28) ტოლობებს და გავითვალისწინოთ (4.31) თანაფარდობა. შედეგად მივიღებთ

$$E_0(\mathbf{u}) = 0, \quad \alpha_1|\varphi_1|^2 + 2\alpha_3 \mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2}) + \alpha_2|\varphi_2|^2 = 0,$$

$$\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + 2b_\alpha \mathrm{Re}(\varphi_\alpha \mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}) + \alpha_1|\varphi_1|^2 + 2\alpha_3 \mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2}) + \alpha_2|\varphi_2|^2 = 0,$$

$$\gamma_1|p_1|^2 + 2\gamma_3 Re(p_1\overline{p_2}) + \gamma_2|p_2|^2 = 0. \tag{4.32}$$

თუ ისევ გამოვიყენებთ (4.10) პირობას (4.32)-ში, მაშინ გვექნება

$$\mathrm{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \varphi_l(\mathbf{x}) = p_l(\mathbf{x}) = 0, \qquad l = 1,2, \tag{4.33}$$

როცა $\mathbf{x} \in \Omega^+$. ისევე, როგორც დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში (მაგ., იხ. [44]), (4.32) და (4.33)-ის პირველი ტოლობებიდან მარტივად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $\mathbf{u}$ ხისტი გაადგილების ვექტორია და ჩაიწერება შემდეგი ფორმით

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \widetilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{x}, \tag{4.34}$$

სადაც $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ და $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ ნებისმიერი სამკომპონენტიანი მუდმივი ვექტორებია.

ბოლოს, თუ (4.34)-ში გავითვალისწინებთ (4.27) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას, მივიღებთ $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^+$. აქედან, (4.33)-ის ძალით გვაქვს $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^+$. ■

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.4. თუ $(II)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ მისი ორი რეგულარული ამონახსნი ერთმანეთისგან განსხვავდება $\mathbf{U} = (\mathbf{u},\varphi_1,\varphi_2,p_1,p_2)$ ვექტორით, სადაც φ_l და p_l $(l = 1,2)$ აკმაყოფილებენ (4.33) პირობას, ხოლო $\mathbf{u}$ ხისტი გადაადგილების ვექტორია და აქვს (4.34) ფორმა, სადაც $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ და $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ სამკომპონენტიანი ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია და $\mathbf{x} \in \Omega^+$.

თეორემა 4.5. თუ $(K)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ გარე სასაზღვრო ამოცანას აქვს რეგულარული ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია, სადაც $K = I, II$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(K)^{-}_{\mathbf{F,f}}$ $(K = I, II)$ სასაზღვრო ამოცანას აქვს ორი რეგულარული ამონახსნი. მაშინ მათი სხვაობა $\mathbf{U}$ არის $(K)^{+}_{\mathbf{0,0}}$ ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{U}$ არის (4.26) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$, აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას

$$\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^{-} = \mathbf{0} \tag{4.35}$$

$K = I$ შემთხვევაში და

$$\{\mathbf{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^{-} = \mathbf{0} \tag{4.36}$$

$K = II$ შემთხვევაში.

თუ გავითვალისწინებთ (4.26), (4.35) და (4.36) ტოლობებს, მაშინ (4.20)-დან გვექნება

$$\int\limits_{\Omega^{-}} E^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0, \qquad \int\limits_{\Omega^{-}} E^{(l+1)}(\mathbf{U}, \varphi_l) d\mathbf{x} = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega^{-}} E^{(l+3)}(\mathbf{U}, p_l) d\mathbf{x} = 0, \qquad l = 1,2. \tag{4.37}$$

თეორემა 4.3-ის ანალოგიურად, (4.37)-დან მივიღებთ

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \widetilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{x}, \qquad \varphi_l(\mathbf{x}) = p_l(\mathbf{x}) = 0, \qquad l = 1,2, \tag{4.38}$$

სადაც $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$, $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ და $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ სამკომპონენტიანი მუდმივი ვექტორებია. ამასთანავე, ამონახსნის უსასრულობაში ქრობის (4.11) პირობის ძალით (4.38)-დან შეგვიძლია დავწეროთ $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. მაშასადამე, $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. ■

4.4. ფუნდამენტური ამონახსნი

განმარტება 4.1. $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \left(G_{lj}(\mathbf{x})\right)_{7\times 7}$ მატრიცას ეწოდება (4.9) განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი, თუ განზოგადებულ ფუნქციათა კლასში იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_7,$$

სადაც $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

ავაგოთ $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცა შემდეგი მეთოდით. თავდაპირველად განვიხილოთ არაერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} - b_\alpha\nabla\varphi_\alpha + \beta'_\alpha\nabla p_\alpha = \boldsymbol{\mathcal{F}}',\\
&(a_1\Delta - \alpha_1)\varphi_1 + (a_3\Delta - \alpha_3)\varphi_2 + b_1\mathrm{div}\mathbf{u} + m'_1 p_1 + m'_3 p_2 = \mathcal{F}_4,\\
&(a_3\Delta - \alpha_3)\varphi_1 + (a_2\Delta - \alpha_2)\varphi_2 + b_2\mathrm{div}\mathbf{u} + m'_3 p_1 + m'_2 p_2 = \mathcal{F}_5,\\
&(k_1\Delta + \gamma'_1)p_1 + (k_3\Delta + \gamma'_3)p_2 - \beta_1\mathrm{div}\mathbf{u} + m_1\varphi_1 + m_3\varphi_2 = \mathcal{F}_6,\\
&(k_3\Delta + \gamma'_3)p_1 + (k_2\Delta + \gamma'_2)p_2 - \beta_2\mathrm{div}\mathbf{u} + m_3\varphi_1 + m_2\varphi_2 = \mathcal{F}_7,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

სადაც $\mathcal{F}_l$ $(l = 1, 2, \dots, 7)$ გლუვი ფუნქციებია $\mathbb{R}^3$-ში, $\boldsymbol{\mathcal{F}}' = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$. ცხადია, (4.39) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{x}), \tag{4.40}$$

სადაც $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$ არის $\mathbf{M}$ მატრიცის ტრანსპონირებული, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2)$, $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\boldsymbol{\mathcal{F}}', \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7)$.

ვიმოქმედოთ (4.39)-ის პირველ განტოლებაზე div ოპერაცია. მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$\begin{aligned}
&\mu_0\Delta\mathrm{div}\mathbf{u} - b_\alpha\Delta\varphi_\alpha + \beta_\alpha\Delta p_\alpha = \mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}',\\
&(a_1\Delta - \alpha_1)\varphi_1 + (a_3\Delta - \alpha_3)\varphi_2 + b_1\mathrm{div}\mathbf{u} + m'_1 p_1 + m'_3 p_2 = \mathcal{F}_4,\\
&(a_3\Delta - \alpha_3)\varphi_1 + (a_2\Delta - \alpha_2)\varphi_2 + b_2\mathrm{div}\mathbf{u} + m'_3 p_1 + m'_2 p_2 = \mathcal{F}_5,\\
&(k_1\Delta + \gamma'_1)p_1 + (k_3\Delta + \gamma'_3)p_2 - \beta_1\mathrm{div}\mathbf{u} + m_1\varphi_1 + m_3\varphi_2 = \mathcal{F}_6,\\
&(k_3\Delta + \gamma'_3)p_1 + (k_2\Delta + \gamma'_2)p_2 - \beta_2\mathrm{div}\mathbf{u} + m_3\varphi_1 + m_2\varphi_2 = \mathcal{F}_7,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

სადაც $\mu_0 = \lambda + 2\mu$. ცხადია, (4.41)-დან გვაქვს

$$\mathbf{A}(\Delta)\mathbf{V} = \boldsymbol{\Phi}, \tag{4.42}$$

სადაც $\mathbf{V} = (\mathrm{div}\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2) = (V_1, V_2, \dots, V_5)$, $\boldsymbol{\Phi} = (\mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}', \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7)$ $= (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_5)$ და

$$\mathbf{A}(\Delta) = \left(A_{lj}(\Delta)\right)_{5\times5} = \begin{pmatrix} \mu_0\Delta & -b_1\Delta & -b_2\Delta & \beta'_1\Delta & \beta'_2\Delta \\ b_1 & a_1\Delta - \alpha_1 & a_3\Delta - \alpha_3 & m'_1 & m'_3 \\ b_2 & a_3\Delta - \alpha_3 & a_2\Delta - \alpha_2 & m'_3 & m'_2 \\ -\beta_1 & m_1 & m_3 & k_1\Delta + \gamma'_1 & k_3\Delta + \gamma'_3 \\ -\beta_2 & m_3 & m_2 & k_3\Delta + \gamma'_3 & k_2\Delta + \gamma'_2 \end{pmatrix}_{5\times5}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Lambda_1(\Delta) = \frac{1}{a_0 k_0 \mu_0} \det \mathbf{A}(\Delta) = \Delta \prod_{j=1}^{4} \left(\Delta + \lambda_j^2\right), \tag{4.43}$$

სადაც $a_0 = a_1 a_2 - a_3^2,\ k_0 = k_1 k_2 - k_3^2$, ხოლო $\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2$ და λ_4^2 შემდეგი განტოლების ფესვებია (ξ-ის მიმართ)

$$\det \begin{pmatrix} \mu_0 & -b_1 & -b_2 & \beta_1' & \beta_2' \\ b_1 & -a_1\xi - \alpha_1 & -a_3\xi - \alpha_3 & m_1' & m_3' \\ b_2 & -a_3\xi - \alpha_3 & -a_2\xi - \alpha_2 & m_3' & m_2' \\ -\beta_1 & m_1 & m_3 & -k_1\xi + \gamma_1' & -k_3\xi + \gamma_3' \\ -\beta_2 & m_3 & m_2 & -k_3\xi + \gamma_3' & -k_2\xi + \gamma_2' \end{pmatrix} = 0.$$

შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ $\operatorname{Im} \lambda_l > 0; \quad \lambda_l \neq \lambda_j,\ l, j = 1,2,3,4,\ l \neq j$. ცხადია, (4.42) განტოლებიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Lambda_1(\Delta)\operatorname{div}\mathbf{u} = \Psi_1, \quad \Lambda_1(\Delta)\varphi_l = \Psi_{l+1}, \quad \Lambda_1(\Delta)p_l = \Psi_{l+3}, \qquad l = 1,2, \tag{4.44}$$

სადაც

$$\Psi_m = \frac{1}{a_0 k_0 \mu_0} \sum_{j=1}^{5} A_{jm}^* \Phi_j\,, \qquad m = 1, 2, 3,4,5 \tag{4.45}$$

და A_{jm}^* არის $\mathbf{A}$ მატრიცის A_{jm} ელემენტის ალგებრული დამატება.

ახლა (4.39)-ის პირველ ტოლობაზე ვიმოქმედოთ $\Lambda_1(\Delta)$ ოპერატორით და გავითვალისწინოთ (4.44) თანაფარდობები. მაშინ მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\Lambda_2(\Delta)\mathbf{u} = \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}, \tag{4.46}$$

სადაც $\Lambda_2(\Delta) = \Delta\Lambda_1(\Delta)$ და

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{1}{\mu}\Lambda_1(\Delta)\boldsymbol{\mathcal{F}}' - \frac{1}{\mu}\nabla[(\lambda+\mu)\Psi_1 - b_\alpha \Psi_{\alpha+1} + \beta_\alpha' \Psi_{\alpha+3}]. \tag{4.47}$$

ადვილად ჩანს, რომ (4.44) და (4.46)-ის გაერთიანებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\boldsymbol{\Lambda}(\Delta)\mathbf{U} = \boldsymbol{\Psi}, \tag{4.48}$$

სადაც $\boldsymbol{\Psi} = (\widetilde{\boldsymbol{\Psi}},\ \Psi_2, \Psi_3,\ \Psi_4, \Psi_5)$ შვიდკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა და

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_{lj})_{7\times 7}, \qquad \Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \Lambda_{33} = \Lambda_2, \qquad \Lambda_{44} = \Lambda_{55} = \Lambda_{66} = \Lambda_{77} = \Lambda_1,$$
$$\Lambda_{lj} = 0, \qquad l \neq j, \qquad l, j = 1, 2, \dots, 7. \tag{4.49}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$m_{l1}(\Delta) = -\frac{1}{a_0 k_0 \mu \mu_0}\left[(\lambda+\mu)A_{l1}^*(\Delta) - b_\alpha A_{l;\alpha+1}^*(\Delta) + \beta_\alpha' A_{l;\alpha+3}^*(\Delta)\right],$$

$$m_{lj}(\Delta)=\frac{1}{a_0k_0\mu_0}A^*_{lj}(\Delta),\qquad l=1,2,\dots,5\qquad j=2,3,4,5. \tag{4.50}$$

(4.50)-ის ძალით (4.45) და (4.47)-დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}=\frac{1}{\mu}\Lambda_1(\Delta)\boldsymbol{\mathcal{F}}'+m_{11}(\Delta)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}'+\sum_{l=2}^{5}m_{l1}(\Delta)\nabla\mathcal{F}_{l+2},$$

$$\Psi_j=m_{1j}(\Delta)\mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}'+\sum_{l=2}^{5}m_{lj}(\Delta)\mathcal{F}_{l+2}\,,\qquad j=2,3,4,5. \tag{4.51}$$

მიღებული (4.51) ტოლობები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{F}}, \tag{4.52}$$

სადაც

$$\mathbf{K}(\mathbf{D_x})=\left(K_{lj}(\mathbf{D_x})\right)_{7\times7},\qquad K_{lj}(\mathbf{D_x})=\frac{1}{\mu}\Lambda_1\delta_{lj}+m_{11}(\Delta)\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j},$$

$$K_{l;r+2}(\mathbf{D_x})=m_{1r}(\Delta)\frac{\partial}{\partial x_l},\qquad K_{r+2;j}(\mathbf{D_x})=m_{r1}(\Delta)\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{4.53}$$

$$K_{r+2;m+2}(\mathbf{D_x})=m_{rm}(\Delta)\,,\qquad r,m=2,3,4,5.$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.40) და (4.48) ტოლობებს (4.52)-ში, ადვილად მივიღებთ

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{K}(\mathbf{D_x})=\boldsymbol{\Lambda}(\Delta). \tag{4.54}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x})=\left(\Upsilon_{lj}(\mathbf{x})\right)_{7\times7},\qquad \Upsilon_{11}(\mathbf{x})=\Upsilon_{22}(\mathbf{x})=\Upsilon_{33}(\mathbf{x})=\sum_{r=0}^{4}\eta_{2r}\gamma^{(r)}(\mathbf{x})+\eta_{10}\gamma_0'(\mathbf{x}),$$

$$\Upsilon_{44}(\mathbf{x})=\Upsilon_{55}(\mathbf{x})=\Upsilon_{66}(\mathbf{x})=\Upsilon_{77}(\mathbf{x})=\sum_{r=0}^{4}\eta_{1r}\gamma^{(r)}(\mathbf{x}), \tag{4.55}$$

$$\Upsilon_{lj}(\mathbf{x})=0,\qquad l\neq j,\qquad l,j=1,2,\dots,7,$$

სადაც

$$\gamma^{(0)}(\mathbf{x})=-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|},\qquad \gamma_0'(\mathbf{x})=-\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi},\qquad \gamma^{(j)}(\mathbf{x})=-\frac{e^{i\lambda_j|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}, \tag{4.56}$$

და

$$\eta_{10}=\prod_{l=1}^{4}\lambda_l^{-2},\qquad \eta_{1j}=\lambda_j^{-2}\prod_{l=1;l\neq j}^{4}(\lambda_j^2-\lambda_l^2)^{-1}, \tag{4.57}$$

$$\eta_{20} = \eta_{10} \sum_{l=1}^{4} \lambda_l^{-2}, \qquad \eta_{2j} = \lambda_j^{-4} \prod_{l=1; l\neq j}^{4} (\lambda_j^2 - \lambda_l^2)^{-1}. \qquad j = 1,2,3,4.$$

ამასთანავე, (4.43), (4.49), (4.56) და (4.57)-ზე დაყრდნობით მარტივია დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობა

$$\mathbf{\Lambda}(\Delta)\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_7, \tag{4.58}$$

ე.ი. $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x})$ არის $\mathbf{\Lambda}(\Delta)$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}(\mathbf{D_x})\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}). \tag{4.59}$$

ცხადია, (4.54), (4.58) და (4.59) ტოლობების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{K}(\mathbf{D_x})\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Lambda}(\Delta)\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_7,$$

ანუ $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ არის $\mathbf{M}(\mathbf{D_x})$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა. ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.6. $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (G_{lj}(\mathbf{x}))_{7\times 7}$ მატრიცა, რომელიც განსაზღვრულია (4.59) ფორმულით, (4.8) სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნია, სადაც $\mathbf{K}(\mathbf{D_x})$ და $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x})$ შესაბამისად მოცემულია (4.53) და (4.55) თანაფარდობებით.

მაშასადამე, $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცა ავაგეთ შემდეგი 6 ელემენტარული ფუნქციის საშუალებით $\gamma_0'(\mathrm{x})$, $\gamma^{(j)}(\mathrm{x})$, $(j = 0,1,\dots,4)$.

თეორემა 4.6-დან გამომდინარეობს $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცის შემდეგი ძირითადი თვისებები.

თეორემა 4.7. $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცის თითოეული სვეტი შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

როცა $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$.

თეორემა 4.8. შემდეგი შეფასებები

$$G_{lj}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \qquad G_{rm}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \qquad G_{r+2;m+2}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}),$$
$$G_{ls}(\mathbf{x}) = O(1), \qquad G_{sl}(\mathbf{x}) = O(1), \qquad G_{r;m+2}(\mathbf{x}) = O(1),$$
$$G_{r+2;m}(\mathbf{x}) = O(1), \qquad l,j = 1,2,3, \qquad r,m = 4,5, \qquad s = 4,5,6,7$$

სამართლიანია კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში.

თეორემა 4.9. მატრიცა $\mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{x}) = \left(G_{lj}^{(0)}(\mathbf{x})\right)_{7\times 7}$, რომელიც განსაზღვრულია თანაფარდობებით

$$G_{lj}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\left(\Delta\delta_{lj} - \frac{\lambda+\mu}{\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j}\right)\gamma_0'(\mathbf{x}) = -\frac{\lambda+3\mu}{8\pi\mu\mu_0}\frac{\delta_{lj}}{|\mathbf{x}|} - \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu\mu_0}\frac{x_l x_j}{|\mathbf{x}|^3},$$

$$G_{44}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{a_2}{a_0}\gamma^{(0)}(\mathbf{x}), \qquad G_{45}^{(0)}(\mathbf{x}) = G_{54}^{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{a_3}{a_0}\gamma^{(0)}(\mathbf{x}),$$

$$G_{55}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{a_1}{a_0}\gamma^{(0)}(\mathbf{x}), \qquad G_{66}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{k_2}{k_0}\,\gamma^{(0)}(\mathbf{x}),$$

$$G_{67}^{(0)}(\mathbf{x}) = G_{76}^{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{k_3}{k_0}\,\gamma^{(0)}(\mathbf{x}), \quad G_{77}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{k_1}{k_0}\,\gamma^{(0)}(\mathbf{x}), \quad l,j = 1,2,3,$$

შემდეგი სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნია

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad a_1\Delta\varphi_1 + a_3\Delta\varphi_2 = 0,\ \ a_3\Delta\varphi_1 + a_2\Delta\varphi_2 = 0,$$

$$k_1\Delta p_1 + k_3\Delta p_2 = 0, \quad k_3\Delta p_1 + k_2\Delta p_2 = 0.$$

თეორემა 4.10. შემდეგი თანაფარდობა

$$G_{lj}(\mathbf{x}) - G_{lj}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathrm{const} + O(|\mathbf{x}|), \qquad l,j = 1,2,\dots,7$$

სამართლიანია კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში.

მაშასადამე, თეორემა 4.8 და თეორემა 4.10-ის საფუძველზე $\mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{x})$ მატრიცა კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში წარმოადგენს (4.8) სისტემის $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ ფუნდამენტური მატრიცის სინგულარულ ნაწილს.

4.5. ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალები

ამ პარაგრაფში გამოვიყენებთ $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{D}_\mathbf{x},\mathbf{n}) = \left(\tilde{Q}_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x},\mathbf{n})\right)_{7\times 7}$ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორს, რომლის ელემენტები განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$\tilde{Q}_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x},\mathbf{n}) = Q_{lj}(\mathbf{D}_\mathbf{x},\mathbf{n}), \qquad \tilde{Q}_{l;r+5}(\mathbf{D}_\mathbf{x},\mathbf{n}) = -\beta_r' n_l,$$

$$\tilde{Q}_{ms}(\mathbf{D}_\mathbf{x},\mathbf{n}) = Q_{ms}(\mathbf{D}_\mathbf{x},\mathbf{n}), \qquad l = 1,2,3, \qquad j = 1,2,3,4,5,$$

$$r = 1,2, \qquad m = 4,5,6,7, \qquad s = 1,2,\dots,7, \tag{4.60}$$

სადაც $Q_{lj}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n})$ მოცემულია (4.12) ფორმულით.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

1) მარტივი ფენის პოტენციალი

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{g}(\mathbf{y})d_{\mathbf{y}}S,$$

2) ორმაგი ფენის პოტენციალი

$$\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \int_S [\widetilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{D_y},\mathbf{n}(\mathbf{y}))\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]^{\mathrm{T}}\,\mathbf{g}(\mathbf{y})d_{\mathbf{y}}S,$$

3) მოცულობითი პოტენციალი

$$\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^{\pm}) = \int_{\Omega^{\pm}} \mathbf{G}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\phi}(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

სადაც $\mathbf{G}$ არის $\mathbf{M}(\mathbf{D_x})$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა და წარმოიდგინება (4.59) სახით, $\widetilde{\mathbf{Q}}$ მოიცემა (4.60) ფორმულით, ხოლო $\mathbf{g}$ და $\boldsymbol{\phi}$ შვიდკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 4.11. თუ $S \in C^{r+1,v}, \mathbf{g} \in C^{r,v'}(S), 0 < v' < v \leq 1$ და r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მაშინ

ა) $\mathbf{P}^{(1)}(.,\mathbf{g}) \in C^{0,v'}(\mathbb{R}^3) \cap C^{r+1,v'}(\Omega^{\pm}) \cap C^{\infty}(\overline{\Omega^{\pm}})$,

ბ) $\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\pm}$,

გ) $\mathbf{Q}(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g})$ სინგულარული ინტეგრალია, როცა $\mathbf{z} \in S$,

დ) $\{\mathbf{Q}(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\}^{\pm} = \mp\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{Q}(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}), \quad \boldsymbol{z} \in S, \qquad (4.61)$

ე) $\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \ \frac{\partial}{\partial x_l}\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = O(|\mathbf{x}|^{-2})$,

როცა $|\mathbf{x}| \gg 1$ და $l = 1,2,3$.

თეორემა 4.12. თუ $S \in C^{r+1,v}, \mathbf{g} \in C^{r,v'}(S), 0 < v' < v \leq 1$, მაშინ

ა) $\mathbf{P}^{(2)}(.,\mathbf{g}) \in C^{r+1,v'}(\overline{\Omega^{\pm}}) \cap C^{\infty}(\Omega^{\pm})$,

ბ) $\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{\pm}$,

გ) $\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})$ სინგულარული ინტეგრალია, როცა $\mathbf{z}\in S$,

დ) $\left\{\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\right\}^{\pm}=\pm\dfrac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),\quad \mathbf{z}\in S,$ (4.62)

ე) $\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=O(|\mathbf{x}|^{-2}),\ \dfrac{\partial}{\partial x_l}\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=O(|\mathbf{x}|^{-3}),$

როცა $|\mathbf{x}|\gg 1$ და $l=1,2,3$.

ვ) $\{\mathbf{Q}(\mathbf{D}_\mathbf{z},\mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\}^{+}=\{\mathbf{Q}(\mathbf{D}_\mathbf{z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\}^{-},$

სადაც r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ხოლო m ნატურალური რიცხვია და $\mathbf{z}\in S$.

თეორემა 4.13. თუ $S\in C^{r+1,v},\boldsymbol{\phi}\in C^{r,v'}(\Omega^{+}),0<v'<v\leq 1$, მაშინ

ა) $\mathbf{P}^{(3)}(\cdot,\boldsymbol{\phi},\Omega^{+})\in C^{1,v'}(\mathbb{R}^3)\cap C^2(\Omega^{+})\cap C^{2,v'}\left(\overline{\Omega_0^{+}}\right)$,

ბ) $\mathbf{M}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^{+})=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Omega^{+}$,

სადაც Ω_0^{+} არეა $\mathbb{R}^3$-ში და $\Omega_0^{+}\subset\Omega^{+}$, ხოლო r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია.

თეორემა 4.14. თუ $S\in C^{1,v},\mathrm{supp}\boldsymbol{\phi}=\Omega\subset\Omega^{-},\boldsymbol{\phi}\in C^{0,v'}(\Omega^{-}),0<v'<v\leq 1$,მაშინ

ა) $\mathbf{P}^{(3)}(\cdot,\boldsymbol{\phi},\Omega^{-})\in C^{1,v'}(\mathbb{R}^3)\cap C^2(\Omega^{-})\cap C^{2,v'}(\overline{\Omega_0^{-}})$

ბ) $\mathbf{M}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^{-})=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Omega^{-}$,

სადაც Ω არეა $\mathbb{R}^3$-ში და $\overline{\Omega_0^{-}}\subset\Omega^{-}$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathcal{H}^{(1)}\mathbf{g}(\mathbf{z})=\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{H}^{(2)}\mathbf{g}(\mathbf{z})=\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\mathbf{Q}\big(\mathbf{D}_\mathbf{z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{H}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z})=-\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{H}^{(4)}\mathbf{g}(\mathbf{z})=-\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\mathbf{Q}\big(\mathbf{D}_\mathbf{z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{H}_\varsigma\mathbf{g}(\mathbf{z})=\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\varsigma\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),\quad \mathbf{z}\in S, \tag{4.63}$$

სადაც ς კომპლექსური რიცხვია. თეორემა 4.11 და თეორემა 4.12-ის საფუძველზე $\mathcal{H}^{(l)}$ $(l=1,2,3,4)$ და $\mathcal{H}_\varsigma$ სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორებია.

თუ $\mathbf{\Gamma}^{(r)}=(\Gamma_{lj}^{(r)})_{7\times 7}$ არის $\mathcal{H}^{(r)}$ $(r=1,2,3,4)$ ოპერატორის სიმბოლო, მაშინ (4.63)-დან გვაქვს

$$\det\mathbf{\Gamma}^{(1)} = \det\mathbf{\Gamma}^{(2)} = -\det\mathbf{\Gamma}^{(3)} = -\det\mathbf{\Gamma}^{(4)}$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) = -\frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \mu^2\varsigma^2}{128(\lambda + 2\mu)^2} < 0. \qquad (4.64)$$

აქედან გამომდინარე, $\mathcal{H}^{(r)}$ ოპერატორი ნორმალური ტიპისაა, სადაც $r = 1,2,3,4$.

ამასთანავე, თუ $\mathbf{\Gamma}_\varsigma$ და $\mathrm{ind}\mathcal{H}_\varsigma$ შესაბამისად $\mathcal{H}_\varsigma$ ოპერატორის სიმბოლო და ინდექსია, მაშინ შეგვიძლია ვაჩვენოთ

$$\det\mathbf{\Gamma}_\varsigma = -\frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \mu^2\varsigma^2}{128(\lambda + 2\mu)^2}$$

და $\det\mathbf{\Gamma}_\varsigma = 0$ კომპლექსური სიბრტყის მხოლოდ ორ ς_1 და ς_2 წერტილში, სადაც

$$\varsigma_1 = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \qquad \varsigma_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}.$$

თუ გავითვალისწინებთ $\det\mathbf{\Gamma}_1 = \det\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ ტოლობას, მივიღებთ $\varsigma_j \neq 1$ $(j = 1,2)$ და

$$\mathrm{ind}\mathcal{H}_1 = \mathrm{ind}\mathcal{H}^{(1)} = \mathrm{ind}\mathcal{H}_0 = 0.$$

სრულიად ანალოგიურად გვექნება

$$\mathrm{ind}\mathcal{H}^{(2)} = -\mathrm{ind}\mathcal{H}^{(1)} = 0, \qquad \mathrm{ind}\mathcal{H}^{(3)} = -\mathrm{ind}\mathcal{H}^{(4)} = 0.$$

მაშასადამე, სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი $\mathcal{H}^{(r)}$ $(r = 1,2,3,4)$ ნორმალური ტიპისაა და მისი ინდექსი ნულია. აქედან გამომდინარე, ამ ოპერატორების შესაბამის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებისთვის სამართლიანია ნეტერის თეორემები.

4.6. არსებობის თეორემები

ამ პარაგრაფში პოტენციალთა მეთოდისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დავამტკიცებთ ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულების დრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის მდგრადი რხევის $(K)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(K)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამონახსნების არსებობის თეორემებს, სადაც $K = I, II$.

თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ თეორემა 4.13 და თეორემა 4.14-ის საფუძველზე მოცულობითი პოტენციალი $\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{F}, \Omega^{\pm})$ არის (4.9) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი, სადაც $\mathbf{F} \in C^{0,\nu'}(\Omega^{\pm}), 0 < \nu' \leq 1$, ხოლო $\operatorname{supp}\mathbf{F}$ შემოსაზღვრული არეა Ω^{-} -ში. რის გამოც, საკმარისია დავამტკიცოთ $(K)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ და $(K)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანების რეგულარული ამონახსნების არსებობის თეორემები, სადაც $K = I, II$.

ამოცანა $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}), \tag{4.64}$$

სადაც $\mathbf{g}$ შვიდკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{x} \in \Omega^{+}$.

თეორემა 4.12-ის საფუძველზე, ვექტორ-ფუნქცია $\mathbf{U}$ შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია

$$\mathbf{M}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{4.65}$$

როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{+}$. თუ გავითვალისწინებთ (4.13) სასაზღვრო პირობას და (4.62) იგივეობას, მაშინ (4.64)-დან მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{H}^{(1)}\mathbf{g}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{4.66}$$

სადაც $\mathbf{g}$ უცნობი ვექტორ-ფუნქციაა და $\boldsymbol{z} \in S$. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის (4.66) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია.

ცხადია, (4.66)-ის შესაბამისი მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლება ჩაიწერება შემდეგი ფორმით

$$\mathcal{H}^{(2)}\mathbf{h}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}, \tag{4.67}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$, ხოლო $\mathbf{h}$ შვიდკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა. ვაჩვენოთ, რომ (4.67)-ს აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

ვთქვათ, $\mathbf{h}_0$ არის (4.67) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. თეორემა 4.11-ის და (4.67) ტოლობის საფუძველზე ვექტორ-ფუნქცია $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{h_0})$ იქნება $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი. როგორც ვიცით, თეორემა 4.5-ის ძალით $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ე.ი.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{-}. \tag{4.68}$$

ამასთანავე, თეორემა 4.11-ის და (4.68) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} = \mathbf{0},$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. აქედან გამომდინარე, $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ ვექტორი $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნია და თეორემა 4.3-ის ძალით ვღებულობთ

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+}. \tag{4.69}$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.61), (4.68) და (4.69) ფორმულებს, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathbf{h_0}(\mathbf{z}) = \{\mathbf{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} - \{\mathbf{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0},$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

მაშასადამე, (4.67) განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ნეტერის თეორემის საფუძველზე (4.66) არაერთგვაროვანი განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის. ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.15. თუ $S \in C^{2,\nu}, \mathbf{f} \in C^{1,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \le 1$, მაშინ არსებობს $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი, რომელიც ერთადერთია და წარმოიდგინება (4.64) ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (4.66) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ყოველთვის ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის.

ამოცანა $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი მარტივი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \tag{4.70}$$

სადაც $\mathbf{h}$ შვიდკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. თეორემა 4.11-ის ძალით $\mathbf{U}$ ვექტორ-ფუნქცია (4.65) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. თუ გამოვიყენებთ (4.16) სასაზღვრო პირობას და (4.61) იგივეობას, მაშინ (4.70)-დან უცნობი $\mathbf{h}$ ვექტორისთვის მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{H}^{(2)}\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{4.71}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

თეორემა 4.15-ში ვაჩვენეთ, რომ (4.71)-ის შესაბამის (4.67) ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. აქედან გამომდინარე, ნეტერის თეორემის ძალით (4.71) ინტეგრალური განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის. მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.16. თუ $S \in C^{2,\nu}, \mathbf{f} \in C^{0,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \leq 1$, მაშინ $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი არსებობს, იგი ერთადერთია და წარმოიდგინება (4.70) მარტივი ფენის პოტენციალის სახით, სადაც $\mathbf{h}$ არის (4.71) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის.

ამოცანა $(I)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ჯამის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}), \tag{4.72}$$

სადაც $\mathbf{g}$ შვიდკომპონენტიანი უცნობი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$.

ცხადია, თეორემა 4.11 და თეორემა 4.12-ის ძალით $\mathbf{U}$ ვექტორ-ფუნქცია (4.65) ერთგვაროვანი განტოლების რეგულარული ამონახსნია, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. თუ გავითვალისწინებთ (4.15) სასაზღვრო პირობას და (4.62) ფორმულას, მაშინ უცნობი $\mathbf{g}$ ვექტორ-ფუნქციისათვის (4.72)-დან მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{H}^{(5)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) \equiv \mathcal{H}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{4.73}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის (4.73) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია. მართლაც, მარტივი საჩვენებელია, რომ $\mathcal{H}^{(5)}$ ნორმალური ტიპის სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორია და $\operatorname{ind} \mathcal{H}^{(5)} = \operatorname{ind} \mathcal{H}^{(3)} = 0$. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ

$$\mathcal{H}^{(5)}\mathbf{g}_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \tag{4.74}$$

ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

ვთქვათ, $\mathbf{g}_0$ არის (4.74) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. მაშინ

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_0) + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_0) \tag{4.75}$$

ვექტორი იქნება $(I)^{-}_{\mathbf{0,0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი და თეორემა 4.5-ის ძალით მივიღებთ (4.68) ტოლობას.

ამასთანავე, (4.61), (4.62) და (4.75) ტოლობების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} - \{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} = \mathbf{g}_0(\boldsymbol{z}), \tag{4.76}$$

$$\{\mathbf{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} - \{\mathbf{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} = -\mathbf{g}_0(\boldsymbol{z}),$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. თუ გავითვალისწინებთ (4.68)-ს (4.76) თანაფარდობებს მივიღებთ

$$\{\mathbf{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z}) + \mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0}, \tag{4.77}$$

როცა $\boldsymbol{z} \in S$.

ცხადია, $\mathbf{V}$ ვექტორი (4.65) განტოლების ამონახსნია Ω^{+}-ში და აკმაყოფილებს (4.77) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას. ახლა გამოვიყენოთ (4.18) იგივეობები $\mathbf{U} = \mathbf{U}' = \mathbf{V}$ ვექტორისთვის და მივიღებთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0}, \tag{4.78}$$

როცა $\boldsymbol{z} \in S$. ბოლოს, (4.68) და (4.78)-ის ძალით (4.76)-დან გვაქვს $\mathbf{g}_0(\boldsymbol{z}) \equiv \mathbf{0}$, სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

მაშასადამე, (4.74) ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ნეტერის თეორემის საფუძველზე (4.73) ინტეგრალური განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის. ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.17. თუ $S \in C^{2,\nu}, \mathbf{f} \in C^{1,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \leq 1$, მაშინ $(I)^{-}_{\mathbf{0,f}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი არსებობს, იგი ერთადერთია და წარმოიდგინება (4.72) მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალის ჯამის სახით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (4.73) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის.

ამოცანა $(II)^{+}_{\mathbf{0,f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი მარტივი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}), \tag{4.79}$$

სადაც $\mathbf{g}$ შვიდკომპონენტიანი უცნობი ვექტორ-ფუნქცია და $\mathbf{x} \in \Omega^+$. თუ გავითვალისწინებთ (4.62) ფორმულას და (4.14) სასაზღვრო პირობას, მაშინ $\mathbf{g}$ ვექტორის მიმართ მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{H}^{(4)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{4.80}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. განვიხილოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mathcal{H}^{(4)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \tag{4.81}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. ცხადია, (4.81)-ის მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\mathcal{H}^{(3)}\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \tag{4.82}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

სამართლიანია შემდეგი ლემა.

ლემა 4.3. (4.81) და (4.82) ერთგვაროვან განტოლებებს აქვთ ექვსი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რომლებიც ქმნიან ამონახსნთა სრულ სისტემას.

ლემა 4.3 მტკიცდება ლემა 2.4-ის ანალიგიურად.

თეორემა 4.4-ის საფუძველზე შემოვიღოთ შემდეგი შვიდკომპონენტიანი ვექტორები:

$$\boldsymbol{\vartheta}^{(1)} = (1,0,0,0,0,0,0), \qquad \boldsymbol{\vartheta}^{(2)} = (0,1,0,0,0,0,0), \qquad \boldsymbol{\vartheta}^{(3)} = (0,0,1,0,0,0,0),$$
$$\boldsymbol{\vartheta}^{(4)} = (0,-x_3,x_2,0,0,0,0), \qquad \boldsymbol{\vartheta}^{(5)} = (x_3,0,-x_1,0,0,0,0),$$
$$\boldsymbol{\vartheta}^{(6)} = (-x_2,x_1,0,0,0,0,0). \tag{4.83}$$

ცხადია, $\{\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{6}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა. თეორემა 4.12-ის ძალით ყოველი $\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x})$ ვექტორი $(II)^+_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნია და ასევე, ამონახსნია (4.82) ერთგვაროვანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების. აქედან გამომდინარე, ჩვენ გაქვს

$$\mathbf{M}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^+,$$
$$\left\{\mathbf{Q}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x})\right\}^+ = \mathbf{0}, \qquad \mathcal{H}^{(3)}\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{z} \in S, \qquad j = 1,2,\dots,6.$$

რადგან $\{\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{6}$ არის (4.82)-ის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა, ამიტომ ნეტერის თეორემის საფუძველზე (4.80) ინტეგრალური

განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ჩაიწერება შემდეგი ფორმით

$$\int\limits_S \mathbf{f}(\boldsymbol{z})\cdot\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{z})d_{\boldsymbol{z}}S=0,\qquad j=1,2,\dots,6, \tag{4.84}$$

სადაც $\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}$ განსაზღვრულია (4.83)-ით.

თუ $\mathbf{f}=(f_1,f_2,\dots,f_7)$ და $\mathbf{f}^{(0)}=(f_1,f_2,f_3)$, მაშინ (4.83)-ის საფუძველზე (4.84) თანაფარდობა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\int\limits_S \mathbf{f}^{(0)}(\boldsymbol{z})d_{\boldsymbol{z}}S=\mathbf{0},\qquad \int\limits_S \boldsymbol{z}\times\mathbf{f}^{(0)}(\boldsymbol{z})d_{\boldsymbol{z}}S\;=\mathbf{0}. \tag{4.85}$$

მაშასადამე, დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.18. თუ $S\in\ C^{2,\nu},\mathbf{f}\in C^{0,\nu'}(S),0<\nu'<\nu\leq 1$, მაშინ $(II)^+_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანა ამოხსნადია მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია (4.85) პირობა. ამ შემთხვევაში ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება (4.79) მარტივი ფენის პოტენციალის სახით და განსაზღვრულია $\widetilde{\mathbf{U}}=(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\tilde{p}_1,\tilde{p}_2)$ შესაკრები ვექტორის სიზუსტით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (4.80) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი და

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})=\tilde{\boldsymbol{a}}+\tilde{\boldsymbol{b}}\times\mathbf{x},\qquad \tilde{\varphi}_l(\mathbf{x})=\tilde{p}_l\,(\mathbf{x})\equiv\mathbf{0},\qquad \mathbf{x}\in\Omega^+,\qquad l=1,2,$$

ხოლო $\tilde{\boldsymbol{a}}$ და $\tilde{\boldsymbol{b}}$ ნებისმიერი სამკომპონენტიანი მუდმივი ვექტორებია.

თავი 5. ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების თერმოდრეკადობის ბმული კვაზისტატიკის თეორიის ამოცანები

5.1. ძირითადი განტოლებები

ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულების თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის განტოლებები ეფუძნება ერთმანეთთან დაკავშირებულ ექვსი ტიპის შემდეგ თანაფარდობებს:

1. **წონასწორობის განტოლებები**

$$\hat{t}_{lj,j} = -\rho \hat{F}'_l, \qquad \hat{\sigma}^{(1)}_{j,j} + \hat{\xi}^{(1)} = -\rho \hat{s}_1, \qquad \hat{\sigma}^{(2)}_{j,j} + \hat{\xi}^{(2)} = -\rho \hat{s}_2, \qquad l = 1,2,3, \tag{5.1}$$

სადაც $\hat{\sigma}^{(1)}_j$, $\hat{\xi}^{(1)}, \hat{s}_1$ და $\hat{\sigma}^{(2)}_j$, $\hat{\xi}^{(2)}, \hat{s}_2$ $(j = 1,2,3)$ არის სხეულის მაწონასწორებელი ძალის კომპონენტი, შიგა წონასწორობის ძალა, გარე მაწონასწორებელი მოცულობითი ძალა შესაბამისად ფორებისა და ბზარების ქსელებისათვის,

$$\hat{\xi}^{(1)} = -b_1 \hat{e}_{rr} - \alpha_1 \hat{\varphi}_1 - \alpha_3 \hat{\varphi}_2 + m_1 \hat{p}_1 + m_3 \hat{p}_2 + \varepsilon_1 \hat{\theta},$$
$$\hat{\xi}^{(2)} = -b_2 \hat{e}_{rr} - \alpha_3 \hat{\varphi}_1 - \alpha_2 \hat{\varphi}_2 + m_3 \hat{p}_1 + m_2 \hat{p}_2 + \varepsilon_2 \hat{\theta}. \tag{5.2}$$

2. **ძირითადი განტოლებები**

$$\hat{t}_{lj} = 2\mu \hat{e}_{lj} + \lambda \hat{e}_{rr} \delta_{lj} + \left(b_\alpha \hat{\varphi}_\alpha - \beta_\alpha \hat{p}_\alpha - \varepsilon_0 \hat{\theta}\right)\delta_{lj},$$
$$\hat{\sigma}^{(1)}_l = a_1 \hat{\varphi}_{1,l} + a_3 \hat{\varphi}_{2,l}, \qquad \hat{\sigma}^{(2)}_j = a_3 \hat{\varphi}_{1,l} + a_2 \hat{\varphi}_{2,l},$$
$$\rho \hat{\eta} = \varepsilon_0 \hat{e}_{rr} + \varepsilon_\alpha \hat{\varphi}_\alpha + \varepsilon_{\alpha+2} \hat{p}_\alpha + a\hat{\theta}, \qquad l, j = 1,2,3, \tag{5.3}$$

სადაც $\hat{\eta}$ ენტროპიაა, $\hat{e}_{lj}$ დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტია და განსაზღვრულია (2.3) ფორმულით, ხოლო a სხეულის სითბოტევადობაა.

3. **სითხის მასის შენახვის განტოლება**

$$\hat{v}^{(1)}_{j,j} + \dot{\hat{\zeta}}_1 + \beta_1 \dot{\hat{e}}_{rr} + \gamma_0 (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 0,$$
$$\hat{v}^{(2)}_{j,j} + \dot{\hat{\zeta}}_2 + \beta_2 \dot{\hat{e}}_{rr} - \gamma_0 (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 0, \tag{5.4}$$

სადაც $\hat{\mathbf{v}}^{(1)} = \left(\hat{v}_1{}^{(1)}, \hat{v}_2{}^{(1)}, \hat{v}_3{}^{(1)}\right)$ და $\hat{\mathbf{v}}^{(2)} = \left(\hat{v}_1{}^{(2)}, \hat{v}_2{}^{(2)}, \hat{v}_3{}^{(2)}\right)$ სითხის ნაკადის ვექტორებია შესაბამისად ფორებსა და ბზარებში, γ_0 სითხის შიდა გადაადგილების (გაჟონვის) კოეფიციენტია, რომელიც განსაზღვრავს სითხის მოძრაობას ფორებსა და ბზარებში, $\gamma_0 \geq 0$,

$$\hat{\zeta}_1 = \gamma_1\hat{p}_1 + \gamma_3\hat{p}_2 + m_1\hat{\varphi}_1 + m_3\hat{\varphi}_2 + \varepsilon_3\hat{\theta},$$
$$\hat{\zeta}_2 = \gamma_3\hat{p}_1 + \gamma_2\hat{p}_2 + m_3\hat{\varphi}_1 + m_2\hat{\varphi}_2 + \varepsilon_4\hat{\theta}. \qquad (5.5)$$

4. დარსის კანონი ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულებისთვის

$$\hat{\mathbf{v}}^{(1)} = -\frac{\kappa_1'}{\mu'}\nabla\hat{p}_1 - \frac{\kappa_3'}{\mu'}\nabla\hat{p}_2 - \rho_1\hat{\mathbf{s}}_3,$$
$$\hat{\mathbf{v}}^{(2)} = -\frac{\kappa_3'}{\mu'}\nabla\hat{p}_1 - \frac{\kappa_2'}{\mu'}\nabla\hat{p}_2 - \rho_2\hat{\mathbf{s}}_4, \qquad (5.6)$$

სადაც κ_j' $(j = 1,2,3)$ ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულის შიგა მაკროსკოპული გამტარიანობაა; ρ_1, $\hat{\mathbf{s}}_3$ და ρ_2, $\hat{\mathbf{s}}_4$ არის სითხის სიმკვრივე, გარე ძალა შესაბამისად ფორებისა და ბზარებისთვის, ხოლო $b_l, \beta_l, m_j, a_j, \alpha_j, \gamma_j, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ $(l = 1,2, j = 1,2,3)$ მასალის ძირითადი მუდმივებია.

5. ფურიეს სითბოგამტარობის კანონი

$$\hat{\mathbf{q}} = -\kappa\nabla\hat{\theta}, \qquad (5.7)$$

სადაც $\hat{\mathbf{q}}$ სითბოს ნაკადის ვექტორია, ხოლო κ ფოროვანი მასალის თბოგამტარობაა.

6. სითბოს გადაცემის განტოლება

$$\operatorname{div}\hat{\mathbf{q}} = -T_0\dot{\hat{\eta}} + \rho\hat{s}_5, \qquad (5.8)$$

სადაც $\hat{s}_5$ სითბოს წყაროა.

თუ გავითვალისწინებთ (2.3), (5.2), (5.3), (5.5)-(5.7) ტოლობებს (5.1), (5.4) და (5.8) თანაფარდობებში, მივიღებთ ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის განტოლებათა შემდეგ სისტემას ჩაწერილს $\hat{\mathbf{u}}$ გადაადგილების ვექტორის, $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ ფორების ფარდობითი მოცულობის, $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ სითხის წნევისა და $\hat{\theta}$ ტემპერატურის ცვლილების მიმართ:

$$\mu\Delta\hat{\mathbf{u}} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\hat{\mathbf{u}} + b_\alpha\nabla\varphi_\alpha - \beta_\alpha\nabla p_\alpha - \varepsilon_0\nabla\hat{\theta} = -\rho\hat{\mathbf{F}}',$$
$$a_1\Delta\hat{\varphi}_1 + a_3\Delta\hat{\varphi}_2 - \alpha_1\hat{\varphi}_1 - \alpha_3\hat{\varphi}_2 - b_1\operatorname{div}\hat{\mathbf{u}} + m_1\hat{p}_1 + m_3\hat{p}_2 + \varepsilon_1\hat{\theta} = -\rho\hat{s}_1, \qquad (5.9)$$
$$a_3\Delta\hat{\varphi}_1 + a_2\Delta\hat{\varphi}_2 - \alpha_3\hat{\varphi}_1 - \alpha_2\hat{\varphi}_2 - b_2\operatorname{div}\hat{\mathbf{u}} + m_3\hat{p}_1 + m_2\hat{p}_2 + \varepsilon_2\hat{\theta} = -\rho\hat{s}_2,$$
$$k_1\Delta\hat{p}_1 + k_3\Delta\hat{p}_2 - \gamma_1\dot{\hat{p}}_1 - \gamma_3\dot{\hat{p}}_2 - \beta_1\operatorname{div}\dot{\hat{\mathbf{u}}} - m_1\dot{\hat{\varphi}}_1 - m_3\dot{\hat{\varphi}}_2 - \varepsilon_3\dot{\hat{\theta}} - \gamma_0(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$$
$$= -\rho_1\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{s}}_{\mathbf{3}},$$
$$k_3\Delta\hat{p}_1 + k_2\Delta\hat{p}_2 - \gamma_3\dot{\hat{p}}_1 - \gamma_2\dot{\hat{p}}_2 - \beta_2\operatorname{div}\dot{\hat{\mathbf{u}}} - m_3\dot{\hat{\varphi}}_1 - m_2\dot{\hat{\varphi}}_2 - \varepsilon_3\dot{\hat{\theta}} + \gamma_0(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$$
$$= -\rho_2\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{s}}_{\mathbf{4}},$$

$$\kappa\Delta\dot{\hat{\theta}} - T_0\left(a\dot{\hat{\theta}} + \varepsilon_0 \operatorname{div}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \varepsilon_\alpha \dot{\hat{\varphi}}_\alpha + \varepsilon_{\alpha+2}\dot{\hat{p}}_\alpha\right) = -\rho s_5,$$

სადაც $k_j = \frac{\kappa_j}{\mu_j}$ $(j = 1,2,3)$.

თუ $\hat{u}_j, \hat{F}_j, \hat{\varphi}_l, \hat{p}_l, \hat{s}_l, \hat{\mathbf{s}}_{l+2}, \hat{s}_5, \hat{\theta}$ $(l = 1,2, j = 1,2,3)$ ფუნქციები დროის პარამეტრზე ჰარმონიულადაა დამოკიდებული, ანუ

$$\{\hat{u}_j, \hat{F}_j, \hat{\varphi}_l, \hat{p}_l, \hat{s}_l, \hat{\mathbf{s}}_{l+2}, \hat{s}_5, \hat{\theta}\}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}[\{u_j, F_j, \varphi_l, p_l, s_l, \mathbf{s}_{l+2}, s_5, \theta\}(\mathbf{x})\, e^{-i\omega t}],$$

მაშინ (5.9)-დან მივიღებთ ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულების თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის მდგრადი რხევის განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + b_\alpha\nabla\varphi_\alpha - \beta_\alpha\nabla p_\alpha - \varepsilon_0\nabla\theta = -\rho\boldsymbol{F}',\\
&(a_1\Delta - \alpha_1)\varphi_1 + (a_3\Delta - \alpha_3)\varphi_2 - b_1\operatorname{div}\mathbf{u} + m_1 p_1 + m_3 p_2 + \varepsilon_1\theta = -\rho s_1,\\
&(a_3\Delta - \alpha_3)\varphi_1 + (a_2\Delta - \alpha_2)\varphi_2 - b_2\operatorname{div}\mathbf{u} + m_3 p_1 + m_2 p_2 + \varepsilon_2\theta = -\rho s_2,\\
&(k_1\Delta + \gamma_1')p_1 + (k_3\Delta + \gamma_3')p_2 + \beta_1'\operatorname{div}\mathbf{u} + m_1'\varphi_1 + m_3'\varphi_2 + \varepsilon_3'\theta = -\rho_1\operatorname{div}\boldsymbol{s}_3,\\
&(k_3\Delta + \gamma_3')p_1 + (k_2\Delta + \gamma_2')p_2 + \beta_2'\operatorname{div}\mathbf{u} + m_3'\varphi_1 + m_2'\varphi_2 + \varepsilon_4'\theta = -\rho_2\operatorname{div}\boldsymbol{s}_4,\\
&(\kappa\Delta + a')\theta + \varepsilon_0'\operatorname{div}\mathbf{u} + \varepsilon_\alpha'\varphi_\alpha + \varepsilon_{\alpha+2}'T_0 p_\alpha = -\rho s_5,
\end{aligned}\tag{5.10}$$

სადაც $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{F}' = (F_1', F_2', F_3')$, ω რხევის სიხშირეა, $\omega > 0$, $\beta_l' = i\omega\beta_l$, $a' = i\omega a T_0$, $m_j' = i\omega m_j$, $\varepsilon_{j-1}' = i\omega\varepsilon_{j-1}T_0$, $\varepsilon_{l+2}' = i\omega\varepsilon_{l+2}$, $\gamma_l' = i\omega\gamma_l - \gamma_0$, $\gamma_3' = i\omega\gamma_3 + \gamma_0$ $(l = 1,2,\ j = 1,2,3)$.

შემოვიღოთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი მატრიცულ დიფერენციალური ოპერატორი:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x}) = \left(\mathcal{M}_{lj}(\mathbf{D_x})\right)_{8\times 8}, \quad \mathcal{M}_{lj} = \mu\Delta\delta_{lj} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j},$$

$$\mathcal{M}_{l;r+3} = -\mathcal{M}_{r+3;l} = b_r\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad \mathcal{M}_{l;r+5} = -\beta_r\frac{\partial}{\partial x_l}, \ \ \mathcal{M}_{l8} = -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$\mathcal{M}_{44} = a_1\Delta - \alpha_1, \quad \mathcal{M}_{45} = \mathcal{M}_{54} = a_3\Delta - \alpha_3, \ \ \mathcal{M}_{55} = a_2\Delta - \alpha_2\,,$$

$$\mathcal{M}_{46} = m_1, \quad \mathcal{M}_{47} = \mathcal{M}_{56} = m_3, \quad \mathcal{M}_{57} = m_2, \quad \mathcal{M}_{r+3;8} = \varepsilon_r, \ \ \mathcal{M}_{r+5;l} = \beta_r'\frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$\mathcal{M}_{64} = m_1', \quad \mathcal{M}_{65} = \mathcal{M}_{74} = m_3', \quad \mathcal{M}_{75} = m_2', \ \ \mathcal{M}_{66} = k_1\Delta + \gamma_1',$$

$$\mathcal{M}_{67} = \mathcal{M}_{76} = k_3\Delta + \gamma_3', \quad \mathcal{M}_{77} = k_2\Delta + \gamma_2', \quad \mathcal{M}_{r+5;8} = \varepsilon_{r+2}',$$

$$\mathcal{M}_{8l} = \varepsilon_0'\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad \mathcal{M}_{8;r+3} = \varepsilon_r', \ \ \mathcal{M}_{8;r+5} = \varepsilon_{r+2}'T_0, \ \ \mathcal{M}_{88} = \kappa\Delta + a',$$

$$l, j = 1,2,3, \quad r = 1,2.$$

ცხადია, (5.10) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{5.11}$$

სადაც $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2, \theta)$ და $\mathbf{F} = (-\rho\mathbf{F}', -\rho s_1, -\rho s_2, -\rho_1 \mathrm{div}\mathbf{s}_1, -\rho_2 \mathrm{div}\mathbf{s}_2, -\rho s_5)$ რვაკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია და $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

ამ თავში ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3^2 > 0, \quad (3\lambda + 2\mu)\alpha_1 > 3b_1^2,$$

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 > 0, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_1\gamma_2 - \gamma_3^2 > 0, \quad k_1 > 0, \quad k_1 k_2 - k_3^2 > 0,$$

$$\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2) > \alpha_1 b_2^2 - 2\alpha_3 b_1 b_2 + \alpha_2 b_1^2,$$

$$\kappa > 0, \quad a(\gamma_1\gamma_2 - \gamma_3^2) > \gamma_1\varepsilon_4^2 - 2\gamma_3\varepsilon_3\varepsilon_4 + \gamma_2\varepsilon_3^2. \tag{5.12}$$

5.2. სასაზღვრო ამოცანები

განსაზღვრება 5.1. $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_8)$ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება რეგულარული Ω^--ში (ან Ω^+-ში), თუ

ა) $U_l \in C^2(\Omega^-) \cap C^1(\overline{\Omega^-})$ $\left(\text{ან } U_l \in C^2(\Omega^+) \cap C^1\left(\overline{\Omega^+}\right)\right)$,

ბ) $U_l(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1})$, $\quad U_{l,j}(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|^{-1})$, (5.13)

როცა $|\mathbf{x}| \gg 1$, $l = 1,2,\dots,8$ და $j = 1,2,3$.

შემდეგში გამოვიყენებთ $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = \left(\mathcal{Q}_{lj}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n})\right)_{8\times 8}$ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორს, სადაც

$$\mathcal{Q}_{lj}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = \mu\delta_{lj}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial x_l} + \lambda n_l \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathcal{Q}_{lr}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = b_{r-3} n_l,$$

$$\mathcal{Q}_{l;r+2}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = -\beta_{r-3} n_l, \quad \mathcal{Q}_{l8}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = -\varepsilon_0 n_l, \quad \mathcal{Q}_{44}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = a_1 \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}},$$

$$\mathcal{Q}_{45}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = \mathcal{Q}_{54}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = a_3 \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}, \quad \mathcal{Q}_{55}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = a_2 \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}, \quad \mathcal{Q}_{66}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = k_1 \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}},$$

$$\mathcal{Q}_{67}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = \mathcal{Q}_{76}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = k_3 \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}, \quad \mathcal{Q}_{77}(\mathbf{D_x}, \mathbf{n}) = k_2 \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}},$$

$$\mathcal{Q}_{88}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\kappa\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}},\quad \mathcal{Q}_{sj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\mathcal{Q}_{r;m+2}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\mathcal{Q}_{r+2;m}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})$$
$$=\mathcal{Q}_{r8}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\mathcal{Q}_{r+2;8}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\mathcal{Q}_{8r}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\mathcal{Q}_{8;r+2}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=0,$$
$$l,j=1,2,3,\quad r,m=4,5,\quad s=4,5,6,7,8. \tag{5.14}$$

ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულების თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიის მდგრადი რხევის შიგა და გარე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად.

ვიპოვოთ (5.11)-ის რეგულარული $\mathbf{U}$ ამონახსნი, როცა $\mathbf{x}\in\Omega^+$, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{\Omega^+\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^+=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{5.15}$$

ამოცანა $(I)^+_{\mathbf{F,f}}$-ში და

$$\lim_{\Omega^+\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\left\{\boldsymbol{\mathcal{Q}}\big(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\mathbf{U}(\mathbf{z})\right\}^+=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{5.16}$$

ამოცანა $(II)^+_{\mathbf{F,f}}$-ში, სადაც $\mathbf{F}$ და $\mathbf{f}$ რვაკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია.

ვიპოვოთ (5.11)-ის რეგულარული $\mathbf{U}$ ამონახსნი, როცა $\mathbf{x}\in\Omega^-$, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{\Omega^-\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^-=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{5.17}$$

ამოცანა $(I)^-_{\mathbf{F,f}}$-ში და

$$\lim_{\Omega^-\ni\mathbf{x}\to\mathbf{z}\in S}\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}(\mathbf{z}))\mathbf{U}(\mathbf{x})\equiv\left\{\boldsymbol{\mathcal{Q}}\big(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\mathbf{U}(\mathbf{z})\right\}^-=\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{5.18}$$

ამოცანა $(II)^-_{\mathbf{F,f}}$-ში, სადაც $\mathbf{F}$ და $\mathbf{f}$ რვაკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია და supp$\mathbf{F}$ შემოსაზღვრულია Ω^--ში.

ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ მდგრადი რხევის $(I)^\pm_{\mathbf{F,f}}$ და $(II)^\pm_{\mathbf{F,f}}$ შიდა და გარე სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული (კლასიკური) ამონახსნების არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით. ერთადერთობის თეორემების დასამტკიცებლად გამოვიყენებთ გრინის იგივეობებს, ხოლო არსებობის თეორემების დასამტკიცებლად - ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალების ძირითად თვისებებს. ამ თვისებებზე დაყრდნობით $(I)^\pm_{\mathbf{F,f}}$ და $(II)^\pm_{\mathbf{F,f}}$ სასაზღვრო ამოცანები დაიყვანება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომელთათვისაც სამართლიანია ნეტერის თეორემები.

5.3. ერთადერთობის თეორემები

ამ პარაგრაფში მივიღებთ ორგვარი ფოროვნობის მქონე სხეულების თერმოდრეკადობის ბმულ წრფივ კვაზისტატიკის თეორიის გრინის ფორმულებს (იგივეობებს).

შემდეგში გამოვიყენებთ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორებს:

1) $$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(0)}(\mathbf{D_x}) = \left(\mathcal{M}_{lj}^{(0)}(\mathbf{D_x})\right)_{3\times3}, \qquad \mathcal{M}_{lj}^{(0)}(\mathbf{D_x}) = \mu\Delta\delta_{lj} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(1)}(\mathbf{D_x}) = \left(\mathcal{M}_{lr}^{(1)}(\mathbf{D_x})\right)_{3\times8}, \qquad \mathcal{M}_{lr}^{(0)}(\mathbf{D_x}) = \mathcal{M}_{lr}(\mathbf{D_x}),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(m)}(\mathbf{D_x}) = \left(\mathcal{M}_{1r}^{(m)}(\mathbf{D_x})\right)_{1\times8}, \qquad \mathcal{M}_{1r}^{(m)}(\mathbf{D_x}) = \mathcal{M}_{m+2;r}(\mathbf{D_x}),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(m+2)}(\mathbf{D_x}) = \left(\mathcal{M}_{1r}^{(m+2)}(\mathbf{D_x})\right)_{1\times8}, \qquad \mathcal{M}_{1r}^{(m+2)}(\mathbf{D_x}) = \mathcal{M}_{m+4;r}(\mathbf{D_x}),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(6)}(\mathbf{D_x}) = \left(\mathcal{M}_{1r}^{(6)}(\mathbf{D_x})\right)_{1\times8}, \qquad \mathcal{M}_{1r}^{(6)}(\mathbf{D_x}) = \mathcal{M}_{8r}(\mathbf{D_x});$$

2) $$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{(0)}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}) = \left(\mathcal{Q}_{lj}^{(0)}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})\right)_{3\times3}, \quad \mathcal{Q}_{lj}^{(0)}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}) = \mathcal{Q}_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{(1)}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}) = \left(\mathcal{Q}_{lr}^{(1)}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})\right)_{3\times8}, \quad \mathcal{Q}_{lr}^{(1)}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}) = \mathcal{Q}_{lr}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}),$$

სადაც $l,j = 1,2,3$ $m = 2,3$ და $r = 1,2,\dots,8$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathcal{E}^{(0)}(\mathbf{U},\mathbf{u}') = \frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\mathrm{div}\mathbf{u}\,\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}'} + \frac{\mu}{2}\sum_{j=l;l\neq j}^{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_l}+\frac{\partial \overline{u_l'}}{\partial x_j}\right)$$
$$+\frac{\mu}{3}\sum_{l,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}-\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \overline{u_l'}}{\partial x_l}-\frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_j}\right),$$

$$\mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}') = \mathcal{E}^{(0)}(\mathbf{U},\mathbf{u}') + (b_\alpha\varphi_\alpha - \beta_\alpha p_\alpha - \varepsilon_0\theta)\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}'},$$
$$\mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1') = (a_1\nabla\varphi_1 + a_3\nabla\varphi_2)\cdot\nabla\varphi_1' + (b_1\mathrm{div}\mathbf{u} + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_3\varphi_2 - m_1p_1 - m_3p_2 - \varepsilon_1\theta)\overline{\varphi_1'},$$
$$\mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2') = (a_3\nabla\varphi_1 + a_2\nabla\varphi_2)\cdot\nabla\varphi_2' + (b_2\mathrm{div}\mathbf{u} + \alpha_3\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 - m_3p_1 - m_2p_2 - \varepsilon_2\theta)\overline{\varphi_2'},$$
$$\mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{U},p_1') = (k_1\nabla p_1 + k_3\nabla p_2)\cdot\nabla p_1' - (\beta_1'\mathrm{div}\mathbf{u} + m_1'\varphi_1 + m_3'\varphi_2 + \gamma_1'p_1 + \gamma_3'p_2 + \varepsilon_3'\theta)\overline{p_1'},$$
$$\mathcal{E}^{(5)}(\mathbf{U},p_2') = (k_3\nabla p_1 + k_2\nabla p_2)\cdot\nabla p_2' - (\beta_2'\mathrm{div}\mathbf{u} + m_3'\varphi_1 + m_2'\varphi_2 + \gamma_3'p_1 + \gamma_2'p_2 + \varepsilon_4'\theta)\overline{p_2'},$$
$$\mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U},\theta') = \kappa\nabla\theta\cdot\nabla\theta' - (a'\theta + \varepsilon_0'\mathrm{div}\mathbf{u} + \varepsilon_\alpha'\varphi_\alpha + \varepsilon_{\alpha+2}'T_0p_\alpha)\overline{\theta'}. \tag{5.19}$$

შემდეგი ლემები საჭიროა ერთადერთობის თეორემების დასამტკიცებლად.

ლემა 5.1. თუ $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\varphi_1,\varphi_2,p_1,p_2,\theta)$ რეგულარული ვექტორია Ω^+ -ში, $u_j',\varphi_1',\varphi_2',p_1',p_2',\theta'\in C^1(\Omega^+)\cap C(\overline{\Omega^+})$, $j=1,2,3$, მაშინ

$$\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(1)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{x})+\mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}')\right]d\mathbf{x}=\int_S \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{(1)}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{U}\cdot\mathbf{u}'d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(2)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\varphi_1'(\mathbf{x})}+\mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1')\right]d\mathbf{x}=\int_S\left(a_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{n}}+a_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{\varphi_1'}d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(3)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\varphi_2'(\mathbf{x})}+\mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2')\right]d\mathbf{x}=\int_S\left(a_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{n}}+a_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{\varphi_2'}d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(4)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{p_1'(\mathbf{x})}+\mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{U},p_1')\right]d\mathbf{x}=\int_S\left(k_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{n}}+k_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{p_1'}d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(5)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{p_2'(\mathbf{x})}+\mathcal{E}^{(5)}(\mathbf{U},p_2')\right]d\mathbf{x}=\int_S\left(k_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{n}}+k_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathbf{n}}\right)\overline{p_2'}d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(6)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\theta'(\mathbf{x})}+\mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U},\theta')\right]d\mathbf{x}=\kappa\int_S\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}}\overline{\theta}'d_{\mathbf{z}}S, \tag{5.20}$$

სადაც $\mathbf{u}'=(u_1',u_2',u_3')$.

დამტკიცება. თუ დრეკადობის კლასიკური თეორიიდან გამოვიყენებთ გრინის პირველ იგივეობას (მაგ., იხ. [44])

$$\int_{\Omega^+}\left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(0)}(\mathbf{D_x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{x})+\mathcal{E}^{(0)}(\mathbf{u},\mathbf{u}')\right]d\mathbf{x}=\int_S \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{(0)}(\mathbf{D_z},\mathbf{n})\mathbf{u}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{z})d_{\mathbf{z}}S,$$

მაშინ (5.19)-ის ძალით მარტივად მივიღებთ (5.19)-ის პირველ თანაფარდობა.

მეორე მხრივ, (5.20)-ის დანარჩენი ფორმულები მიიღება (5.19) ფორმულების საფუძველზე მათემატიკური ფიზიკიდან ცნობილი შემდეგი იგივეობის გამოყენებით

$$\int_{\Omega^+}\left[\Delta\varphi_l(\mathbf{x})\overline{\varphi_j'(\mathbf{x})}+\nabla\varphi_l(\mathbf{x})\cdot\nabla\varphi_j'(\mathbf{x})\right]d\mathbf{x}=\int_S\frac{\partial\varphi_l(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{z})}\overline{\varphi_j'(\mathbf{z})}d_{\mathbf{z}}S.$$

■

ლემა 5.1-დან (5.13)-ის გამოყენებით მტკიცდება შემდეგი ლემა.

ლემა 5.2. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2, \theta)$ და $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi_1', \varphi_2', p_1', p_2', \theta')$ რეგულარული ვექტორებია Ω^-, მაშინ

$$\int_{\Omega^-} \left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(1)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + \mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}')\right] d\mathbf{x} = -\int_S \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{(1)}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}' d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^-} \left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(2)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\varphi_1'(\mathbf{x})} + \mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi_1')\right] d\mathbf{x} = -\int_S \left(a_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} + a_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}}\right) \overline{\varphi_1'} d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^-} \left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(3)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\varphi_2'(\mathbf{x})} + \mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U}, \varphi_2')\right] d\mathbf{x} = -\int_S \left(a_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} + a_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}}\right) \overline{\varphi_2'} d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^-} \left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(4)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{p_1'(\mathbf{x})} + \mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{U}, p_1')\right] d\mathbf{x} = -\int_S \left(k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} + k_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}}\right) \overline{p_1'} d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^-} \left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(5)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{p_2'(\mathbf{x})} + \mathcal{E}^{(5)}(\mathbf{U}, p_2')\right] d\mathbf{x} = -\int_S \left(k_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}}\right) \overline{p_2'} d_{\mathbf{z}}S,$$

$$\int_{\Omega^-} \left[\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(6)}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x})\overline{\theta'(\mathbf{x})} + \mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U}, \theta'\right] d\mathbf{x} = -\kappa \int_S \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \overline{\theta'} d_{\mathbf{z}}S, \tag{5.21}$$

სადაც $\mathbf{u}' = (u_1', u_2', u_3')$ სამკომპონენტიანი ვექტორია.

ამ ლემებზე დაყრდნობით მარტივად მივიღებთ შემდეგი თეორემების სამართლიანობას.

თეორემა 5.1. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2, \theta)$ რეგულარული ვექტორია Ω^+-ში, $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi_1', \varphi_2', p_1', p_2', \theta') \in C^1(\Omega^+) \cap C\left(\overline{\Omega^+}\right)$, მაშინ

$$\int_{\Omega^+} [\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}'(\mathbf{x}) + \mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{U}')] d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{U}'(\mathbf{z}) d_{\mathbf{z}}S, \tag{5.22}$$

სადაც

$$\mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{U}') = \mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}) + \mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi_1') + \mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U}, \varphi_2') + \mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{U}, p_1')$$
$$+\mathcal{E}^{(5)}(\mathbf{U}, p_2') + \mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U}, \theta').$$

თეორემა 5.2. თუ $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2, \theta)$ და $\mathbf{U}' = (\mathbf{u}', \varphi_1', \varphi_2', p_1', p_2', \theta')$ რეგულარული ვექტორებია Ω^- მაშინ

$$\int_{\Omega^-} [\mathcal{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}'(\mathbf{x}) + \mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{U}')]d\mathbf{x} = -\int_S \mathcal{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{U}'(\mathbf{z})d_{\mathbf{z}}S. \qquad (5.23)$$

ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიაში (5.22) და (5.23) ფორმულები წარმოადგენენ გრინის პირველ იგივეობებს შესაბამისად Ω^+ და Ω^- არეებისთვის.

ცხადია, (5.19) ფორმულებიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}) = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\,|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + \mathcal{E}_0(\mathbf{u}) + (b_\alpha\varphi_\alpha - \beta_\alpha p_\alpha - \varepsilon_0\theta)\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}},$$

$$\mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U}, \varphi_1) = (a_1\nabla\varphi_1 + a_3\nabla\varphi_2)\cdot\nabla\varphi_1 + (b_1\mathrm{div}\mathbf{u} + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_3\varphi_2 - m_1p_1 - m_3p_2 - \varepsilon_1\theta)\overline{\varphi_1},$$

$$\mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U}, \varphi_2) = (a_3\nabla\varphi_1 + a_2\nabla\varphi_2)\cdot\nabla\varphi_2 + (b_2\mathrm{div}\mathbf{u} + \alpha_3\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 - m_3p_1 - m_2p_2 - \varepsilon_2\theta)\overline{\varphi_2},$$

$$\mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{U}, p_1) = (k_1\nabla p_1 + k_3\nabla p_2)\cdot\nabla p_1 - (\beta_1'\mathrm{div}\mathbf{u} + m_1'\varphi_1 + m_3'\varphi_2 + \gamma_1'p_1 + \gamma_3'p_2 + \varepsilon_3'\theta)\overline{p_1},$$

$$\mathcal{E}^{(5)}(\mathbf{U}, p_2) = (k_3\nabla p_1 + k_2\nabla p_2)\cdot\nabla p_2 - (\beta_2'\mathrm{div}\mathbf{u} + m_3'\varphi_1 + m_2'\varphi_2 + \gamma_3'p_1 + \gamma_2'p_2 + \varepsilon_4'\theta)\overline{p_2},$$

$$\mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U}, \theta) = \kappa|\nabla\theta|^2 - (a'\theta + \varepsilon_0'\mathrm{div}\mathbf{u} + \varepsilon_\alpha'\varphi_\alpha + \varepsilon_{\alpha+2}'T_0p_\alpha)\bar{\theta}, \qquad (5.24)$$

სადაც

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{u}) = \frac{\mu}{2}\sum_{j=l;l\neq j}^{3}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right|^2 + \frac{\mu}{3}\sum_{l,j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right|^2. \qquad (5.25)$$

მივედით იმ ეტაპზე, რომ უკვე შეგვიძლია შევისწავლოთ $(I)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(II)^{\pm}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი. სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 5.3. თუ $(I)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანას აქვს რეგულარული ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(I)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ ამოცანას აქვს ორი რეგულარული ამონახსნი. მაშინ მათი სხვაობა $\mathbf{U}$ იქნება $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ შიგა ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{U}$ არის

$$\mathcal{M}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (5.26)$$

ერთგვაროვანი განტოლების რეგულარული ამონახსნი, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^+$ და აკმაყოფილებს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობას

$$\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0}, \tag{5.27}$$

როცა $\mathbf{z} \in S$. ცხადია, (5.26) და (5.27)-ის გათვალისწინებით (5.20)-დან მივიღებთ

$$\int_{\Omega^+} \mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})\,d\mathbf{x} = 0, \qquad \int_{\Omega^+} \mathcal{E}^{(l+1)}(\mathbf{U},\varphi_l)\,d\mathbf{x} = 0,$$

$$\int_{\Omega^+} \mathcal{E}^{(l+3)}(\mathbf{U},p_l)\,d\mathbf{x} = 0. \qquad \int_{\Omega^+} \mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U},\theta)\,d\mathbf{x} = 0, \quad l = 1,2. \tag{5.28}$$

მეორე მხრივ, (5.24) ფორმულებიდან მარტივად მტკიცდება შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$\mathrm{Im}\mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}) = \mathrm{Im}[(b_\alpha\varphi_\alpha - \beta_\alpha p_\alpha - \varepsilon_0\theta)\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}],$$

$$\mathrm{Im}\left[\mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1) + \mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2)\right]$$
$$= \mathrm{Im}[b_\alpha(\mathrm{div}\mathbf{u}\overline{\varphi_\alpha}) - (m_1\overline{\varphi_1} + m_3\overline{\varphi_2})p_1 - (m_3\overline{\varphi_1} + m_2\overline{\varphi_2})p_2 - \varepsilon_\alpha\overline{\varphi_\alpha}\theta],$$

$$\mathrm{Re}\left[\mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{U},p_1) + \mathcal{E}^{(5)}(\mathbf{U},p_2)\right] = k_1|\nabla p_1|^2 + 2k_3\mathrm{Re}(\nabla p_1\cdot\nabla p_2) + k_2|\nabla p_2|^2$$
$$+\omega\mathrm{Im}[\mathrm{div}\mathbf{u}\beta_\alpha\overline{p_\alpha} + (m_1\overline{p_2} + m_2\overline{p_1})\varphi_1 + (m_3\overline{p_2} + m_2\overline{p_1})\varphi_2 + \varepsilon_{\boldsymbol{\alpha+2}}\overline{p_\alpha}\,\theta],$$

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U},\theta) = \kappa|\nabla\theta|^2 + \omega T_0\mathrm{Im}[(\varepsilon_0\mathrm{div}\mathbf{u} + \varepsilon'_\alpha\varphi_\alpha + \varepsilon_{\alpha+2}T_0p_\alpha)\bar{\theta}].$$

აქედან, (5.12)-ზე დაყრდნობით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathrm{Im}\left[\mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}) + \mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1) + \mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2)\right] - \frac{1}{\omega}\mathrm{Re}\left[\mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{U},p_1) + \mathcal{E}^{(5)}(\mathbf{U},p_2)\right]$$
$$-\frac{1}{\omega T_0}\mathrm{Re}\mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U},\theta) = -\frac{1}{\omega}\left[k_1|\nabla p_1|^2 + 2k_3\mathrm{Re}(\nabla p_1\cdot\nabla p_2) + k_2|\nabla p_2|^2 + \frac{\kappa}{T_0}|\nabla\theta|^2\right] \le 0.$$

თუ გავითვალისწინებთ (5.28) პირობას, მივიღებთ

$$k_1|\nabla p_1|^2 + 2k_3\mathrm{Re}(\nabla p_1\cdot\nabla p_2) + k_2|\nabla p_2|^2 = 0, \qquad |\nabla\theta|^2 = 0. \tag{5.29}$$

თუ ისევ გამოვიყენებთ (5.12) პირობას (5.29)-ში, მაშინ გვექნება $\nabla p_l(\mathbf{x}) = \nabla\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $l = 1,2$ $\mathbf{x} \in \Omega^+$, ე.ი.

$$p_l(\mathbf{x}) = c_l = \mathrm{const}, \quad \theta(\mathbf{x}) = c_3 = \mathrm{const}, \quad l = 1,2, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+. \tag{5.30}$$

ახლა მოვიგონოთ (5.27) ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობა, რომლის ძალით (5.30)-დან გვაქვს

$$p_l(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}) = 0, \qquad l = 1,2 \quad \mathbf{x} \in \Omega^+. \tag{5.31}$$

ცხადია, (5.12) და (5.31)-ის ძალით (5.24)-დან მივიღებთ

$$\mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u}) + \mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1) + \mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2) = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\,|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + 2b_\alpha\mathrm{Re}(\varphi_\alpha\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}})$$

$$+\alpha_1|\varphi_1|^2+2\alpha_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2})+\alpha_2|\varphi_2|^2+\mathcal{E}_0(\mathbf{u})$$

$$+a_1|\nabla\varphi_1|^2+2\mathrm{Re}(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2)+a_1|\nabla\varphi_1|^2\geq 0. \tag{5.32}$$

თუ ისევ გავითვალისწინებთ (5.28) პირობას, მაშინ (5.32)-დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\,|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2+2b_\alpha\mathrm{Re}(\varphi_\alpha\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}})+\alpha_1|\varphi_1|^2+2\alpha_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2})+\alpha_2|\varphi_2|^2=0,$$

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{u})=0,\qquad a_1|\nabla\varphi_1|^2+2\mathrm{Re}(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2)+a_1|\nabla\varphi_2|^2=0. \tag{5.33}$$

ადვილად ჩანს, რომ (5.33) თანაფარდობებიდან გვაქვს

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x})=\varphi_1(\mathbf{x})=\varphi_2(\mathbf{x})=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega^+. \tag{5.34}$$

ამასთან ერთად, (5.31) და (5.34) ტოლობების გამოყენებით (5.26) და (5.27)-დან $\mathbf{u}$ ვექტორის მიმართ მივიღებთ დირიხლეს ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანას

$$\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{0},\quad \{\mathbf{u}(\mathbf{z})\}^+=\mathbf{0},\quad \mathbf{x}\in\Omega^+,\ \ \mathbf{z}\in S,$$

რომელსაც აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ და მაშასადამე, $\mathbf{U}(\mathbf{x})=\mathbf{0},\ \ \mathbf{x}\in\Omega^+.$ ■

თეორემა 5.4. $(II)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანის ორი რეგულარული ამონახსნი ერთმანეთისგან განსხვავდება $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\varphi_1,\varphi_2,p_1,p_2,\theta)$ ვექტორით, სადაც φ_l, $p_l(l=1{,}2)$ და θ აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას

$$\varphi_l(\mathbf{x})=p_l(\mathbf{x})=\theta(\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in\Omega^+,\ \ l=1{,}2,$$

ხოლო $\mathbf{u}$ ხისტი გადაადგილების ვექტორია და აქვს შემდეგი სახე

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\widetilde{\boldsymbol{a}}+\widetilde{\boldsymbol{b}}\times\mathbf{x},\qquad \mathbf{x}\in\Omega^+, \tag{5.35}$$

სადაც $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ და $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ სამკომპონენტიანი ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(II)^+_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანას აქვს ორი რეგულარული ამონახსნი. მაშინ მათი სხვაობა $\mathbf{U}$ არის $(II)^+_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{U}$ არის (5.26) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\{\boldsymbol{Q}(\mathbf{D}_\mathbf{z},\mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^+=\mathbf{0},\qquad \mathbf{z}\in S. \tag{5.36}$$

როგორც თეორემა 5.3-ში, სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ (5.30) თანაფარდობის სამართლიანობა, რომლის გათვალისწინებით (5.24)-დან მივიღებთ

$$\mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})=\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\,|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2+\mathcal{E}_0(\mathbf{u})+(b_\alpha\varphi_\alpha-\beta_\alpha c_\alpha-\varepsilon_0c_3)\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}},$$

$$\mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1)=(a_1\nabla\varphi_1+a_3\nabla\varphi_2)\cdot\nabla\varphi_1+(b_1\mathrm{div}\mathbf{u}+\alpha_1\varphi_1+\alpha_3\varphi_2-m_1c_1-m_3c_2-\varepsilon_1c_3)\overline{\varphi_1},$$

$$\mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2)=(a_3\nabla\varphi_1+a_2\nabla\varphi_2)\cdot\nabla\varphi_2+(b_2\mathrm{div}\mathbf{u}+\alpha_3\varphi_1+\alpha_2\varphi_2-m_3c_1-m_2c_2-\varepsilon_2c_3)\overline{\varphi_2},$$

$$\mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{U},p_1)=-(\beta_1'\mathrm{div}\mathbf{u}+m_1'\varphi_1+m_3'\varphi_2+\gamma_1'c_1+\gamma_3'c_2+\varepsilon_3'c_3)\overline{c_1},$$

$$\mathcal{E}^{(5)}(\mathbf{U},p_2)=-(\beta_2'\mathrm{div}\mathbf{u}+m_3'\varphi_1+m_2'\varphi_2+\gamma_3'c_1+\gamma_2'c_2+\varepsilon_4'c_3)\overline{c_2},$$

$$\mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U},\theta)=-(a'c_3+\varepsilon_0'\mathrm{div}\mathbf{u}+\varepsilon_\alpha'\varphi_\alpha+\varepsilon_{\alpha+2}'T_0c_\alpha)\overline{c_3}. \qquad (5.37)$$

ცხადია, (5.37)-დან გვაქვს

$$\mathrm{Re}\mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})=\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\,|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2+\mathcal{E}_0(\mathbf{u})+\mathrm{Re}[(b_\alpha\varphi_\alpha-\beta_\alpha c_\alpha-\varepsilon_0c_3)\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}],$$

$$\mathrm{Re}\big[\mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1)+\mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2)\big]=a_1|\nabla\varphi_1|^2+2a_3\mathrm{Re}(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2)+a_2|\nabla\varphi_2|^2$$
$$+\alpha_1|\varphi_1|^2+2\alpha_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2})+\ \alpha_2|\varphi_2|^2$$
$$+\mathrm{Re}[b_\alpha\varphi_\alpha\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}-(m_1\overline{\varphi_1}+m_3\overline{\varphi_2})c_1-(m_3\overline{\varphi_1}+m_2\overline{\varphi_2})c_2-\varepsilon_\alpha\overline{\varphi_\alpha}c_3],$$

$$-\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\big[\mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{U},p_1)+\mathcal{E}^{(5)}(\mathbf{U},p_2)\big]$$
$$=\mathrm{Re}[\beta_\alpha\overline{c_\alpha}\mathrm{div}\mathbf{u}+(m_1\overline{c_1}+m_3\overline{c_2})\varphi_1+(m_3\overline{c_1}+m_2\overline{c_2})\varphi_2+\varepsilon_{\alpha+2}\overline{c_\alpha}\,c_3]$$
$$+\gamma_1|p_1|^2+2\gamma_3\mathrm{Re}(p_1\overline{p_2})+\gamma_2|p_2|^2,$$

$$-\frac{1}{\omega T_0}\mathrm{Im}\big[\mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U},\theta)\big]=\mathrm{Re}[(\varepsilon_0\mathrm{div}\mathbf{u}+\varepsilon_\alpha\varphi_\alpha+\varepsilon_{\alpha+2}c_\alpha)\overline{c_3}]+a|c_3|^2.$$

აქედან (5.12)-ის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathrm{Re}\big[\mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U},\mathbf{u})+\mathcal{E}^{(2)}(\mathbf{U},\varphi_1)+\mathcal{E}^{(3)}(\mathbf{U},\varphi_2)\big]-\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\big[\mathcal{E}^{(4)}(\mathbf{U},p_1)+\mathcal{E}^{(5)}(\mathbf{U},p_2)\big]$$
$$-\frac{1}{\omega T_0}\mathrm{Im}\mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U},\theta)=\mathcal{E}_0(\mathbf{u})+\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\,|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2+2b_\alpha\mathrm{Re}(\varphi_\alpha\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}})$$
$$+\alpha_1|\varphi_1|^2+2\alpha_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2})+\ \alpha_2|\varphi_2|^2+a_1|\nabla\varphi_1|^2+2a_3Re(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2)+a_2|\nabla\varphi_2|^2$$
$$+\gamma_1|c_1|^2+2\gamma_3\mathrm{Re}(c_1\overline{c_2})+\gamma_2|c_2|^2+2\varepsilon_{\alpha+2}\mathrm{Re}(\overline{c_\alpha}\,c_3)+a|c_3|^2\geq 0.$$

ამ თანაფარდობის ძალით (5.28)-დან მივიღებთ

$$\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\,|\mathrm{div}\,\mathbf{u}|^2+2b_\alpha\mathrm{Re}(\varphi_\alpha\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}})+\alpha_1|\varphi_1|^2+2\alpha_3\mathrm{Re}(\varphi_1\overline{\varphi_2})+\ \alpha_2|\varphi_2|^2=0,$$

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{u})=0,\qquad a_1|\nabla\varphi_1|^2+2a_3Re(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2)+a_2|\nabla\varphi_2|^2=0,$$
$$\gamma_1|c_1|^2+2\gamma_3\mathrm{Re}(c_1\overline{c_2})+\gamma_2|c_2|^2+2\varepsilon_{\alpha+2}\mathrm{Re}(\overline{c_\alpha}\,c_3)+a|c_3|^2=0.$$

ცხადია, მიღებული ტოლობებიდან (5.12)-ის გათვალისწინებით გვექნება (5.34) თანაფარდობა. ბოლოს, ისევე, როგორც დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში (იხ. [44]), $\mathrm{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}_0(\mathbf{u}) = 0$ ტოლობებიდან მივიღებთ (5.35) ფორმულას. ■

თეორემა 5.5. თუ $(K)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ გარე სასაზღვრო ამოცანას აქვს რეგულარული ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია, სადაც $K = I, II$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(K)^-_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ $(K = I, II)$ ამოცანას აქვს ორი რეგულარული ამონახსნი. მაშინ მათი სხვაობა $\mathbf{U}$ არის $(K)^-_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის რეგულარული ამონახსნი, ე.ი. $\mathbf{U}$ არის (5.26) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^-$, აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას

$$\{\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^- = \mathbf{0} \tag{5.38}$$

$K = I$ შემთხვევაში და

$$\{\boldsymbol{Q}(\mathbf{D}_{\mathbf{z}}, \mathbf{n})\mathbf{U}(\mathbf{z})\}^- = \mathbf{0} \tag{5.39}$$

$K = II$ შემთხვევაში.

თუ (5.21)-ში გავითვალისწინებთ (5.26), (5.38), (5.39) ტოლობებს, მაშინ მივიღებთ

$$\int_{\Omega^-} \mathcal{E}^{(1)}(\mathbf{U}, \mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0, \qquad \int_{\Omega^-} \mathcal{E}^{(l+1)}(\mathbf{U}, \varphi_l) d\mathbf{x} = 0,$$

$$\int_{\Omega^-} \mathcal{E}^{(l+3)}(\mathbf{U}, p_l) d\mathbf{x} = 0, \qquad \int_{\Omega^-} \mathcal{E}^{(6)}(\mathbf{U}, \theta) d\mathbf{x} = 0, \qquad l = 1,2. \tag{5.40}$$

როგორც თეორემა 5.3-ში ვაჩვენეთ, სრულიად ანალოგიურად, (5.40)-დან მივიღებთ

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \widetilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{x}, \quad p_l(\mathbf{x}) = c_l = \mathrm{const}, \quad \theta(\mathbf{x}) = c_3 = \mathrm{const},$$
$$\mathrm{div}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \varphi_l(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^-, \qquad l = 1,2, \tag{5.41}$$

როცა $\mathbf{x} \in \Omega^-$, სადაც $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ და $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ სამკომპონენტიანი ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია. ამასთანავე, რეგულარული ამონახსნის უსასრულობაში ქრობის (5.13) პირობის ძალით (5.41)-დან შეგვიძლია დავწეროთ $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^-$. მაშასადამე, $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^-$. ■

5.4. ფუნდამენტური ამონახსნი

განმარტება 5.1. $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{G}_{lj}(\mathbf{x})\right)_{8\times 8}$ მატრიცას ეწოდება (5.11) განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი, თუ განზოგადებულ ფუნქციათა კლასში იგი აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_8,$$

სადაც $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

ავაგოთ $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცა შემდეგი მეთოდით. თავდაპირველად განვიხილოთ განტოლებათა არაერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u} - b_\alpha\nabla\varphi_\alpha + \beta'_\alpha\nabla p_\alpha + \varepsilon'_0\nabla\theta = \boldsymbol{\mathcal{F}}',\\
&(a_1\Delta - \alpha_1)\varphi_1 + (a_3\Delta - \mathcal{M}\alpha_3)\varphi_2 + b_1\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{u}} + m'_1p_1 + m'_3p_2 + \varepsilon'_1\,\theta = \mathcal{F}_4,\\
&(a_3\Delta - \alpha_3)\varphi_1 + (a_2\Delta - \alpha_2)\varphi_2 + b_2\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{u}} + m'_3p_1 + m'_2p_2 + \varepsilon'_1\theta = \mathcal{F}_5,\\
&(k_1\Delta + \gamma'_1)p_1 + (k_3\Delta + \gamma'_3)p_2 - \beta_1\mathrm{div}\,\mathbf{u} + m_1\varphi_1 + m_3\varphi_2 + \varepsilon'_3T_0\theta = \mathcal{F}_6,\\
&(k_3\Delta + \gamma'_3)p_1 + (k_2\Delta + \gamma'_2)p_2 + \beta_2\mathrm{div}\,\mathbf{u} + m_3\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \varepsilon'_4T_0\theta = \mathcal{F}_7,\\
&(\kappa\Delta + a')\theta - \varepsilon_0\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \varepsilon_\alpha\varphi_\alpha + \varepsilon'_{\alpha+2}p_\alpha = \mathcal{F}_8,
\end{aligned} \tag{5.42}$$

სადაც $\mathcal{F}_l$ $(l = 1, 2, \ldots, 8)$ გლუვი ფუნქციებია $\mathbb{R}^3$-ში, $\boldsymbol{\mathcal{F}}' = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$. ცხადია, (5.42) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{D_x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{x}), \tag{5.43}$$

სადაც $\boldsymbol{\mathcal{M}}^{\mathrm{T}}$ არის $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ მატრიცის ტრანსპონირებული, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2, \theta)$ და $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\boldsymbol{\mathcal{F}}', \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \ldots, \mathcal{F}_8)$ რვაკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია.

ვიმოქმედოთ (5.42) პირველ ტოლობაზე div ოპერაცია. მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$\begin{aligned}
&\mu_0\Delta\mathrm{div}\,\mathbf{u} - b_\alpha\Delta\varphi_\alpha + \beta'_\alpha\Delta p_\alpha + \varepsilon'_0\Delta\theta = \mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}',\\
&(a_1\Delta - \alpha_1)\varphi_1 + (a_3\Delta - \mathcal{M}\alpha_3)\varphi_2 + b_1\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{u}} + m'_1p_1 + m'_3p_2 + \varepsilon'_1\,\theta = \mathcal{F}_4,\\
&(a_3\Delta - \alpha_3)\varphi_1 + (a_2\Delta - \alpha_2)\varphi_2 + b_2\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{u}} + m'_3p_1 + m'_2p_2 + \varepsilon'_1\theta = \mathcal{F}_5,\\
&(k_1\Delta + \gamma'_1)p_1 + (k_3\Delta + \gamma'_3)p_2 - \beta_1\mathrm{div}\,\mathbf{u} + m_1\varphi_1 + m_3\varphi_2 + \varepsilon'_3T_0\theta = \mathcal{F}_6,\\
&(k_3\Delta + \gamma'_3)p_1 + (k_2\Delta + \gamma'_2)p_2 + \beta_2\mathrm{div}\,\mathbf{u} + m_3\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \varepsilon'_4T_0\theta = \mathcal{F}_7,\\
&(\kappa\Delta + a')\theta - \varepsilon_0\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \varepsilon_\alpha\varphi_\alpha + \varepsilon'_{\alpha+2}p_\alpha = \mathcal{F}_8,
\end{aligned} \tag{5.44}$$

სადაც $\mu_0 = \lambda + 2\mu$. ცხადია, (5.44)-დან გვაქვს

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta)\mathbf{V} = \boldsymbol{\Phi}, \tag{5.45}$$

სადაც $\mathbf{V} = (\mathrm{div}\mathbf{u}, \varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2, \theta) = (V_1, V_2, \dots, V_6)$, $\boldsymbol{\Phi} = (\mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}', \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8) = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_6)$ და

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta) = \left(\mathcal{A}_{lj}(\Delta)\right)_{6\times 6} = \begin{pmatrix} \mu_0\Delta & -b_1\Delta & -b_2\Delta & \beta_1'\Delta & \beta_2'\Delta & \varepsilon_0'\Delta \\ b_1 & a_1\Delta - \alpha_1 & a_3\Delta - \alpha_3 & m_1' & m_3' & \varepsilon_1' \\ b_2 & a_3\Delta - \alpha_3 & a_2\Delta - \alpha_2 & m_3' & m_2' & \varepsilon_2' \\ -\beta_1 & m_1 & m_3 & k_1\Delta + \gamma_1' & k_3\Delta + \gamma_3' & \varepsilon_3' T_0 \\ -\beta_2 & m_3 & m_2 & k_3\Delta + \gamma_3' & k_2\Delta + \gamma_2' & \varepsilon_4' T_0 \\ -\varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \kappa\Delta + a' \end{pmatrix}_{6\times 6}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Lambda_1(\Delta) = \frac{1}{a_0 k_0 \kappa \mu_0} \det \boldsymbol{\mathcal{A}}(\Delta) = \Delta \prod_{j=1}^{5} \left(\Delta + \lambda_j^2\right), \tag{5.46}$$

სადაც $a_0 = a_1 a_2 - a_3^2$, $k_0 = k_1 k_2 - k_3^2$, ხოლო λ_1^2, λ_2^2, λ_3^2, λ_4^2 და λ_5^2 ფესვებია შემდეგი განტოლების (ξ-ის მიმართ)

$$\det \begin{pmatrix} \mu_0 & -b_1 & -b_2 & \beta_1' & \beta_2' & \varepsilon_0' \\ b_1 & -a_1\xi - \alpha_1 & -a_3\xi - \alpha_3 & m_1' & m_3' & \varepsilon_1' \\ b_2 & -a_3\xi - \alpha_3 & -a_2\xi - \alpha_2 & m_3' & m_2' & \varepsilon_2' \\ -\beta_1 & m_1 & m_3 & -k_1\xi + \gamma_1' & -k_3\xi + \gamma_3' & \varepsilon_3' T_0 \\ -\beta_2 & m_3 & m_2 & -k_3\xi + \gamma_3' & -k_2\xi + \gamma_2' & \varepsilon_4' T_0 \\ -\varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 & -\kappa\xi + a' \end{pmatrix}_{6\times 6} = 0.$$

შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ $\mathrm{Im}\,\lambda_l > 0$; $\lambda_l \neq \lambda_j$, $l, j = 1,2,\dots,5$, $l \neq j$.

ადვილად ჩანს, რომ (5.45) განტოლებიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Lambda_1(\Delta)\mathrm{div}\mathbf{u} = \Psi_1, \quad \Lambda_1(\Delta)\varphi_l = \Psi_{l+1}, \quad \Lambda_1(\Delta)p_l = \Psi_{l+3}, \quad \Lambda_1(\Delta)\theta = \Psi_6, \quad l = 1,2, \tag{5.47}$$

სადაც

$$\Psi_l = \frac{1}{a_0 k_0 \kappa \mu_0} \sum_{j=1}^{6} \mathcal{A}_{jm}^* \Phi_j\,, \qquad l = 1, 2, \dots, 6 \tag{5.48}$$

და $\mathcal{A}_{jm}^*$ არის $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ მატრიცის $\mathcal{A}_{jm}$ ელემენტის ალგებრული დამატება.

ახლა ვიმოქმედოთ $\Lambda_1(\Delta)$ ოპერატორით (5.42) სისტემის პირველ განტოლებაზე და გავითვალისწინოთ (5.47) თანაფარდობები. მივიღებთ შემდეგს

$$\Lambda_2(\Delta)\mathbf{u} = \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}, \tag{5.49}$$

სადაც $\Lambda_2(\Delta) = \Delta\Lambda_1(\Delta)$ და

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{1}{\mu}\Lambda_1(\Delta)\boldsymbol{\mathcal{F}}' - \frac{1}{\mu}\nabla[(\lambda + \mu)\Psi_1 - b_\alpha \Psi_{\alpha+1} + \beta_\alpha' \Psi_{\alpha+3} + \varepsilon_0' \Psi_6]. \tag{5.50}$$

თუ გავითვალისწინებთ (5.47) და (5.49) ტოლობებს, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathbf{\Lambda}(\Delta)\mathbf{U} = \mathbf{\Psi}, \tag{5.51}$$

სადაც $\mathbf{\Psi} = (\widetilde{\mathbf{\Psi}}, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6)$ რვაკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა და

$$\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_{lj})_{8\times 8}, \qquad \Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \Lambda_{33} = \Lambda_2, \quad \Lambda_{44} = \Lambda_{55} = \cdots = \Lambda_{88} = \Lambda_1,$$
$$\Lambda_{lj} = 0, \qquad l \neq j, \qquad l, j = 1, 2, \dots, 8. \tag{5.52}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$m_{l1} = -\frac{1}{a_0 k_0 \kappa \mu \mu_0}\left[(\lambda+\mu)\mathcal{A}^*_{l1}(\Delta) - b_\alpha \mathcal{A}^*_{l;\alpha+1} + \beta'_\alpha \mathcal{A}^*_{l;\alpha+3} + \varepsilon'_0 \mathcal{A}^*_{l6}\right],$$
$$m_{lj} = \frac{1}{a_0 k_0 \kappa \mu \mu_0}\mathcal{A}^*_{lj}(\Delta), \qquad l = 1, 2, \dots, 6 \quad j = 2, 3, \dots, 6. \tag{5.53}$$

თუ გამოვიყენებთ (5.53)-ს, მაშინ (5.48)-დან მივიღებთ

$$\widetilde{\mathbf{\Psi}} = \frac{1}{\mu}\Lambda_1(\Delta)\boldsymbol{\mathcal{F}}' + m_{11}(\Delta)\nabla \mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}' + \sum_{l=2}^{6} m_{l1}(\Delta)\nabla \mathcal{F}_{l+2},$$
$$\Psi_j = m_{1j}\mathrm{div}\boldsymbol{\mathcal{F}}' + \sum_{l=2}^{6} m_{lj}(\Delta)\nabla \mathcal{F}_{l+2}, \qquad j = 2,3,\dots,6. \tag{5.54}$$

ცხადია, (5.54) ტოლობები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით

$$\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{F}}, \tag{5.55}$$

სადაც

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}(\mathbf{D_x}) = \left(\mathcal{K}_{lj}(\mathbf{D_x})\right)_{8\times 8}, \qquad \mathcal{K}_{lj}(\mathbf{D_x}) = \frac{1}{\mu}\Lambda_1\delta_{lj} + m_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j},$$
$$\mathcal{K}_{l;r+2}(\mathbf{D_x}) = m_{1r}\frac{\partial}{\partial x_l}, \qquad \mathcal{K}_{r+2;j}(\mathbf{D_x}) = m_{r1}\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{5.56}$$
$$\mathcal{K}_{r+2;m+2}(\mathbf{D_x}) = m_{rm}(\Delta), \qquad r, m = 2,3,4,5,6.$$

თუ გავითვალისწინებთ (5.43) და (5.51) ტოლობებს, მაშინ (5.55)-დან გვექნება

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{K}}(\mathbf{D_x}) = \mathbf{\Lambda}(\Delta). \tag{5.57}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \left(\Upsilon_{lj}(\mathbf{x})\right)_{8\times 8}, \quad \Upsilon_{11}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{22}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{33}(\mathbf{x}) = \sum_{r=0}^{5}\eta_{2r}\gamma^{(r)}(\mathbf{x}) + \eta_{10}\gamma'_0(\mathbf{x}),$$

$$\Upsilon_{44}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{55}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{66}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{77}(\mathbf{x}) = \Upsilon_{88}(\mathbf{x}) = \sum_{r=0}^{5} \eta_{1r}\gamma^{(r)}(\mathbf{x}), \tag{5.58}$$

$$\Upsilon_{lj}(\mathbf{x}) = 0, \qquad l \neq j, \qquad l, j = 1, 2, \dots, 8,$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგ ტოლობებს

$$\gamma^{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \gamma_0'(\mathbf{x}) = -\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi}, \quad \gamma^{(j)}(\mathbf{x}) = -\frac{e^{i\lambda_j|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}, \tag{5.59}$$

და

$$\eta_{10} = -\prod_{l=1}^{5} \lambda_l^{-2}, \quad \eta_{1j} = \lambda_j^{-2} \prod_{l=1\; l\neq j}^{4} \left(\lambda_j^2 - \lambda_l^2\right)^{-1}, \tag{5.60}$$

$$\eta_{20}' = -\sum_{l=1}^{5} \lambda_l^{-2}, \quad \eta_{20} = \eta_{20}' \prod_{l=1; l\neq j}^{5} \lambda_l^{-2}, \quad \eta_{2j} = \lambda_j^{-5} \prod_{l=1; l\neq j}^{4} \left(\lambda_j^2 - \lambda_l^2\right)^{-1},$$

$$j = 1,2,3,4,5.$$

მარტივად შემოწმდება, რომ (5.46), (5.52), (5.59) და (5.60)-ის ძალით სამართლიანია ტოლობა

$$\mathbf{\Lambda}(\Delta)\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_8. \tag{5.61}$$

მაშასადამე, $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x})$ არის $\mathbf{\Lambda}(\Delta)$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{K}}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}). \tag{5.62}$$

თუ გამოვიყენებთ (5.57), (5.61) და (5.62) ტოლობებს, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\boldsymbol{\mathcal{K}}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Lambda}(\Delta)\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{J}_8,$$

ე.ი. $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ არის $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_\mathbf{x})$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა. ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.6. $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = (G_{lj}(\mathbf{x}))_{8\times 8}$ მატრიცა, რომელიც განსაზღვრულია (5.62) ფორმულით, (5.10) სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნია, სადაც $\boldsymbol{\mathcal{K}}(\mathbf{D}_\mathbf{x})$ და $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x})$ შესაბამისად მოცემულია (5.56) და (5.58) თანაფარდობებით.

ცხადია, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ მატრიცა აგებულია შემდეგი 7 ელემენტარული ფუნქციის საშუალებით: $\gamma_0'(\mathbf{x})$, $\gamma^{(j)}(\mathbf{x})$, $(j = 0,1,\dots,5)$.

თეორემა 5.6-დან ადვილად მიიღება $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ მატრიცის ძირითადი თვისებები, რომლებიც მოყვანილია შემდეგ ოთხ თეორემაში.

თეორემა 5.7. $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ მატრიცის თითოეული სვეტი შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_\mathbf{x})\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

როცა $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$.

თეორემა 5.8. შემდეგი შეფასებები

$$\mathcal{G}_{lj}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \qquad \mathcal{G}_{rm}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \qquad \mathcal{G}_{r+2;m+2}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}),$$
$$\mathcal{G}_{88}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \mathcal{G}_{ls}(\mathbf{x}) = O(1), \qquad \mathcal{G}_{sl}(\mathbf{x}) = O(1), \qquad \mathcal{G}_{r;j+5}(\mathbf{x}) = O(1),$$
$$\mathcal{G}_{j+5;r}(\mathbf{x}) = O(1), \qquad \mathcal{G}_{r+2;8}(\mathbf{x}) = O(1), \qquad \mathcal{G}_{r+2;8}(\mathbf{x}) = O(1),$$
$$l,j = 1,2,3, \qquad r,m = 4,5, \qquad s = 4,5,\dots,8$$

სამართლიანია კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში.

თეორემა 5.9. $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(0)}(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{G}_{lj}^{(0)}(\mathbf{x})\right)_{8\times 8}$ მატრიცა, რომელიც განსაზღვრულია თანაფარდობებით

$$\mathcal{G}_{lj}^{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{\lambda+3\mu}{8\pi\mu\mu_0}\frac{\delta_{lj}}{|\mathbf{x}|} - \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu\mu_0}\frac{x_l x_j}{|\mathbf{x}|^3}, \qquad \mathcal{G}_{44}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{a_2}{a_0}\gamma^{(0)}(\mathbf{x}),$$
$$\mathcal{G}_{45}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{54}^{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{a_3}{a_0}\gamma^{(0)}(\mathbf{x}), \qquad \mathcal{G}_{55}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{a_1}{a_0}\gamma^{(0)}(\mathbf{x}), \qquad \mathcal{G}_{66}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{k_2}{k_0}\,\gamma^{(0)}(\mathbf{x}),$$
$$\mathcal{G}_{67}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{76}^{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{k_3}{k_0}\,\gamma^{(0)}(\mathbf{x}), \qquad \mathcal{G}_{77}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{k_1}{k_0}\,\gamma^{(0)}(\mathbf{x}), \qquad \mathcal{G}_{88}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa}\,\gamma^{(0)}(\mathbf{x}),$$
$$\mathcal{G}_{ls}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{sl}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{r;j+5}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{j+5;r}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{r+2;8}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_{r+2;8}(\mathbf{x}) = 0,$$
$$l,j = 1,2,3, \qquad r,m = 4,5, \qquad s = 4,5,\dots,8,$$

შემდეგი სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნია

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad a_1\Delta\varphi_1 + a_3\Delta\varphi_2 = 0, \;\; a_3\Delta\varphi_1 + a_2\Delta\varphi_2 = 0,$$
$$k_1\Delta p_1 + k_3\Delta p_2 = 0, \quad k_3\Delta p_1 + k_2\Delta p_2 = 0, \quad \kappa\Delta\theta = 0\,.$$

თეორემა 5.10. შემდეგი თანაფარდობა

$$\mathcal{G}_{lj}(\mathbf{x}) - \mathcal{G}_{lj}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathrm{const} + O(|\mathbf{x}|), \qquad l,j = 1,2,\dots,8$$

სამართლიანია კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში.

მაშასადამე, თეორემა 5.8 და 5.10-ის საფუძველზე $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(0)}(\mathbf{x})$ მატრიცა კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში წარმოადგენს (5.10) სისტემის $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ ფუნდამენტური მატრიცის სინგულარულ ნაწილს.

5.5. ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალები

ამ პარაგრაფში გამოვიყენებთ $\widetilde{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=\left(\widetilde{Q}_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})\right)_{8\times 8}$ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორს, რომლის ელემენტები განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$\widetilde{Q}_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=Q_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}),\qquad \widetilde{Q}_{l;r+5}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=-\beta_r' n_l,$$

$$\widetilde{Q}_{l8}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=-\varepsilon_0' n_l,\qquad \widetilde{Q}_{ms}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})=Q_{sm}(\mathbf{D_x},\mathbf{n}),\tag{5.63}$$

$$l=1,2,3,\quad j=1,2,3,4,5,\quad m=4,5,6,7,8,\quad r=1,2,\qquad s=1,2,\dots,8,$$

სადაც $Q_{lj}(\mathbf{D_x},\mathbf{n})$ მოცემულია (5.14) ფორმულით.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

1) მარტივი ფენის პოტენციალი

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=\int\limits_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{g}(\mathbf{y})d_{\mathbf{y}}S,$$

2) ორმაგი ფენის პოტენციალი

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=\int\limits_S [\widetilde{\boldsymbol{Q}}(\mathbf{D_y},\mathbf{n}(\mathbf{y})\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]^{\mathrm{T}}\,\mathbf{g}(\mathbf{y})d_{\mathbf{y}}S,$$

3) მოცულობითი პოტენციალი

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^{\pm})=\int\limits_{\Omega^{\pm}} \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\phi}(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

სადაც $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ არის $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა და წარმოიდგინება (5.62) სახით, $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ მოიცემა (5.63) ფორმულით, ხოლო $\mathbf{g}$ და $\boldsymbol{\phi}$ რვაკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციებია.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 5.11. თუ $S\in C^{r+1,v}, \mathbf{g}\in C^{r,v'}(S), 0<v'<v\le 1$ და r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მაშინ

ა) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(.,\mathbf{g})\in C^{0,v'}(\mathbb{R}^3)\cap C^{r+1,v'}(\bar{\Omega}^{\pm})\cap C^{\infty}(\Omega^{\pm})$,

ბ) $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=\mathbf{0},\qquad \mathbf{x}\in\Omega^{\pm}$,

გ) $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g})$ სინგულარული ინტეგრალია, როცა $\mathbf{z}\in S$,

დ) $\{\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\}^{\pm}=\mp\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{x})+\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}), \qquad \boldsymbol{z}\in S,$ (5.64)

ე) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=O(|\mathbf{x}|^{-1}),\ \frac{\partial}{\partial x_l}\mathbf{P}\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=O(|\mathbf{x}|^{-2}),$

როცა $|\mathbf{x}|\gg 1$ და $l=1,2,3$.

თეორემა 5.12. თუ $S\in C^{r+1,v}, \mathbf{g}\in C^{r,v'}(S), 0<v'<v\leq 1$, მაშინ

ა) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(.,\mathbf{g})\in C^{r+1,v'}(\bar{\Omega}^{\pm})\cap C^{\infty}(\Omega^{\pm})$,

ბ) $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=\mathbf{0}, \quad \mathbf{x}\in\Omega^{\pm}$,

გ) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})$ სინგულარული ინტეგრალია, როცა $\mathbf{z}\in S$,

დ) $\left\{\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\right\}^{\pm}=\pm\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{x})+\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}), \qquad \mathbf{z}\in S,$ (5.65)

ე) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{x},\mathbf{g})=O(|\mathbf{x}|^{-2}),\ \frac{\partial}{\partial x_l}\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g})=O(|\mathbf{x}|^{-3}),$

როცა $|\mathbf{x}|\gg 1$ და $l=1,2,3$,

ვ) $\{\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\}^{+}=\{\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g})\}^{-}$,

სადაც r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ხოლო m ნატურალური რიცხვია და $\mathbf{z}\in S$.

თეორემა 5.13. თუ $S\in C^{r+1,v}, \boldsymbol{\phi}\in C^{r,v'}(\Omega^{+}), 0<v'<v\leq 1$, მაშინ

ა) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\cdot,\boldsymbol{\phi},\Omega^{+})\in C^{1,v'}(\mathbb{R}^3)\cap C^{2}(\Omega^{+})\cap C^{2,v'}\left(\overline{\Omega_0^{+}}\right)$,

ბ) $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^{+})=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega^{+}$,

სადაც Ω_0^{+} არეა $\mathbb{R}^3$-ში და $\Omega_0^{+}\subset\Omega^{+}$, ხოლო r არაუარყოფითი მთელი რიცხვია.

თეორემა 5.14. თუ $S\in C^{1,v}, \mathrm{supp}\boldsymbol{\phi}=\Omega\subset\Omega^{-}, \boldsymbol{\phi}\in C^{0,v'}(\Omega^{-}), 0<v'<v\leq 1$,მაშინ

ა) $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\cdot,\boldsymbol{\phi},\Omega^{-})\in C^{1,v'}(\mathbb{R}^3)\cap C^{2}(\Omega^{-})\cap C^{2,v'}(\overline{\Omega_0^{-}})$

ბ) $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D_x})\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},\Omega^{-})=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega^{-}$,

სადაც Ω არეა $\mathbb{R}^3$-ში და $\overline{\Omega_0^{-}}\subset\Omega^{-}$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathcal{L}^{(1)}\mathbf{g}(\mathbf{z})=\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{L}^{(2)}\mathbf{g}(\mathbf{z})=\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z})+\boldsymbol{\mathcal{Q}}\big(\mathbf{D_z},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{L}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{L}^{(4)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}\big(\mathbf{D}_{\mathbf{z}},\mathbf{n}(\mathbf{z})\big)\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{g}),$$

$$\mathcal{L}_{\varsigma}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \varsigma\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{g}), \quad \mathbf{z}\in S, \tag{5.66}$$

სადაც ς კომპლექსური რიცხვია. თეორემა 5.11 და 5.12-ის საფუძველზე $\mathcal{L}^{(l)}$ $(l = 1,2,3,4)$ და $\mathcal{L}_{\varsigma}$ სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორებია.

მეორე მხრივ, თუ $\mathbf{\Gamma}^{(r)} = (\Gamma_{lj}^{(r)})_{8\times 8}$ არის $\mathcal{H}^{(r)}$ $(r = 1,2,3,4)$ ოპერატორის სიმბოლო, მაშინ (5.66)-დან გვაქვს

$$\mathrm{det}\mathbf{\Gamma}^{(1)} = \mathrm{det}\mathbf{\Gamma}^{(2)} = -\mathrm{det}\mathbf{\Gamma}^{(3)} = -\mathrm{det}\mathbf{\Gamma}^{(4)}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{8}\left(1-\frac{\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}\right) = \frac{(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)}{256(\lambda+2\mu)^2} > 0. \tag{5.67}$$

აქედან გამომდინარე, $\mathcal{L}^{(r)}$ ოპერატორი ნორმალური ტიპისაა, სადაც $r = 1,2,3,4$.

უფრო მეტიც, თუ $\mathbf{\Gamma}_{\varsigma}$ და $\mathrm{ind}\mathcal{H}_{\varsigma}$ შესაბამისად $\mathcal{H}_{\varsigma}$ ოპერატორის სიმბოლო და ინდექსია, მაშინ შეგვიძლია ვაჩვენოთ

$$\mathrm{det}\mathbf{\Gamma}_{\varsigma} = \frac{(\lambda+2\mu)^2-\mu^2\varsigma^2}{256(\lambda+2\mu)^2}$$

და $\mathrm{det}\mathbf{\Gamma}_{\varsigma} = 0$ კომპლექსური სიბრტყის მხოლოდ ორ ς_1 და ς_2 წერტილში. თუ გავითვალისწინებთ $\mathrm{det}\mathbf{\Gamma}_1 = \mathrm{det}\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ ტოლობას, მივიღებთ $\varsigma_j \neq 1$ $(j = 1,2)$ და

$$\mathrm{ind}\mathcal{L}_1 = \mathrm{ind}\mathcal{L}^{(1)} = \mathrm{ind}\mathcal{L}_0 = 0.$$

სრულიად ანალოგიურად გვექნება

$$\mathrm{ind}\mathcal{L}^{(2)} = -\mathrm{ind}\mathcal{L}^{(1)} = 0, \qquad \mathrm{ind}\mathcal{L}^{(3)} = -\mathrm{ind}\mathcal{L}^{(4)} = 0.$$

მაშასადამე, სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი $\mathcal{L}^{(r)}$ $(r = 1,2,3,4)$ ნორმალური ტიპისაა და მისი ინდექსი ნულია.

5.6. არსებობის თეორემები

ამ პარაგრაფში პოტენციალთა მეთოდისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დავამტკიცებთ $(K)^{+}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ და $(K)^{-}_{\mathbf{F},\mathbf{f}}$ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამონახსნების არსებობის თეორემებს, სადაც $K = I, II$.

ცხადია, თეორემა 5.13 და 5.14-ის საფუძველზე მოცულობითი პოტენციალი $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{F},\Omega^{\pm})$ არის (5.11) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი, სადაც $\mathbf{F}\in C^{0,v'}(\Omega^{\pm}), 0<v'\leq 1$, ხოლო $\mathrm{supp}\mathbf{F}$ შემოსაზღვრული არეა Ω^{-} -ში. რის გამოც, დავამტკიცებთ $(K)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ და $(K)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანების რეგულარული ამონახსნების არსებობის თეორემებს, სადაც $K=I,II$.

ამოცანა $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x})=\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{g}), \tag{5.68}$$

სადაც $\mathbf{g}$ რვაკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{x}\in\Omega^{+}$.

თეორემა 5.12-ის საფუძველზე, $\mathbf{U}$ ვექტორ-ფუნქცია

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{U}(\mathbf{x})=\mathbf{0} \tag{5.69}$$

განტოლების ამონახსნია, როცა $\mathbf{x}\in\Omega^{+}$. თუ გავითვალისწინებთ (5.15) და (5.65)-ს, მაშინ (5.67)-დან მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{L}^{(1)}\mathbf{g}(\boldsymbol{z})=\mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{5.70}$$

სადაც $\mathbf{g}$ უცნობი ვექტორ-ფუნქციაა და $\boldsymbol{z}\in S$. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის (5.70) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია.

ცხადია, (5.70)-ის შესაბამისი მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლება დაიწერება შემდეგი ფორმით

$$\mathcal{L}^{(2)}\mathbf{h}(\boldsymbol{z})=\mathbf{0}, \tag{5.71}$$

სადაც $\boldsymbol{z}\in S$, ხოლო $\mathbf{h}$ რვაკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა. ვაჩვენოთ, რომ (5.71)-ს აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

ვთქვათ, $\mathbf{h}_0$ არის (5.71) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. თეორემა 11-ის და (5.70) ტოლობის საფუძველზე ვექტორ-ფუნქცია $\mathbf{V}(\mathbf{x})=\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{h_0})$ იქნება $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი. თეორემა 5.5-ის ძალით $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ე.ი.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x})\equiv\mathbf{0},\quad \mathbf{x}\in\Omega^{-}. \tag{5.72}$$

ამასთანავე, თეორემა 5.11 და (5.72) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+}=\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-}=0,$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. აქედან გამომდინარე, $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ ვექტორი $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნია და თეორემა 5.3-ის ძალით ვღებულობთ

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+}. \tag{5.73}$$

თუ გათვალისწინებთ (5.72), (5.73) და (5.64) ფორმულებს, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathbf{h_0}(\mathbf{z}) = \{\mathcal{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} - \{\mathcal{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} = \mathbf{0},$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

მაშასადამე, (5.71) განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ფრედჰოლმის თეორემის საფუძველზე, (5.70) არაერთგვაროვანი განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის. დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.15. თუ $S \in C^{2,\nu}, \mathbf{f} \in C^{1,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \leq 1$, მაშინ არსებობს $(I)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი, რომელიც ერთადერთია და წარმოიდგინება (5.68) ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (5.70) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის.

ამოცანა $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი მარტივი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \tag{5.74}$$

სადაც $\mathbf{h}$ რვაკომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. თეორემა 5.11-ის ძალით $\mathbf{U}$ ვექტორ-ფუნქცია (5.69) განტოლების ამონახსნია, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. თუ გამოვიყენებთ (5.18) და (5.64) ფორმულებს, მაშინ (5.74)-დან უცნობი $\mathbf{h}$ ვექტორისთვის მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{L}^{(2)}\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{5.75}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

თეორემა 5.15-ში დავამტკიცეთ, რომ (5.71) ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. აქედან გამომდინარე, (5.75) განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის. მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.16. თუ $S \in C^{2,\nu}, \mathbf{f} \in C^{0,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \leq 1$, მაშინ $(II)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი არსებობს, იგი ერთადერთია და წარმოიდგინება (5.74) მარტივი ფენის პოტენციალის სახით, სადაც $\mathbf{h}$ არის (5.75) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის.

ამოცანა $(I)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ჯამის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) + \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}), \tag{5.76}$$

სადაც $\mathbf{g}$ რვაკომპონენტიანი უცნობი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$.

ცხადია, თეორემა 5.11 და 5.12-ის ძალით $\mathbf{U}$ ვექტორ-ფუნქცია (5.69)-ის რეგულარი ამონახსნია, როცა $\mathbf{x} \in \Omega^{-}$. თუ გავითვალისწინებთ (5.17) სასაზღვრო პირობას და (5.65) ფორმულას, მაშინ (5.76)-დან უცნობი $\mathbf{g}$ ვექტორ-ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{L}^{(5)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) \equiv \mathcal{L}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{5.77}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის (5.77) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია. მართლაც, მარტივი საჩვენებელია, რომ $\mathcal{L}^{(5)}$ ნორმალური ტიპის სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორია და $\operatorname{ind}\mathcal{L}^{(5)} = \operatorname{ind}\mathcal{L}^{(3)} = 0$. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ

$$\mathcal{L}^{(5)}\mathbf{g}_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \tag{5.78}$$

ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

ვთქვათ, $\mathbf{g}_0$ არის (5.78) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. მაშინ

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_0) + \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_0) \tag{5.79}$$

ვექტორი იქნება $(I)^{-}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი და თეორემა 5.5-ის ძალით მივიღებთ (5.72) ტოლობას.

მეორე მხრივ, (5.65), (5.66) და (5.79) ტოლობების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} - \{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} = \mathbf{g}_0(\boldsymbol{z}), \tag{5.80}$$

$$\{\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D}_{\mathbf{z}}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{+} - \{\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\mathbf{D}_{\mathbf{z}}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^{-} = -\mathbf{g}_0(\boldsymbol{z}),$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. თუ გავითვალისწინებთ (5.72)-ს (5.80) თანაფარდობებში, მივიღებთ

$$\{\boldsymbol{Q}(\mathbf{D_z}, \mathbf{n})\mathbf{V}(\mathbf{z}) + \mathbf{V}(\mathbf{z})\}^+ = \mathbf{0}, \tag{5.81}$$

როცა $\boldsymbol{z} \in S$.

ცხადია, $\mathbf{V}$ ვექტორი (5.69) განტოლების ამონახსნია Ω^+-ში და აკმაყოფილებს (5.81) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას. ახლა გამოვიყენოთ (5.2ქ) იგივეობები $\mathbf{V}$ ვექტორისთვის და მივიღებთ

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{z})\}^+ \equiv \mathbf{0}, \tag{5.82}$$

როცა $\boldsymbol{z} \in S$. საბოლოოდ, (5.72) და (5.82)-ის გათვალისწინებით (5.80)-დან გვაქვს $\mathbf{g}_0(\boldsymbol{z}) \equiv \mathbf{0}$, სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

მაშასადამე, (5.78) ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ვოლტერას თეორემის საფუძველზე, ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის (5.77) ინტეგრალურ განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია. ამით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.17. თუ $S \in C^{2,\nu}, \mathbf{f} \in C^{1,\nu'}(S), 0 < \nu' < \nu \leq 1$, მაშინ $(I)^-_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი არსებობს, იგი ერთადერთია და წარმოიდგინება (5.77) მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ჯამის სახით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (5.78) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც ყოველთვის ამოხსნადია ნებისმიერი $\mathbf{f}$ ვექტორისთვის.

ამოცანა $(II)^+_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$. ვეძებოთ ამ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი მარტივი ფენის პოტენციალის სახით

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{g}), \tag{5.83}$$

სადაც $\mathbf{g}$ რვაკომპონენტიანი უცნობი ვექტორ-ფუნქციაა და $\mathbf{x} \in \Omega^+$. თუ გავითვალისწინებთ (5.64) ფორმულას და (5.16) სასაზღვრო პირობას, მაშინ $\mathbf{g}$ ვექტორის მიმართ მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\mathcal{L}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{5.84}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. განვიხილოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mathcal{L}^{(3)}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \tag{5.85}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$. ცხადია, (5.85)-ის მიკავშირებულ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\mathcal{L}^{(4)}\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \tag{5.86}$$

სადაც $\boldsymbol{z} \in S$.

სამართლიანია შემდეგი ლემა.

ლემა 5.3. (5.85) და (5.86) ერთგვაროვან განტოლებებს აქვთ ექვსი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რომლებიც ქმნიან ამონახსნთა სრულ სისტემას.

დამტკიცება. (5.35) თანაფარდობების საფუძველზე შემოვიღოთ შემდეგი რვაკომპონენტიანი ვექტორები:

$$\boldsymbol{\vartheta}^{(1)} = (1,0,0,0,0,0,0,0), \qquad \boldsymbol{\vartheta}^{(2)} = (0,1,0,0,0,0,0,0), \qquad \boldsymbol{\vartheta}^{(3)} = (0,0,1,0,0,0,0,0),$$

$$\boldsymbol{\vartheta}^{(4)} = (0,-x_3,x_2,0,0,0,0,0), \;\; \boldsymbol{\vartheta}^{(5)} = (x_3,0,-x_1,0,0,0,0,0),$$
$$\boldsymbol{\vartheta}^{(6)} = (-x_2,x_1,0,0,0,0,0,0). \tag{5.87}$$

ცხადია, $\left\{\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{6}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა. თეორემა 5.12-ის ძალით ყოველი $\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x})$ ვექტორი $(II)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნია და ასევე, ამონახსნია (5.81) ერთგვაროვანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების. აქედან გამომდინარე, ჩვენ გაქვს

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+},$$

$$\left\{\boldsymbol{Q}(\mathbf{D}_{\mathbf{z}},\mathbf{n})\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x})\right\}^{+} = \mathbf{0}, \qquad \mathcal{L}^{(4)}\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{z} \in S, \qquad j = 1,2,\dots,6.$$

მაშასადამე, (5.85) და (5.86) განტოლებებს აქვთ სულ მცირე ექვსი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.

სრულიად ანალოგიურად, როგორც ლემა 2.4-ში, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $\left\{\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{x})\right\}_{j=1}^{6}$ არის (5.86)-ის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა. ■

ნეტერის თეორემის საფუძველზე, (5.84) ინტეგრალური განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ჩაიწერება შემდეგი ფორმით

$$\int_S \mathbf{f}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{\vartheta}^{(j)}(\mathbf{z}) d_{\boldsymbol{z}}S = 0, \qquad j = 1,2,\dots,6, \tag{5.88}$$

სადაც $\boldsymbol{\vartheta}^{(j)}$ განსაზღვრულია (5.87)-ით.

მაშასადამე, თუ $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_8)$ და $\mathbf{f}^{(0)} = (f_1, f_2, f_3)$, მაშინ (5.87)-ის საფუძველზე (5.88) თანაფარდობა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\int_S \mathbf{f}^{(0)}(\boldsymbol{z})d_{\boldsymbol{z}}S = \mathbf{0}, \qquad \int_S \boldsymbol{z} \times \mathbf{f}^{(0)}(\boldsymbol{z})d_{\boldsymbol{z}}S \ = \mathbf{0}. \tag{5.89}$$

ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.18. თუ $S \in C^{2,v}, \mathbf{f} \in C^{0,v'}(S), 0 < v' < v \leq 1$, მაშინ $(II)^{+}_{\mathbf{0},\mathbf{f}}$ ამოცანა ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია (5.89) პირობა. ამ შემთხვევაში ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება (5.83) მარტივი ფენის პოტენციალის სახით და განსაზღვრულია $\widetilde{\mathbf{U}} = (\widetilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{\theta})$ შესაკრები ვექტორის სიზუსტით, სადაც $\mathbf{g}$ არის (5.84) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი და

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{x}) = \widetilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{b}} \times \mathbf{x}, \qquad \tilde{\varphi}_l(\mathbf{x}) = \tilde{p}_l(\mathbf{x}) = \tilde{\theta}(\mathbf{x}) \equiv 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+},$$

ხოლო $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ და $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ ნებისმიერი სამკომპონენტიანი მუდმივი ვექტორებია.

თავი 6. დასკვნა

სადოქტორო ნაშრომში განხილულია მარტივი და ორგვარი ფოროვნობის მქონე დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიები და პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით გამოკვლეულია ამ თეორიათა მდგრადი რხევის სივრცითი სასაზღვრო ამოცანები. კერძოდ, მიღებულია შემდეგი შედეგები:

1. ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით აგებულია ამ თეორიათა მდგრადი რხევის განტოლებათა სისტემების ფუნდამენტური ამონახსნები და დადგენილია მათი ძირითადი თვისებები.
2. მიღებულია გამოსხივების პირობები (რეგულარული ვექტორის უსასრულობაში ქრობის პირობები).
3. დადგენილია განხილული თეორიების გრინის პირველი, მეორე და მესამე იგივეობები როგორც სასრული, ასევე უსასრულო არეებისათვის.
4. ამ იგივეობების გამოყენებით ოთხივე განხილულ თეორიაში შესწავლილია მდგრადი რხევის სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული (კლასიკური) ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი.
5. აგებულია ზედაპირული (მარტივი და ორმაგი ფენის) და მოცულობითი პოტენციალები და დადგენილია მათი ძირითადი თვისებები.
6. შესწავლილია ისეთი სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორები, რომლებზეც დაიყვანება მდგრადი რხევის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ ამ ოპერატორებისთვის სამართლიანია ნეტერის თეორემები.
7. პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით ოთხივე განხილულ თეორიაში დამტკიცებულია მდგრადი რხევის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანების კლასიკური ამონახსნების არსებობის თეორემები.

სადოქტორო ნაშრომში მიღებული შედეგების საფუძველზე შესაძლებელია:

1. განხილული ოთხივე თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ცხადი ამონახსნების აგება კონკრეტული ფორმის არეებისთვის (მაგ., ბირთვი, ნახევარსივრცე და სხვა).
2. ამავე თეორიათა სასაზღვრო ამოცანების რიცხვითი ამონახსნების მიღება.
3. მარტივი და ორგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი თეორიის მდგრადი რხევის ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით.
4. სამგვარი და ოთხგვარი ფოროვნობის მქონე მასალების დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის ბმული წრფივი კვაზისტატიკის თეორიათა ბრტყელი და სივრცითი ამოცანების გამოკვლევა პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით.

ლიტერატურა

1. Aouadi, M.: A theory of thermoelastic diffusion materials with voids. Z. Angew. Math. Phys. **61**, 357-379 (2010).
2. Bear, J.: Modeling Phenomena of Flow and Transport in Porous Media. Theory and Applications of Transport in Porous Media, vol. 31. Springer International Publishing AG Cham, Switzerland (2018).
3. Berryman, J.G., Wang, H.F.: Elastic wave propagation and attenuation in a double porosity dual-permeability medium. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. **37**, 63-78 (2000).
4. Biot, M.A.: General theory of three-dimensional consolidation. J. Appl. Phys. **12**, 155-164 (1941).
5. Biot, M.A.: Variational Lagrangian-thermodynamics of nonisothermal finite strain mechanics of porous solids and thermomolecular diffusion. Int. J. Solids Struct. **13**, 579-597 (1977).

6. Bitsadze, L.: Explicit solution of the Dirichlet boundary value problem of elasticity for porous infinite strip. Zeit. Angew. Math. Phys. **71**, 145 (2020).
7. Bitsadze, L.: Explicit solutions of quasi-static problems in the coupled theory of poroelasticity. Continuum Mech. Thermodyn. **33**, 2481-2492 (2021).
8. Bitsadze, L., Tsagareli, I.: The solution of the Dirichlet BVP in the fully coupled theory of elasticity for spherical layer with double porosity. Meccanica, **51**, 1457-1463 (2016).
9. Bitsadze, L., Tsagareli, I.: Solutions of BVPs in the fully coupled theory of elasticity for the space with double porosity and spherical cavity. Math. Mech. Appl. Sci., **39**, 2136-2145 (2016).
10. Bluhm, J., de Boer, R.: The volume fraction concept in the porous media theory. Z. Angew. Math. Mech. **77**, 563-577 (1997).
11. Bowen, R.M.: Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. Int. J. Eng. Sci. **18**, 1129-1148 (1980).
12. Bowen, R.M.: Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. Int. J. Eng. Sci. **20**, 697-735 (1982).
13. Burchuladze, T.V., Gegelia, T.G.: The Development of the Potential Methods in the Elasticity Theory, Metsniereba, Tbilisi, 1985 (in Russian).
14. Cheng, A.H.-D.: Poroelasticity. Springer Int. Publ., Cham, Switzerland (2016).
15. Ciarletta, M., Ieşan, D.: Non-Classical Elastic Solids. Longman Scientific and Technical, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, Harlow, Essex, UK (1993).
16. Ciarletta M., Passarella, F., Svanadze, M.: Plane waves and uniqueness theorems in the coupled linear theory of elasticity for solids with double porosity. J. Elasticity **114**, 55-68 (2014).
17. Coussy, O.: Poromechanics, John Wiley & Sons Ltd, Chichester (2004).
18. Cowin, S.C.: Bone poroelasticity. J. Biomech. **32**, 217-238 (1999).
19. Cowin, S.C. (ed.): Bone Mechanics Handbook. Informa Healthcare USA Inc., New York (2008).

20. Cowin, S.C., Nunziato, J.W.: Linear elastic materials with voids. J. Elasticity **13**, 125-147 (1983).

21. de Boer, R.: Theory of Porous Media: Highlights in the Historical Development and Current State. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (2000).

22. de Boer, R.: Trends in Continuum Mechanics of Porous Media. Springer, Dordrecht (2005).

23. de Boer, R., Kowalski, S.J.: Thermodynamics of fluid-saturated porous media with a phase change. Acta Mech. **109**, 167-189 (1995).

24. de Boer, R., Liu, Z.: Plane waves in a semi-infinite fluid saturated porous medium. Trans. Porous Media **16**, 147-173 (1994).

25. De Cicco, S.: Non-simple elastic materials with double porosity structure. Arch. Mech. **74**, 127-142 (2022).

26. De Cicco, S., Ieşan, D.: On the theory of thermoelastic materials with a double porosity structure. J. Thermal Stress. **44**, 1514-1533 (2021).

27. Dhaliwal, R.S., Wang, J.: A heat-flux dependent theory of thermoelasticity with voids. Acta Mech. **110**, 33-39 (1995).

28. Dormieux, L., Kondo, D., Ulm, F.-J.: Microporomechanics. John Wiley & Sons Ltd, Chichester (2006).

29. Gelet, R., Loret, B., Khalili, N.: Borehole stability analysis in a thermoporoelastic dual-porosity medium. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. **50**, 65-76 (2012).

30. Gentile, M., Straughan, B.: Acceleration waves in nonlinear double porosity elasticity. Int. J. Eng. Sci. **73**, 10-16 (2013).

31. Günther, N.M.: Potential Theory and its Applications to Basic Problems of Mathematical Physics. Ungar Publ Co, New York (1967).

32. Hsiao, G.C., Wendland, W.L.: Boundary Integral Equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2008).

33. Ichikawa, Y., Selvadurai, A.P.S.: Transport Phenomena in Porous Media, Aspects of Micro/Macro Behaviour. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2012).

34. Ieşan, D.: Shock waves in micropolar elastic materials with voids. An. St. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi **81**, 177-186 (1985).
35. Ieşan, D.: A theory of thermoelastic materials with voids. Acta Mech. **60**, 67–89 (1986).
36. Ieşan, D.: Thermoelastic Models of Continua. Kluwer Academic Publishers, London, UK (2004).
37. Ieşan, D.: Method of potentials in elastostatics of solids with double porosity. Int. J. Eng. Sci. **88**, 118-127 (2015).
38. Ieşan, D., Quintanilla, R.: On a theory of thermoelastic materials with a double porosity structure. J. Thermal Stress. **37**, 1017-1036 (2014).
39. Kellogg, O.D.: Foundations of Potential Theory. Berlin, Springer, 1929.
40. Khalili, N., Selvadurai, A.P.S.: A fully coupled constitutive model for thermo-hydro-mechanical analysis in elastic media with double porosity. Geophys. Res. Lett. **30**, 2268 (2003).
41. Kumar, R., Vohra, R., Gorla, M.G.: Reflection of plane waves in thermoelastic medium with double porosity. Multidis. Model. Mater. Struc. **12**, 748-778 (2016).
42. Kumar, R., Vohra, R., Gorla, M.G.: Some considerations of fundamental solution in micropolar thermoelastic materials with double porosity. Arch. Mech. **68**, 263-284 (2016).
43. Kupradze, V.D.: Potential Methods in the Theory of Elasticity. Israel Program Sci. Transl., Jerusalem (1965).
44. Kupradze, V.D., Gegelia, T.G., Basheleishvili, M.O., Burchuladze, T.V.: Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. North-Holland, Amsterdam (1979).
45. Liu, Z.: Multiphysics in Porous Materials. Springer, Cham, Switzerland (2018).
46. Mikelashvili, M.: Quasi-static problems in the coupled linear theory of elasticity for porous materials. Acta Mech. **231**, 877–897 (2020).
47. Mikelashvili, M.: Quasi-static problems in the coupled linear theory of thermoporoelasticity. J. Thermal Stress. 44, 236–259 (2021).

48. Mikelashvili, M.: Potential method in the quasi-static problems of the coupled linear theory of elastic materials with double porosity. Trans. A. Razmadze Math. Inst. (2023) (in press).
49. Mikhlin, S.G.: Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations. Pergamon Press, Oxford (1965).
50. Nunziato, J.W., Cowin, S.C.: A nonlinear theory of elastic materials with voids. Arch. Rat. Mech.Anal. **72**, 175-201 (1979).
51. Passarella, F.: Some results in micropolar thermoelasticity. Mech. Res. Comm. **23**, 349-357 (1996).
52. Scarpetta, E., Svanadze, M.: Uniqueness theorems in the quasi-static theory of thermoelasticity for solids with double porosity. J. Elasticity **120**, 67-86 (2015).
53. Scarpetta, E., Svanadze, M., Zampoli, V.: Fundamental solutions in the theory of thermoelasticity for solids with double porosity. J. Therm. Stress. **37**, 727-748 (2014).
54. Selvadurai, A.P.S.: The analytical method in geomechanics. Appl. Mech. Rev. ASME, **60**, 87-106 (2007).
55. Selvadurai, A.P.S., Suvorov, A.: Thermo-Poroelasticity and Geomechanics. Cambridge University Press, Cambridge, New York (2017).
56. Stephanson, O., Hudson, J.A., Jing, L. (eds.): Coupled Thermo-Hydro-Mechanical-Chemical Processes in Geo-Systems: Fundamentals, Modelling. Experiments and Applications. Elsevier, Amsterdam (2004).
57. Stephanson, O., Jing, L., Tsang, C.F. (eds.): Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Processes of Fractured Media: Mathematical and Experimental Studies. Elsevier, Amsterdam (1996).
58. Straughan, B.: Stability and Wave Motion in Porous Media. Springer, New York (2008).
59. Straughan, B.: Stability and uniqueness in double porosity elasticity. Int. J. Eng. Sci. **65**, 1-8 (2013).
60. Straughan, B.: Mathematical Aspects of Multi-Porosity Continua. Advances in Mechanics and Mathematics, vol. 38. Springer Int. Publ. AG, Cham, Switzerland (2017).
61. Svanadze, M.: Plane waves and boundary value problems in the theory of elasticity for solids with double porosity. Acta Appl. Math. **122**, 461-471 (2012).

62. Svanadze, M.: On the theory of viscoelasticity for materials with double porosity. Dis. Cont. Dynamical Systems B **19**, 2335-2352 (2014).
63. Svanadze, M.: Plane waves, uniqueness theorems and existence of eigenfrequencies in the theory of rigid bodies with a double porosity structure. In: Albers, B., Kuczma M. (eds): Continuous Media with Microstructure 2. Springer Int. Publ., Cham, Switzerland, 287-306 (2016).
64. Svanadze, M.: Boundary value problems of steady vibrations in the theory of thermoelasticity for materials with double porosity structure. Arch. Mech. **69**, 347-370 (2017).
65. Svanadze, M.: On the linear theory of double porosity thermoelasticity under local thermal non-equilibrium. J. Thermal Stress. **42**, 890-913 (2019).
66. Svanadze, M.: Potential Method in Mathematical Theories of Multi-Porosity Media, Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 51. Springer Nature Switzerland AG, Cham, Switzerland (2019).
67. Svanadze, M.: Steady vibrations problems in the theory of elasticity for materials with double voids. Acta Mech. **229**, 1517-1536 (2018).
68. Svanadze, M.: Boundary integral equations method in the coupled theory of thermoelasticity for porous materials, Proceedings of ASME, IMECE2019, Vol. 9: Mechanics of Solids, Structures, and Fluids, V009T11A033, November 11–14, 2019. DOI: 10.1115/IMECE2019-10367.
69. Svanadze, M.: Potential Method in the coupled linear theory of porous elastic solids. Math. Mech. Solids **25**, 768-790 (2020).
70. Svanadze, M.: Potential Method in the coupled theory of elastic double-porosity materials. Acta Mech. **232**, 2307–2329 (2021).
71. Svanadze, M.: On the coupled theory of thermoelastic double-porosity materials. J. Thermal Stress. **45**, 576-596 (2022).
72. Svanadze, M.: Potential method in the coupled linear theory of elasticity for materials with triple porosity. Trans. A. Razmadze Math. Inst. **176**, 83-98 (2022).

73. Svanadze, M., De Cicco, S.: Fundamental solutions in the full coupled linear theory of elasticity for solid with double porosity. Arch. Mech. **65**, 367-390 (2013).

74. Svanadze, M.M.: External boundary value problems in the quasi static theory of viscoelasticity for Kelvin-Voigt materials with double porosity. Proc. Appl. Math. Mech., **16**, 497-498 (2016).

75. Svanadze, M.M.: Plane waves and problems of steady vibrations in the theory of viscoelasticity for Kelvin-Voigt materials with double porosity. Arch. Mech. **68**, 441-458 (2016).

76. Svanadze, M.M.: Fundamental solution and uniqueness theorems in the linear theory of thermoviscoelasticity for solids with double porosity. J. Thermal Stress. **40**, 1339-1352 (2017).

77. Svanadze, M.M.: External boundary value problems in the quasi static theory of thermoviscoelasticity for Kelvin-Voigt materials with double porosity. Proc. Appl. Math. Mech. **17**, 469-470 (2017).

78. Svanadze, M.M.: Fundamental solutions and uniqueness theorems in the theory of viscoelasticity for materials with double porosity. Trans. A. Razmadze Math. Inst. **172**, 276-292 (2018).

79. Svanadze, M.M.: Potential method in the coupled theory of viscoelasticity of porous materials. J. Elasticity **144**, 119-140 (2021).

80. Svanadze, M.M.: Problems of steady vibrations in the coupled linear theory of double-porosity viscoelastic materials. Arch. Mech. **73**, 365–390 (2021).

81. Tsagareli, I.: Dynamic problems for elastic bodies with double voids. ZAMM- J. Appl. Math. Mech. **102**, e202000335 (2022).

82. Tsagareli, I., Bitsadze, L.: Explicit solution of one boundary value problem in the full coupled theory of elasticity for solids with double porosity. Acta Mech. **226**, 1409-1418 (2015).

83. Tsagareli, I., Svanadze, M.M.: Explicit solution of the boundary value problems of the theory of elasticity for solids with double porosity. Proc. Appl. Math. Mech. **10**, 337-338 (2010).
84. Tsagareli, I., Svanadze, M.M.: Explicit solutions of the problems of elastostatics for an elastic circle with double porosity. Mech. Res. Comm. **46**, 76-80 (2012).
85. Uthaman, A., Thomas, S., Li, T., Maria, H. (eds.): Advanced Functional Porous Materials. From Macro to Nano Scale Lengths. Springer Nature Switzerland AG, Cham, Switzerland (2022).
86. Verruijt, A.: Theory and Problems of Poroelasticity. Delft University of Technology, The Netherlands (2015).
87. Wang, H.F.: Theory of Linear Poro-Elasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology. Princeton Univ. Press, Princeton (2000).
88. Wilson, R.K., Aifantis, E.C.: On the theory of consolidation with double porosity. Int. J. Eng. Sci. **20**, 1009-1035 (1982).
89. Zhao, Y., Chen, M.: Fully coupled dual-porosity model for anisotropic formations. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. **43**, 1128-1133 (2006).